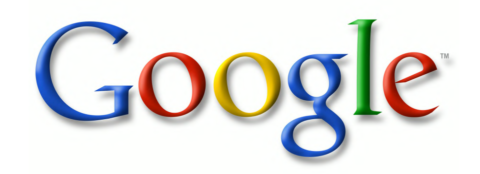


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

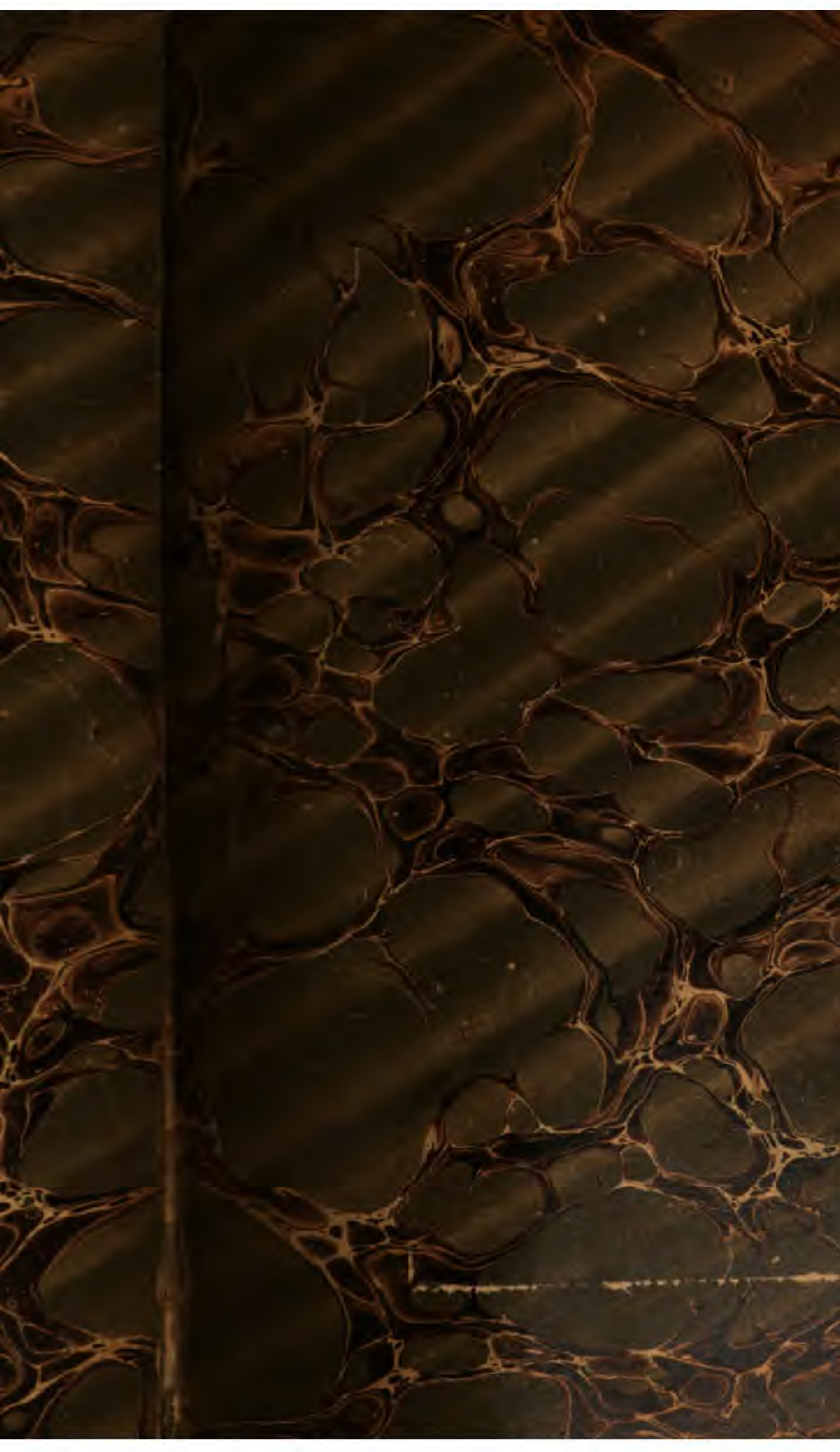


Math 358.84

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)

31 Aug., 1886.

SCIENCE CENTER LIBRARY



COURS
DE MATHÉMATIQUES.



COURS
DE
MATHÉMATIQUES

A L'USAGE DES CANDIDATS
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES;

PAR

CHARLES DE COMBEROUSSE,
Ingénieur civil,
Professeur de Mécanique à l'École Centrale des Arts et Manufactures,
Président du Jury d'admission à la même École,
Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

DEUXIÈME ÉDITION, REFONDUE ET AUGMENTÉE.

TOME DEUXIÈME.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, PLANE ET DANS L'ESPACE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1882

(Tous droits réservés.)

~~VI, 3516~~
Math 355.54 A

AUG 31 1886
Haven Fund.

Cette deuxième Édition du Tome II du *Cours de Mathématiques* a beaucoup tardé à paraître. Nous nous croyons obligé de donner sur ce point quelques explications aux lecteurs qui auront bien voulu nous rester fidèles, comme à ceux qui se seront lassés d'attendre.

Nous allions commencer la revision de ce deuxième Volume, lorsque l'Exposition universelle, qui devait marquer comme un réveil de la France, fut décidée. Appelé à faire partie, dès 1877, des Comités d'admission et d'installation, puis plus tard du Jury des récompenses, ces fonctions ont absorbé pendant deux ans tout le temps dont nous pouvions disposer en dehors de nos devoirs professionnels. En 1879, l'anniversaire de la fondation de l'École Centrale nous a imposé une nouvelle tâche, qu'il nous était impossible de remettre : nous avons publié l'*Histoire* de cette grande école, à laquelle nous appartenions alors depuis vingt-sept ans, et dont les progrès ont si puissamment aidé au développement de l'industrie nationale.

Nous espérons qu'on voudra bien nous excuser d'avoir

interrompu notre œuvre personnelle et de nous être en quelque sorte oublié, au profit d'intérêts plus généraux et plus élevés.

Dès qu'un peu de liberté nous a été rendue, nous avons pensé à nos engagements; et nous nous félicitons de pouvoir faire paraître aujourd'hui, après l'*Arithmétique* et l'*Algèbre élémentaire* (Tome Ier), le deuxième Volume de notre *Cours*, renfermant la *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace, et la Trigonométrie rectiligne et sphérique*.

Les deux premiers Volumes (2e édition), ainsi publiés, forment un tout complet et constituent le domaine principal des *Mathématiques élémentaires*. Les Volumes suivants traiteront des *Mathématiques spéciales*. Le Tome III, tout entier consacré à l'*Algèbre supérieure*, est en grande partie terminé et paraîtra dans un délai rapproché. Les autres Tomes suivront sans interruption, jusqu'à l'achèvement de l'Ouvrage complet.

Nous demandons maintenant la permission d'ajouter quelques détails sur ce deuxième Volume.

Nous avons refondu la *Géométrie élémentaire*, en conservant le même point de vue que dans notre première édition, où nous avions peut-être appliqué la méthode des limites plus franchement et plus nettement que nos prédécesseurs. Nous avons fait de nombreuses additions et amélioré beaucoup de démonstrations délicates. Collaborateur de notre excellent collègue Eugène Rouché pour le *Traité de Géométrie* et les *Éléments de Géométrie*, que le public savant a bien voulu accueillir avec faveur depuis 1865, nous avons pu, grâce à son autorisation,

puiser dans ces deux Ouvrages et enrichir notre *Cours* des fruits d'un travail qui nous est commun, mais où il a pris une si large part. Nous le remercions ici de sa cordiale amitié, heureux de lui témoigner nos sentiments et notre gratitude.

A l'égard de la *Géométrie*, nous sommes resté dans les limites du programme d'admission de l'École Polytechnique, nous bornant à peu près, comme complément, à exposer les propriétés générales des polyèdres quelconques et la théorie des polyèdres réguliers.

Nous avons laissé de côté les *éléments de Géométrie supérieure* que renfermait notre première édition. On pourra étudier plus tard ces éléments si importants dans le dernier Volume de ce *Cours*, en même temps que les notions relatives à la *résolution des problèmes*. Nous voulons, en effet, pour les présenter d'une manière différente, pouvoir nous servir des connaissances que nous fourniront ultérieurement, dans les Tomes III, IV et V, l'*Algèbre supérieure* et la *Géométrie analytique*. En attendant, le lecteur trouvera, s'il le désire, les méthodes et les théories si fécondes de la Géométrie supérieure, traitées avec le plus grand soin et la plus grande abondance, au point de vue de la Géométrie pure, surtout dans le premier des deux Ouvrages dont nous parlions tout à l'heure en associant notre nom à celui de M. Eugène Rouché.

Nous sommes demeuré fidèle à la marche adoptée dans notre première édition, en établissant les formules trigonométriques fondamentales à l'aide de la *Théorie des projections*. La première idée de cette amélioration, qui offre l'avantage d'une grande généralité dans les dé-

monstrations, débarrassées ainsi de fastidieuses discussions, est due à Coriolis.

Comme dans notre première édition, après la *Trigonométrie rectiligne*, nous avons donné la *Trigonométrie sphérique*, bien qu'elle ne soit pas exigée dans les examens. Mais c'est une annexe si naturelle de la géométrie de la sphère, et les sciences physiques et astronomiques y ont recours si souvent, que nous ne pouvions nous dispenser de cette extension.

Quant aux questions comprises habituellement sous le titre de *Complément de la théorie des fonctions circulaires* (formule de Moivre, résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré, équations binômes, séries circulaires), elles appartiennent en réalité à l'*Algèbre supérieure*, et sont exposées dans notre Tome III.

Nous avons cherché, dans le courant du texte, à intéresser le lecteur par des questions et des problèmes complémentaires choisis avec soin. Les énoncés de nombreux *Exercices*, deux *Notes* (dont l'une relative aux applications géométriques et trigonométriques de la *règle à calcul*), enfin d'utiles *Tables numériques*, terminent ce deuxième Volume, que nous souhaitons de voir accueillir par nos collègues avec la même bienveillance que le premier.

Octobre 1881.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

CHAPITRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

CHAPITRE III.

LES LIGNES PROPORTIONNELLES.

CHAPITRE IV.

MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

LIVRE DEUXIÈME.

LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉTERMINATION DES AIRES.

CHAPITRE II.

COMPARAISON DES AIRES.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE TROISIÈME.

LE PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

CHAPITRE II.

ANGLES POLYÈDRES.

LIVRE QUATRIÈME.

LES AIRES ET LES VOLUMES DES CORPS.

CHAPITRE PREMIER.

LES PRISMES ET LES CYLINDRES.

CHAPITRE II.

LES PYRAMIDES ET LES CÔNES.

CHAPITRE III.

LES CORPS TRONQUÉS.

CHAPITRE IV.

LA SPHÈRE.

CHAPITRE V.

SIMILITUDE ET SYMÉTRIE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYÈDRES.

LIVRE CINQUIÈME.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE QUELQUES COURBES USUELLES.

TRIGONOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

INTRODUCTION DES ANGLES DANS LE CALCUL.

CHAPITRE PREMIER.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE II.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES RELATIVES AUX QUATRE PREMIÈRES OPÉRATIONS APPLIQUÉES AUX ARCS.

CHAPITRE III.

FORMULES RENDUES CALCULABLES PAR LOGARITHMES ET APPLICATIONS DIVERSES.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION ET USAGE DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

LIVRE DEUXIÈME.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES.

CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES DE TRIGONOMÉTRIE PRATIQUE.

LIVRE TROISIÈME.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES QUELCONQUES.

CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LA GÉOMÉTRIE.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LA TRIGONOMÉTRIE.

NOTES

TABLES NUMÉRIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU DEUXIÈME VOLUME.

ERRATA.

Page 255, ligne 18, *ajoutez* (après *la génératrice de contact*,) plan qui est un *plan méridien* de la surface;

Page 326, *rétablissez*, dans la figure 330, la lettre A.

Page 327, *ajoutez* (après la ligne 9) : ces deux arcs tangents AB, AB′, sont évidemment égaux entre eux et également inclinés sur l'arc AP, en vertu de l'égalité des deux triangles rectangles ABP, A B′P (554). On voit donc que, sur la sphère (et c'est une nouvelle analogie avec la Géométrie plane), *les arcs de grand cercle tangents menés d'un même point à un même petit cercle sont égaux entre eux et également inclinés sur l'arc de grand cercle déterminé par le point donné et le pôle du petit cercle.*

ERRATA DU TOME PREMIER.

Page 193, ligne 24, *au lieu des numéros* 235, 237, *lisez :* 258, 259.

Page 437, ligne 20, *au lieu de* une série, *lisez* deux séries.

Page 472, ligne 9, *après* termes entiers, *ajoutez* et rationnels.

Page 489, ligne 24, *après* la plus grande des deux, *ajoutez* en valeur absolue.

Page 493, ligne 16, au lieu de $-\frac{a}{b}$, *lisez* (dans le second membre de l'égalité) $-\frac{b}{a}$.

Page 533, ligne 23, *au lieu de* problème, *lisez* système.

Page 559, ligne 5, *au lieu de* $\sin x = \frac{9}{2}$, *lisez* $\sin x = \frac{5}{2}$.

Page 609, ligne 4, *après* constante, *ajoutez* et positive.

Page 681, ligne 7 (avant-dernier terme du développement), *au lieu de* (1 — 6), *lisez* (1 + 6).

Page 727, exercice 187, *au lieu de* est égale au carré de la somme de leurs carrés, *lisez* est égale au carré de leur somme.

GÉOMÉTRIE.

COURS DE MATHÉMATIQUES.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

INTRODUCTION.

1. En commençant la Géométrie, on quitte le domaine de l'abstraction et l'on doit s'appuyer sur des notions dont l'origine est absolument expérimentale. C'est en oubliant cette nécessité qu'on a été quelquefois conduit à compliquer le détail des démonstrations au delà de toute utilité réelle. La rigueur du raisonnement est essentielle, mais seulement dans les limites qui sont imposées à l'esprit humain par la nature même des choses. Nous croyons donc qu'il importe de savoir accepter franchement, au début d'une Science, les vérités primordiales ou les idées intuitives qui lui servent de fondement, et qu'il ne faut pas s'efforcer d'en diminuer le nombre à l'aide de déductions péniblement échafaudées. C'est ce point de vue qui nous guidera dans l'étude des premiers principes géométriques.

2. Le milieu dans lequel nous sommes plongés et où la Terre se meut avec les autres corps célestes a reçu le nom d'*Espace*.

En examinant les corps matériels qui nous environnent,

nous nous familiarisons avec les idées de situation, de forme, d'étendue.

On appelle *volume* d'un corps l'étendue du lieu qu'il occupe dans l'espace *supposé* indéfini.

La Géométrie fait abstraction de toutes les autres *propriétés* des corps : elle ne considère que leur *étendue*. Ils n'ont plus ni *impénétrabilité*, ni *porosité*, ni *élasticité*, ni *pesanteur*, etc. Admettons que l'on puisse plonger les corps dans une atmosphère assez dense pour en conserver l'empreinte : la Géométrie ne raisonne que sur cette empreinte, à laquelle elle suppose une continuité et une régularité que le corps correspondant est, en général, bien loin de présenter. C'est ainsi qu'une perfection idéale est toujours imposée d'abord, comme moyen de simplification, aux sujets de nos investigations.

3. Pour fixer les idées, considérons un *parallélipipède rectangle* (un livre quelconque a une pareille forme). Si sa *hauteur* devient très petite, de manière à pouvoir être négligée à côté des deux autres *dimensions*, on passe, lorsque la hauteur est devenue aussi petite qu'on peut le supposer, de l'idée de volume à l'idée de *surface*.

On voit que les volumes des corps sont séparés de l'espace environnant par des *surfaces*.

De même, si l'on considère un *rectangle*, et si l'on suppose que sa *base* devienne très petite, de manière à pouvoir être négligée à côté de sa *hauteur*, on passe, lorsque la base est devenue aussi petite qu'on peut le supposer, de l'idée de surface à l'idée de *ligne*.

On voit que les surfaces sont limitées par les *lignes*, comme les volumes le sont par les surfaces.

Enfin, étant donnée une ligne quelconque, si sa *longueur* diminue de manière à devenir plus petite que tout ce qu'on voudra, on passe de l'idée de ligne à l'idée de *point*. Un point indique seulement une position dans l'espace.

La *génération* des éléments géométriques a lieu en sens inverse. Le point, dans son mouvement, trace ou engendre une ligne ; la ligne, dans son mouvement, engendre une surface ; la surface, dans son mouvement, engendre un volume.

Deux lignes se *coupent* suivant un point, deux surfaces suivant une ligne ; deux volumes se *coupent* ou se *pénètrent* suivant une surface.

4. La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*, dont tout le monde a le sentiment. *Elle est décrite par un point qui, dans son mouvement, tend constamment vers un seul et même point* ou *conserve la même direction.*

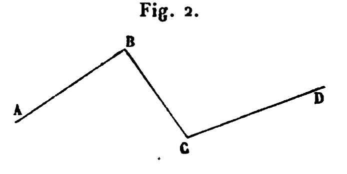
Il en résulte immédiatement que *deux points suffisent pour déterminer une droite;* dès lors, *deux droites* AB et CD (*fig.* 1) *qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue*, c'est-à-dire quelque loin qu'on les suppose prolongées vers la droite ou vers la gauche.

Fig. 1.

C A B D

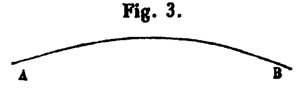
Une ligne brisée est décrite par un point qui, dans son mouvement, change de temps en temps de direction. Ce point décrit alors (*fig.* 2) des portions de lignes droites AB, BC, CD, dont les directions varient et qui ont pour points communs successifs les points B, C, où le changement de direction s'opère.

Fig. 2.



Une ligne courbe est décrite par un point qui, dans son mouvement, change à chaque instant de direction. On peut la regarder alors comme une ligne brisée composée d'une infinité d'éléments rectilignes infiniment petits (*fig.* 3). Et cette définition est importante en ce qu'elle permet d'étendre immédiatement, avec Leibnitz, toutes les propriétés des lignes brisées aux lignes courbes, lorsque ces propriétés ne dépendent ni de la grandeur ni du nombre des côtés de la ligne brisée.

Fig. 3.



5. Euclide, dans ses *Éléments* (285 avant J.-C.), définit la ligne droite de la manière suivante :

La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

Cette définition a donné lieu à des interprétations diverses. Nous pensons qu'elle s'accorde avec la définition que nous venons d'adopter (4). *Être placée également entre ses points,* n'est-ce pas, pour une ligne, ne dévier d'aucun côté par rap-

port à ses différentes parties? n'est-ce pas, par conséquent, conserver dans son cours une direction invariable?

Quoi qu'il en soit, une pratique constante associe indissolublement dans notre esprit l'idée de *droite* ou d'alignement et l'idée d'une *direction unique*.

6. On entend par *surface plane* ou *plan* une *surface telle, que, dès qu'une ligne droite y a deux points, elle y est contenue tout entière*. Nous prouverons plus loin que deux plans *coïncident* dès qu'ils ont trois points communs non en ligne droite.

La définition précédente signifie que deux points *quelconques* de la surface déterminent une *direction* qu'on peut suivre indéfiniment sans sortir de la surface. Le *plan* est donc, en quelque sorte, pour les autres surfaces, ce que la ligne droite est pour les autres lignes, et tout le monde en a le sentiment.

On divise la Géométrie en Géométrie *plane* et en Géométrie *dans l'espace*. La Géométrie plane traite des figures qu'on peut tracer sur un plan; la Géométrie dans l'espace traite des figures dont les éléments sont disposés d'une manière quelconque.

7. Deux figures qui peuvent se superposer ou pénétrer exactement l'une dans l'autre, c'est-à-dire deux figures qui peuvent *coïncider*, sont dites *égales*.

Deux longueurs qui renferment le même nombre d'unités de longueur, deux surfaces qui renferment le même nombre d'unités superficielles, deux volumes qui renferment le même nombre d'unités de volume, *sans que leur coïncidence soit possible*, sont dits *équivalents*.

8. *Le but de la Géométrie est la mesure de l'étendue.* Mais il est utile de préciser et d'étendre cette définition.

On ne peut mesurer *directement* que les lignes droites, en portant sur celles que l'on considère l'unité de longueur et ses subdivisions. Et encore cette mesure directe n'est pas possible dans un très grand nombre de cas (*distance d'un point à un point inaccessible, distance de deux points inaccessibles*, etc.). On ne peut pas mesurer directement les lignes courbes. Il en est de même pour les surfaces et les volumes: on ramène leur évaluation à celle de certaines lignes droites qui ont une liaison déterminée avec la surface ou le volume considéré.

Si l'on veut donner une idée juste de la Géométrie, il faut donc dire que *la Géométrie a pour but de mesurer l'étendue, en ramenant toutes les mesures quelconques à la mesure directe de certaines lignes droites choisies convenablement dans chaque cas*. Toutes les propriétés démontrées successivement dans un Traité de Géométrie concourent au but que nous indiquons.

Mais cette définition, suffisante lorsqu'on se borne à écrire un Traité élémentaire, est beaucoup trop restreinte si l'on veut envisager la science dans son véritable ensemble.

« *La Géométrie*, comme le dit très bien M. Duhamel, *comprend tous les rapports résultant de la nature de l'étendue*. La mesure des grandeurs comprend quelques-uns de ces rapports, mais il en est une infinité d'autres qui n'y ont pas trait directement (¹). »

9. Toute proposition consiste dans une *hypothèse* et une *conclusion* qui en découle. La démonstration de la proposition est la suite des raisonnements qu'il faut faire pour passer de l'hypothèse à la conclusion, en s'appuyant sur des vérités évidentes ou déjà démontrées.

Une proposition étant donnée, si l'on adopte à la fois une hypothèse contraire et une conclusion contraire, on énonce la proposition *contraire*. On énonce la proposition *réciproque* en prenant la conclusion de la proposition *directe* pour hypothèse et son hypothèse pour conclusion.

La proposition contraire et la proposition réciproque sont souvent fausses, parce que la conclusion de la proposition directe peut répondre à un plus grand nombre de cas que l'hypothèse.

(¹) Ils pourront s'y adapter plus tard, ils pourront aussi servir dans les *Applications* de la Géométrie à d'autres Sciences. « Il ne faut donc, ajoute M. Duhamel, négliger aucune vérité intéressante par elle-même, indépendamment de toute utilité pratique. Outre le plaisir que l'on éprouve toujours à apprendre quelque chose de nouveau, il y a l'avantage incontestable d'accroître ses facultés intellectuelles par l'usage bien dirigé qu'on en fait; et si l'on pouvait suivre l'action de toutes les influences sur le développement de l'esprit, on reconnaîtrait souvent la part que les méditations de la Science abstraite pourraient revendiquer dans le talent du penseur, de l'orateur ou de l'écrivain. » (J.-M.-C. DUHAMEL, *Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement*, 2ᵉ Partie, p. 308.)

10. Le mot *axiome* signifie une *proposition évidente* par elle-même. Un *théorème* est une proposition qui doit être *démontrée*. Le mot *problème* s'explique de lui-même. Un *lemme* est une proposition préliminaire facilitant la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est une conséquence immédiate d'un théorème. Le *scolie* est une remarque sur un ou plusieurs théorèmes.

LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

I. — Mesure et rapport des lignes droites.

11. Nous savons par l'Arithmétique ce qu'on doit entendre par le mot *unité* et ce que c'est que *mesurer* une grandeur.

Mesurer la grandeur d'une ligne droite, c'est la comparer à une autre droite prise pour unité.

Si la droite qu'on veut mesurer surpasse le mètre, on porte le mètre sur sa direction autant de fois que possible ; supposons qu'il y soit contenu 5 fois, plus un reste inférieur au mètre. On cherche combien ce reste contient de décimètres ; supposons qu'il en contienne 5, plus un reste inférieur au décimètre. On mesure ce nouveau reste à l'aide du centimètre, et, s'il en contient exactement 9, on dit que la droite considérée a une longueur de $5^{m},59$.

Si la droite donnée est plus petite que le mètre, on emploie immédiatement comme unité le décimètre ou le centimètre, etc.

Pour comparer deux grandeurs, il faut former le *rapport* des nombres qui les représentent : il faut donc chercher d'abord si ces grandeurs contiennent exactement une même unité, si elles ont une commune mesure.

Deux lignes droites étant données, on trouve *leur plus grande commune mesure* en opérant sur ces droites absolument comme on opère sur deux nombres pour trouver leur plus grand commun diviseur. On porte donc la plus petite droite sur la plus grande autant de fois que possible, le reste

obtenu sur la plus petite droite, le second reste sur le premier, etc. L'opération est terminée lorsqu'on arrive à un reste contenu exactement dans le reste précédent. Ce dernier reste est la plus grande commune mesure cherchée.

Désignons, par exemple, par A et B les deux droites données, par R, R', R'', les restes successivement trouvés. Supposons que les résultats des opérations soient représentés par les égalités suivantes :

$$A = 3B + R, \quad B = 5R + R', \quad R = 2R' + R'', \quad R' = 7R''.$$

On en déduit facilement

$$R = 15R'', \quad B = 82R'', \quad A = 261R''.$$

On en conclut donc, pour le rapport de A à B,

$$\frac{A}{B} = \frac{261R''}{82R''} = \frac{261}{82}.$$

On peut remarquer que l'expression fractionnaire obtenue doit être irréductible. Si 261 et 82 admettaient, par exemple, le facteur commun 5, A et B seraient divisibles par 5R''; R'' ne serait donc plus leur plus grande commune mesure.

Il peut se faire que les deux droites considérées n'aient pas de commune mesure, qu'elles soient *incommensurables*. En cherchant leur plus grande commune mesure, on n'arrive alors jamais à un reste nul, du moins théoriquement; car les restes successifs, formant une suite décroissante, finissent bientôt, en vertu de leur petitesse, par échapper à tous nos moyens d'appréciation.

On peut néanmoins trouver le rapport incommensurable de deux droites données, avec telle approximation qu'on veut. Supposons que les droites A et B n'aient pas de commune mesure et qu'on demande l'expression de leur rapport à 0,001 près. On divisera B en 1000 parties égales : nous désignerons l'une de ces parties par a. On portera a sur A autant de fois que possible : supposons que A tombe entre $7815a$ et $7816a$. Le rapport $\frac{A}{B}$ tombera évidemment entre $\frac{7815a}{1000a}$ et $\frac{7816a}{1000a}$, c'est-à-dire entre 7,815 et 7,816 : le premier nombre représentera le rapport cherché à 0,001 près par défaut, le second à 0,001 près par excès.

12. Quand on prend un point sur une droite, on peut con-

sidérer sur la droite deux côtés différents par rapport à ce point : c'est ce qu'on entend par les *sens* ou les *directions opposées* de la droite en ce point. Par exemple, un observateur placé au point A de la droite CB (*fig.* 1) peut distinguer le sens ou la direction de *droite* AB, le sens ou la direction de *gauche* AC.

Il est commode d'appeler *segment* (de droite) une portion de droite limitée par deux points déterminés. Si ces deux points sont A et B (*fig.* 1), on doit regarder les deux segments AB et BA comme étant égaux en valeur absolue, mais de sens ou de signes contraires.

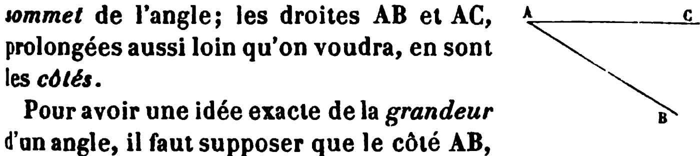
Pour ajouter effectivement plusieurs portions de droites, on les porte à la suite les unes des autres, sur une droite indéfinie, de manière qu'elles se succèdent bout à bout *dans le même sens*. Leur *somme* est représentée par la longueur comprise entre le point de départ du premier segment et le point d'arrivée du dernier.

Pour retrancher effectivement deux portions de droites l'une de l'autre, on les porte bout à bout sur une droite indéfinie, mais en leur donnant des sens contraires. Si ces deux portions de droites sont représentées, par exemple, par AD et BD en valeur absolue (*fig.* 1), on porte AD sur la droite indéfinie, à partir du point A et *à droite* de ce point; puis on compte BD à partir du point D, mais *à gauche* de ce point. Le segment AB représente alors la différence AD — BD.

II. — Des angles.

13. Lorsque deux droites AB et AC partent d'un même point A en suivant des directions différentes, elles forment un *angle* (*fig.* 4). Le point A est le *sommet* de l'angle; les droites AB et AC, prolongées aussi loin qu'on voudra, en sont les *côtés*.

Fig. 4.



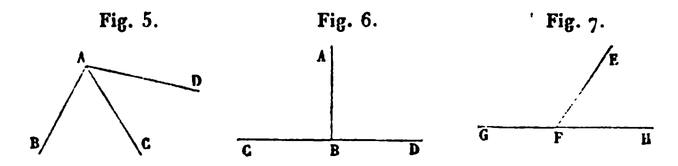
Pour avoir une idée exacte de la *grandeur* d'un angle, il faut supposer que le côté AB, par exemple, était d'abord couché sur le côté AC, puis qu'il s'en est éloigné en tournant autour du sommet A, pour venir prendre la position qu'il occupe. L'amplitude de ce mouvement de rotation correspond à la grandeur de l'angle.

On désigne un angle par la lettre placée à son sommet : on

dit l'angle A. Lorsque plusieurs angles ont même sommet, on les distingue en lisant en outre deux lettres placées sur leurs côtés; on a soin d'énoncer au milieu la lettre du sommet : on dit l'angle BAC.

14. Deux angles sont *adjacents* lorsque, ayant un sommet commun et un côté commun, les côtés non communs sont situés de part et d'autre du côté commun. Les angles BAC, CAD (*fig.* 5), sont adjacents.

Lorsque deux droites se coupent, elles forment deux angles adjacents : lorsque ces angles adjacents sont égaux, la première droite est dite *perpendiculaire* sur la seconde; elle est dite



oblique dans le cas contraire. La droite AB (*fig.* 6) est perpendiculaire sur la droite CD, parce que les angles adjacents CBA, DBA, sont égaux. La droite EF (*fig.* 7) est oblique sur la droite GH, parce que les angles adjacents GFE, HFE, sont inégaux. Le point B est le *pied* de la perpendiculaire, le point F est le pied de l'oblique.

Les angles adjacents égaux CBA, DBA, sont appelés *droits*. Un angle droit est un angle dont l'un des côtés est perpendiculaire sur l'autre.

Pour ajouter deux angles, on transporte le second à la suite du premier, de manière à former deux angles adjacents: l'angle des côtés non communs est la *somme* des angles proposés. La soustraction de deux angles s'opère d'une manière analogue.

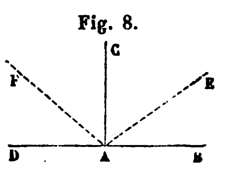
THÉORÈME.

15. *Par un point pris sur une droite, on peut toujours lui élever une perpendiculaire, mais une seule* (*fig.* 8).

Par le point A de la droite DB, menons une droite quelconque AE. Si les angles BAE, DAE, sont égaux, AE sera perpendiculaire sur DB. S'il n'en est pas ainsi, supposons que BAE soit le plus petit des deux angles. Faisons alors tourner la ligne AE autour du point A jusqu'à ce qu'elle vienne coïn-

cider avec AD. Dans ce mouvement, l'angle BAE croît d'une manière continue, tandis que l'angle DAE décroît d'une manière continue jusqu'à devenir nul. L'angle BAE, d'abord plus petit que l'angle DAE, doit donc devenir plus grand, comme l'indique la seconde position AF de AE, marquée sur la figure. Il y a donc nécessairement un instant, et cet instant est unique, où les deux angles sont égaux. Avant cet instant, ils n'étaient pas encore égaux; après, ils ne le sont plus. Si l'on suppose que AE occupe la position AC lorsque les deux angles adjacents sont égaux, on voit que AC est la seule perpendiculaire qu'on puisse élever au point A sur DB.

Fig. 8.



COROLLAIRES.

16. *Tous les angles droits sont égaux*, sans quoi l'on pourrait mener deux perpendiculaires en un même point d'une même droite. L'angle droit est donc un type invariable auquel on peut comparer ou rapporter les autres angles.

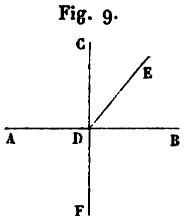
Un angle *aigu* est un angle plus petit qu'un angle droit, un angle *obtus* est un angle plus grand qu'un angle droit : l'angle DAF est aigu, l'angle BAF est obtus.

17. Lorsque la somme de deux angles est égale à un angle droit, ces angles sont appelés *complémentaires ;* lorsque la somme de deux angles est égale à deux angles droits, ces angles sont appelés *supplémentaires.*

Les angles adjacents formés par deux droites qui se coupent sont supplémentaires (*fig.* 9).

Soient les angles BDE, EDA. Élevons au point D la perpendiculaire DC sur AB. L'angle aigu BDE est inférieur à un angle droit de l'angle CDE; l'angle obtus ADE est supérieur à un angle droit du même angle CDE. La somme des angles BDE, ADE, est donc égale à deux angles droits.

Fig. 9.



Il résulte de cette démonstration que *la somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un même point* D *et au-dessus d'une même droite* AB *est toujours égale à deux angles droits.*

18. Lorsque deux droites qui se coupent sont prolongées toutes deux au delà du point d'intersection, elles forment quatre angles : c'est ce que montre la figure lorsque l'on considère les droites AB et CF. Ce qui précède prouve alors que, *l'un de ces quatre angles étant droit, les trois autres le sont.* Par conséquent, *si* CD *est perpendiculaire sur* AB, AB *l'est à son tour sur* CD.

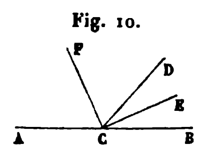
La somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un même point est égale à quatre angles droits. On n'a, pour s'en assurer, qu'à mener par le point donné deux droites perpendiculaires entre elles et indéfiniment prolongées.

19. *Lorsque deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs, c'est-à-dire leurs côtés non communs, sont en ligne droite.* Cette réciproque de la proposition du n° 17 est évidente. Si les deux angles ADE, EDB (*fig.* 9), sont supplémentaires, les côtés AD et DB sont en ligne droite ; car le prolongement de AD détermine précisément le supplément de l'angle ADE.

20. *La bissectrice* d'un angle est la ligne qui, menée par le sommet de cet angle, le partage en deux angles égaux.

Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont à angle droit (*fig.* 10). Soient les deux angles supplémentaires ACD, DCB ; soient CF et CE les bissectrices de ces angles. L'angle FCD est la moitié de l'angle ACD, l'angle DCE est la moitié de l'angle DCB. L'angle FCE sera donc la moitié de la somme des angles ACD et DCB ou la moitié de deux angles droits.

Fig. 10.



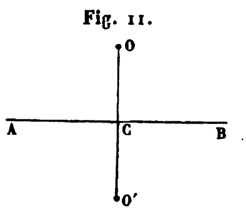
THÉORÈME.

21. *Par un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite, mais une seule* (*fig.* 11).

Plions la figure autour de AB, le point O viendra en O'. Remettons la figure dans sa première position, et joignons les points O et O' à un point quelconque C de la droite AB. Les angles adjacents OCB, O'CB, seront toujours *égaux*, puisqu'un nouveau rabattement de la figure autour de AB les fera évi-

demment *coïncider* (7). Or, pour que la droite OC soit perpendiculaire sur AB, il suffit que l'angle OCB soit droit, c'est-à-dire que la somme des deux angles adjacents égaux OCB, O'CB, soit égale à deux angles droits, condition qui exige que les côtés extérieurs OC et O'C soient en ligne droite (19). Deux points déterminant une droite (4), la droite OO' est donc perpendiculaire à AB, et c'est la seule qu'on puisse mener du point O sur AB.

Fig. 11.

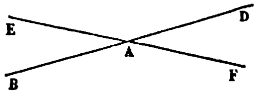


THÉORÈME.

22. *Les angles opposés par le sommet sont égaux.*

Deux angles *opposés par le sommet* sont tels, que les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Fig. 12.



Soient les deux droites BD, EF (*fig.* 12) : les angles BAE, FAD, sont égaux. En effet, ces deux angles ont pour supplément le même angle DAE. On prouverait de même que les angles DAE, FAB, sont égaux.

23. Réciproquement, *si les angles* BAE, FAD, *sont égaux, ainsi que les angles* DAE, FAB, *les trois points* B, A, D, *sont en ligne droite, ainsi que les trois points* F, A, E. En effet, la somme des angles formés autour du point A étant toujours égale à quatre droits (18), la somme des angles BAE et DAE, qui est la moitié de la somme des angles considérés, sera égale à deux angles droits; ces angles étant adjacents, leurs côtés extérieurs BA et AD seront en ligne droite (19). On démontre de même que FAE est une seule et même ligne droite.

Il est évident que, *si deux angles égaux sont dans la position d'opposés par le sommet, et que deux de leurs côtés soient en ligne droite, les deux autres côtés sont aussi en prolongement.*

Il en résulte que *les bissectrices des angles opposés par le sommet sont en prolongement l'une de l'autre.* Si l'on considère deux droites formant quatre angles deux à deux opposés par le sommet, les quatre bissectrices correspondantes forment donc deux droites, d'ailleurs perpendiculaires l'une sur l'autre (20).

III. — Des triangles.

24. On appelle *triangle* la figure formée par trois droites qui se coupent deux à deux. Les portions ainsi limitées de ces droites sont les *côtés* du triangle, les angles qu'elles déterminent deux à deux sont les *angles* du triangle, leurs points d'intersection en sont les *sommets*.

Un triangle est *isocèle* quand il a deux côtés égaux. La *base* d'un triangle isocèle est le côté qui n'a pas d'égal; le sommet opposé est spécialement le *sommet* du triangle. La perpendiculaire abaissée du *sommet* sur la *base* (21) est la *hauteur* du triangle isocèle.

Un triangle est *équilatéral* quand il a ses trois côtés égaux; il est *équiangle* quand il a ses trois angles égaux.

Un triangle est *rectangle* quand l'un de ses angles est droit; le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse* du triangle.

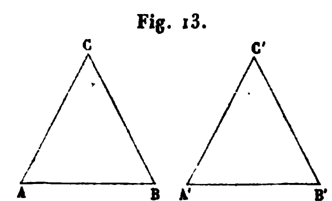
THÉORÈME.

25. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux* (*fig.* 13).

Soit le triangle isocèle ABC. On a, par hypothèse, AC = BC, et il faut démontrer que l'angle A est égal à l'angle B.

Pour cela, considérons un second triangle A′B′C′, *reproduction exacte* du premier, et transportons-le sur le triangle ABC *en le renversant* de manière que C′ tombe en C et B′ en A : cette coïncidence est possible, puisqu'on a AC = BC = B′C′. Les deux angles C et C′ étant identiques, le côté C′A′ prendra alors la direction CB, et, comme C′A′ = CA = CB, le point A′ tombera en B. Par suite, les deux triangles comparés coïncident comme ayant mêmes sommets (4), et, l'angle B′, égal à l'angle B, coïncidant avec l'angle A, les angles A et B sont égaux.

Fig. 13.



26. Réciproquement, *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés sont égaux et le triangle est isocèle* (*fig.* 13).

Dans le triangle ABC, on a, par hypothèse, angle A = angle B, et il faut démontrer que AC = BC.

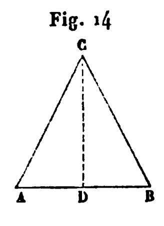
Cette fois, nous transporterons le triangle auxiliaire A′B′C′ sur le triangle ABC, en le renversant de manière que B′ tombe en A et A′ en B. On aura soin d'ailleurs de faire tomber les deux triangles d'un même côté par rapport au côté rendu commun AB. Puisqu'on a angle A = angle B = angle B′, le côté B′C′ prendra alors la direction du côté AC, et le point C′ tombera quelque part sur la droite AC ou sur son prolongement. De même, puisqu'on a angle B = angle A = angle A′, le côté A′C′ prendra la direction du côté BC, et le point C′ tombera quelque part sur la droite BC ou sur son prolongement. Le point C′, devant se trouver à la fois sur les deux droites AC et BC, tombera nécessairement à leur intersection C, et les deux triangles comparés coïncident comme ayant mêmes sommets. Le côté A′C′, égal au côté AC, coïncidant avec le côté BC, les côtés AC et BC sont égaux et le triangle ABC est isocèle.

COROLLAIRES.

27. Les démonstrations précédentes prouvent que *le triangle isocèle est superposable à lui-même par renversement ou retournement.*

D'après cela, si l'on considère, dans le triangle isocèle ABC (*fig.* 14), la droite CD qui joint le sommet C au milieu D de la base, cette droite reste fixe quand on retourne le triangle de manière à amener B en A et A en B. Par suite, après ce mouvement, les angles adjacents DCB, DCA, coïncident et sont égaux. De même, les angles adjacents supplémentaires CDB, CDA, coïncident et sont droits (17).

Fig. 14



Ainsi, *dans tout triangle isocèle, la droite qui unit le sommet au milieu de la base se confond avec la hauteur du triangle et la bissectrice de l'angle au sommet.*

La droite CD remplit donc *quatre conditions*, et, comme d'après ce qui précède, deux points déterminent une droite, qu'un angle n'a qu'une bissectrice, que par un point on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur une droite, dès qu'une droite CD remplit *deux* des conditions indiquées, elle remplit nécessairement les deux autres.

28. *Tout triangle équilatéral est équiangle, et tout triangle équiangle est équilatéral.*

29. On a à considérer dans un triangle quelconque six *éléments :* trois côtés et trois angles. Il suffit que trois de ces éléments soient respectivement égaux dans deux triangles pour que ces triangles soient égaux : il faut seulement que, parmi ces éléments égaux, il entre au moins un côté. Nous aurons donc à démontrer les trois cas d'égalité suivants.

THÉORÈME.

30. *Deux triangles* ABC, A′B′C′, *sont égaux :*

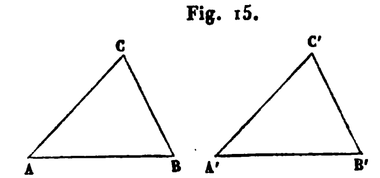
1° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

1° Supposons (*fig.* 15) qu'on ait AB = A′B′, et que les angles A et A′, B et B′, soient égaux. On pourra porter le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de manière que A′B′ coïncide avec AB ; si les deux triangles tombent alors dans le même sens par rapport au côté commun, A′C′ prendra la direction de AC, puisque l'angle A égale l'angle A′ ; B′C′ prendra la direction de BC, puisque l'angle B égale l'angle B′. Le point d'intersection C′ des côtés A′C′ et B′C′ coïncidera donc avec le point d'intersection C des côtés AC et BC. Les deux triangles considérés, ayant alors mêmes sommets, sont égaux.

Fig. 15.



2° Supposons (*fig.* 15) que l'angle C′ soit égal à l'angle C et qu'on ait C′A′ = CA, C′B′ = CB. Les deux angles C′ et C étant égaux, on pourra porter le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de manière que ces angles coïncident. Les droites C′A′ et CA, C′B′ et CB, auront alors la même direction, et, comme on a C′A′ = CA et C′B′ = CB, les sommets A et A′, B et B′, coïncideront. Les deux triangles considérés, ayant alors mêmes sommets, sont égaux.

3° Supposons (*fig.* 16) qu'on ait AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′. Nous allons ramener ce troisième cas au deuxième.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC en faisant coïncider A′B′ avec son égal AB; puis, rabattons le triangle A′B′C′ autour de AB de manière que C′ vienne en C_1. Le triangle ABC_1 sera la reproduction du triangle A′B′C′. On aura donc

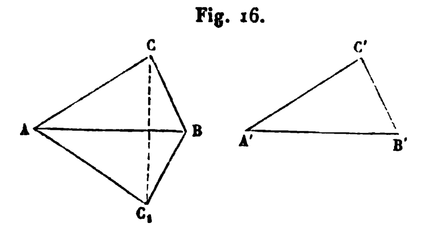


Fig. 16.

$$C'B' = C_1B = CB,$$

en même temps que

$$C'A' = C_1A = CA.$$

Les deux triangles CBC_1, CAC_1 étant isocèles, les angles à la base sont égaux dans chacun d'eux (25). Les angles ACB et AC_1B sont donc égaux comme formés de parties égales. Par suite, l'angle C du triangle ABC est égal à l'angle C′ du triangle A′B′C′, et ces deux triangles sont égaux (2°).

31. On voit, par ce qui précède, que, *dans les triangles égaux, les angles égaux sont toujours opposés aux côtés égaux, et réciproquement.*

THÉORÈME.

32. *Dans un triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle* (*fig.* 17).

Dans le triangle ABC, on a $CB > CA$, et il faut démontrer que l'angle A est plus grand que l'angle B.

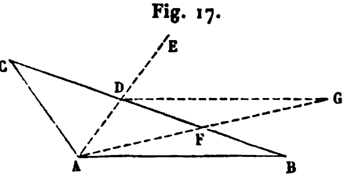


Fig. 17.

Sur CB, prenons $CD = CA$, et traçons la droite ADE. Le triangle ACD étant isocèle, l'angle CAD, nécessairement moindre que l'angle A, est égal à l'angle CDA ou à son opposé par le sommet EDB. L'angle EDB est donc lui-même moindre que l'angle A.

Mais, si l'on joint le sommet A au milieu F du segment DB et si l'on prend sur la droite ainsi déterminée $FG = AF$, les triangles AFB, DFG, sont égaux (30, 2°), et l'angle ABF égal, par suite, à l'angle GDF (31). Mais, d'après la construction même, le point G est situé dans l'angle EDB. Donc l'angle EDB, moindre que l'angle A, surpasse l'angle GDF ou son égal B, et l'on a, *a fortiori*, angle A > angle B.

33. Réciproquement, *dans un triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté* (*fig.* 17).

Dans le triangle ABC, on a angle A > angle B, et il faut démontrer qu'il en résulte CB > CA.

En effet, si l'on avait CB = CA, l'angle A serait égal à l'angle B (25), et, si l'on avait CB < CA, on aurait

$$\text{angle A} < \text{angle B},$$

d'après la proposition directe (32). Il faut donc qu'on ait CB > CA, puisque CB ne peut être, d'après les conditions de l'énoncé, ni égal à CA ni moindre que CA.

34. La démonstration precedente est un premier exemple de la *méthode de réduction à l'absurde*, si employée par les anciens. Cette méthode consiste à prouver que la non-existence du théorème qu'on veut établir conduirait à une absurdité évidente ou à des conclusions contraires à l'hypothèse admise comme point de départ.

La méthode de réduction à l'absurde est surtout applicable à la démonstration des *réciproques*.

THÉORÈME.

35. *Dans tout triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence* (*fig.* 18).

Il suffit de démontrer la première partie de l'énoncé pour le plus grand côté et la seconde pour le plus petit.

Fig. 18.

Soit le triangle ABC, dont les trois côtés rangés par ordre de grandeur sont AB, AC, BC.

Prolongeons AC d'une longueur CD égale à BC et joignons BD. Le triangle BCD étant isocèle, l'angle D, égal à l'angle CBD, est moindre que l'angle ABD. On a donc, dans le triangle ABD (33),

$$AB < AD,$$

c'est-à-dire

$$AB < AC + BC.$$

Si, des deux membres de cette inégalité, on retranche AC, il vient

$$BC > AB - AC.$$

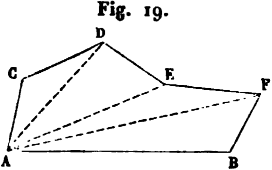
On voit que *trois longueurs données arbitrairement ne peuvent pas toujours former les trois côtés d'un triangle.* Il faut que la plus grande soit moindre que la somme des deux autres.

COROLLAIRES.

36. *Une ligne droite limitée est moindre que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités* (*fig.* 19).

Comparons la droite AB au contour brisé ACDEFB. La figure donne immédiatement (35)

Fig. 19.



$$AD < AC + CD,$$
$$AE < AD + DE,$$
$$AF < AE + EF,$$
$$AB < AF + FB.$$

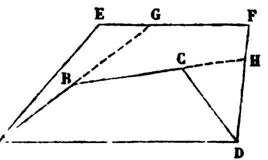
En ajoutant ces inégalités membre à membre et en simplifiant, on a

$$AB < AC + CD + DE + EF + FB.$$

37. *Toute ligne polygonale convexe est moindre que toute ligne polygonale enveloppante terminée aux mêmes extrémités* (*fig.* 20).

Laissant de côté la partie commune, il faut prouver que le contour ABCD est moindre que le contour AEFD.

Fig. 20.



Prolongeons AB et BC jusqu'aux points G et H, où ils rencontrent le contour enveloppant. Nous aurons successivement (36)

$$AB + BG < AE + EG,$$
$$BC + CH < BG + GF + FH,$$
$$CD < CH + HD.$$

En ajoutant ces inégalités membre à membre et en simplifiant, il vient

$$AB + BC + CD < AE + EF + FD.$$

On prouvera de même que *toute ligne polygonale convexe est moindre que toute ligne polygonale qui l'enveloppe entièrement.*

Le théorème n'est vrai, d'une manière générale, que si la ligne enveloppée est convexe.

THÉORÈME.

38. *Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant des angles inégaux, leurs troisièmes côtés sont inégaux et le plus grand est opposé au plus grand angle* (*fig.* 21).

On peut toujours placer les deux triangles proposés, comme les triangles ACB, ACD, de manière qu'ils aient le côté commun AC et que les deux autres côtés AB = AD tombent de part et d'autre de ce côté commun. Supposons l'angle BAC plus grand que l'angle CAD : il faut prouver que le côté BC est plus grand que le côté CD. Pour cela, menons la bissectrice AI de l'angle total BAD : elle tombe dans le plus grand angle BAC et coupe BC au point I. Joignons ID. Les deux triangles BAI, IAD, sont égaux d'après le deuxième cas d'égalité (30), et l'on en conclut BI = ID. Le triangle ICD donne d'ailleurs (35) CD < IC + ID, c'est-à-dire CD < IC + IB ou que BC.

Fig. 21.

A D B I C

39. Réciproquement, *lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, si leurs troisièmes côtés sont inégaux, les angles opposés sont inégaux et le plus grand est opposé au plus grand côté* (*fig.* 21).

Considérons les deux triangles ACB, ACD, placés comme il vient d'être dit, et supposons BC > CD. Il faut démontrer que l'angle BAC est plus grand que l'angle CAD.

En effet, si les deux angles BAC et CAD étaient égaux, les deux triangles seraient égaux (30, 2°) et l'on aurait BC = CD.

Si l'angle BAC était moindre que l'angle CAD, le côté BC, d'après la proposition directe (38), serait moindre que le côté CD.

L'angle BAC, ne pouvant, d'après les conditions de l'énoncé, ni être égal à l'angle CAD ni être moindre que cet angle, est nécessairement plus grand.

40. Nous venons encore de nous servir de la méthode de réduction à l'absurde (34). Ce procédé étant très-fréquent en

Géométrie, nous éviterons des redites en le résumant sous la forme générale suivante :

Lorsqu'en démontrant une ou plusieurs propositions on a fait toutes les hypothèses admissibles, et qu'elles ont conduit respectivement à des conclusions essentiellement distinctes, les réciproques des propositions considérées sont toutes vraies.

C'est ce qu'on peut appeler la *loi des réciproques* [1].

IV. — Des perpendiculaires et des obliques.

THÉORÈME.

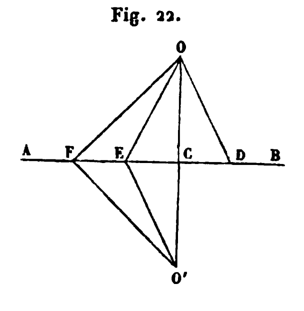
41. *Si, d'un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on mène à cette droite la perpendiculaire* OC *et diverses obliques* OD, OE, OF, . . . , *deux obliques dont les pieds sont situés de part et d'autre et à égale distance du pied de la perpendiculaire sont égales, la perpendiculaire est plus courte que toute oblique, et la longueur d'une oblique croît à mesure que son pied sur* AB *s'éloigne de celui de la perpendiculaire* (*fig.* 22).

Sur le prolongement de OC, prenons CO′ = OC et joignons le point O′ aux pieds E et F.

Si l'on suppose CD = CE, les deux triangles OCD, OCE, sont égaux (30, 2°), et il en résulte OD = OE.

On a donc aussi OE = O′E et OF = O′F, comme obliques dont les pieds sont à égale distance du pied de la perpendiculaire EC ou FC à OO′.

Fig. 22.



Si l'on compare maintenant la droite OO′ et les contours OEO′ et OFO′, on a immédiatement (36, 37)

$$OO' < OEO' < OFO',$$

c'est-à-dire, en divisant par 2,

$$OC < OE < OF.$$

---

[1] En récrivant le § III, relatif aux *triangles*, nous avons adopté la marche indiquée dans un autre de nos Ouvrages : TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition (1879). Cette marche a l'avantage de supprimer l'axiome inutile et illogique : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.* (*Voir* DUHAMEL, *loc. cit.*, p. 7 et suiv.)

Si les deux obliques inégales considérées n'étaient pas du même côté de la perpendiculaire, comme OD et OF, on prendrait CE = CD, et l'on remplacerait OD par son égale OE.

COROLLAIRES.

42. La perpendiculaire OC représente ce qu'on appelle la *distance* du point O à la droite AB.

43. Puisque l'on a OC < OE, dans le triangle OCE, l'angle OEC, moindre que l'angle droit OCE (32), est un angle aigu. Il en résulte que, *lorsqu'une perpendiculaire et une oblique sont menées d'un même point à une même droite, la perpendiculaire tombe toujours dans celui des deux angles formés par l'oblique avec la droite qui est aigu, à moins que la perpendiculaire ne passe par le pied même de l'oblique.*

On voit par là que, dans tout triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit sont aigus.

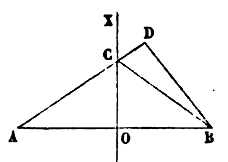
44. D'après la loi générale des réciproques (40), les réciproques des propositions qui constituent l'énoncé du n° 41 sont toutes vraies. En particulier, *lorsqu'une droite* OC *est la plus courte distance rectiligne du point* O *à la droite* AB, *elle est perpendiculaire sur* AB.

THÉORÈME.

45. *Le lieu géométrique de tous les points d'un plan à égale distance des extrémités d'une droite est la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite* (*fig.* 23).

On entend par *lieu géométrique plan* une série de points jouissant d'une certaine propriété commune, à l'exclusion de tous les autres points du plan considéré.

Fig. 23.



Soit la droite XY perpendiculaire sur le milieu de AB. Prenons un point C quelconque sur XY, et joignons-le aux points A et B. Les obliques CA et CB seront égales (41).

Prenons un point D quelconque hors de XY, et joignons-le aux points A et B. DA coupera XY au point C, et l'on aura CA = CB. Le triangle DCB donne d'ailleurs DB < DC + CB, c'est-à-dire DB < DC + CA ou DB < DA.

Les points pris sur la perpendiculaire sont également distants des extrémités A et B; les points pris hors de la perpendiculaire sont inégalement distants des mêmes extrémités : la perpendiculaire XY constitue donc bien le lieu géométrique indiqué.

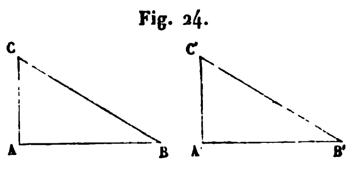
46. Deux points suffisant pour déterminer une droite, *dès qu'une droite* XY *a deux de ses points à égale distance des extrémités d'une droite* AB, *elle est perpendiculaire sur le milieu de* AB.

THÉORÈME.

47. *Deux triangles rectangles sont égaux : 1° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal; 2° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal* (*fig.* 24).

1° Soient les deux triangles rectangles ABC, A′B′C′, dans lesquels on a BC = B′C′ et l'angle B égal à l'angle B′. Portons les deux triangles l'un sur l'autre de manière que B′C′ coïncide avec BC; en vertu de l'égalité des angles B′ et B, B′A′ prendra la direction BA et le point A′ tombera au point A; car les perpendiculaires abaissées des points C′ et C, qui n'en font plus qu'un seul, sur les droites B′A′ et BA qui coïncident, doivent se confondre (21).

Fig. 24.



2° Supposons maintenant BC = B′C′ et CA = C′A′. Portons les deux triangles l'un sur l'autre de manière que C′A′ coïncide avec CA. L'angle A′ étant égal à l'angle A, A′B′ prendra alors la direction AB et le point B′ tombera au point B; car les obliques égales BC et B′C′ doivent s'écarter également de la perpendiculaire CA.

THÉORÈME.

48. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points du plan qui sont intérieurement à égale distance des côtés de l'angle* (*fig.* 25).

Soit l'angle BAC et soit AD sa bissectrice. Prenons un point O quelconque sur cette bissectrice, et abaissons de ce point les perpendiculaires OE et OF sur les côtés AB et AC. Les

deux triangles rectangles AOE, AOF, seront égaux (47, 1°), et l'on en déduira OE = OF : donc tous les points de la bissectrice sont également distants des côtés de l'angle.

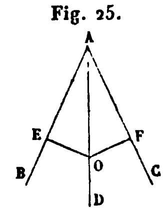


Fig. 25.

Supposons maintenant que le point O soit un point du plan tel que les perpendiculaires OE et OF abaissées de ce point sur les côtés de l'angle soient égales. En joignant AO, on formera deux triangles rectangles AOE, AOF, qui seront égaux (47, 2°). On en déduira l'égalité des angles EAO, FAO, c'est-à-dire que AO se confondra avec la bissectrice de l'angle BAC : donc tous les points également distants des côtés de l'angle sont sur la bissectrice.

La bissectrice de l'angle est donc bien le lieu géométrique indiqué.

49. Quand on veut établir la réalité d'un lieu géométrique, il faut toujours employer une double démonstration, composée d'une proposition directe et de sa contraire ou bien de cette proposition directe et de sa réciproque (9).

Ainsi, on doit prouver que tout point du lieu supposé jouit de la propriété énoncée et que tout point pris hors de ce lieu n'en jouit pas (c'est la marche que nous avons suivie au n° 45), ou bien on doit prouver que tout point du lieu supposé jouit de la propriété énoncée et que tout point jouissant de cette propriété appartient nécessairement à ce lieu (c'est la marche que nous avons suivie au n° 48).

L'équivalence des deux procédés tient à ce que la proposition directe, la proposition contraire et la proposition réciproque sont liées de telle sorte, que la première et l'une des deux autres entraînent la troisième. De même, l'existence de la proposition directe et de sa réciproque entraîne celle des deux propositions contraires.

V. — Des parallèles.

50. Lorsque deux droites *situées dans un même plan* ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge, on dit qu'elles sont *parallèles*.

Deux droites DE, FG, perpendiculaires à une même droite LM (*fig.* 26), sont parallèles, car d'un point pris hors d'une

droite on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur cette droite (21).

Si l'on veut, par le point L, mener une parallèle à la droite FG, on abaissera donc LM perpendiculaire sur FG, et, par le point L, on mènera DE perpendiculaire sur LM.

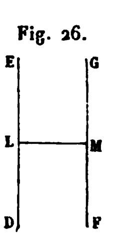


Fig. 26.

Nous admettrons comme évident que, par un point pris hors d'une droite, on ne peut lui mener qu'une parallèle. C'est en cela que consiste réellement le célèbre *postulatum d'*EUCLIDE.

Il en résulte que, *si une droite en rencontre une autre, elle rencontre aussi toutes les parallèles à cette autre.*

De même, *deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

51. *Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Soient les parallèles DE, FG (*fig.* 26). Soit LM perpendiculaire sur FG. Si l'on menait au point L une perpendiculaire à LM, cette perpendiculaire serait parallèle à FG : elle se confondra donc nécessairement avec la parallèle DE (50).

52. Lorsqu'une sécante rencontre deux droites quelconques, elle forme avec ces deux droites huit angles auxquels on a donné des noms particuliers.

Soient les deux droites AB, CD, et la sécante EF qui les rencontre en G et en H (*fig.* 27) : quatre angles seront formés autour du point G, quatre autour du point H.

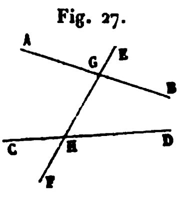


Fig. 27.

Les angles compris entre les droites AB et CD sont des angles *internes ;* les angles extérieurs à ces droites sont des angles *externes.*

Les angles internes non adjacents, situés de part et d'autre de la sécante, sont des angles *alternes-internes,* par exemple les angles AGH, DHG.

Les angles externes non adjacents, situés de part et d'autre de la sécante, sont des angles *alternes-externes,* par exemple les angles AGE, DHF.

Deux angles situés d'un même côté de la sécante, l'un interne, l'autre externe, mais non adjacents, sont des angles

internes-externes ou *correspondants*, par exemple les angles BGH, DHF.

Les angles tels que BGH, DHG, sont des angles *internes d'un même côté;* les angles tels que BGE, DHF, sont des angles *externes d'un même côté.*

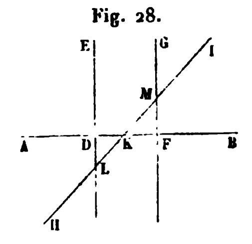
Lorsque les deux droites AB et CD sont parallèles, les angles formés par ces droites avec la sécante EF jouissent de propriétés importantes.

THÉORÈME.

53. *Lorsque deux parallèles sont rencontrées par une sécante, les quatre angles aigus formés sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus* (*fig.* 28).

Soient L et M les points d'intersection de la sécante IH avec les parallèles ED et GF. Par le point K, *milieu* de LM, menons AB perpendiculaire sur ED et sur GF (51). Les deux triangles rectangles KDL, KFM, sont égaux (47, 1°) : il en résulte l'égalité des angles KLD, KMF. Par conséquent, les angles aigus en L étant égaux comme opposés par le sommet, ainsi que les angles aigus en M, les quatre angles aigus formés autour des points L et M sont égaux entre eux. Les quatre angles obtus formés autour des mêmes points sont aussi égaux entre eux, comme suppléments des angles aigus.

Fig. 28.



Si nous remarquons maintenant que deux angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondants, sont à la fois aigus ou obtus, tandis que deux angles internes d'un même côté ou externes d'un même côté sont l'un aigu et l'autre obtus, nous pourrons dire que, *lorsque deux parallèles sont rencontrées par une sécante :*

1° *Les angles alternes-internes, les angles alternes-externes, les angles correspondants, sont égaux ;*

2° *Les angles internes d'un même côté, les angles externes d'un même côté, sont supplémentaires.*

54. La *réciproque* de cette proposition est vraie.

Supposons, par exemple (*fig.* 28), que les angles alternes-internes ELM, LMF, soient égaux; les droites ED et GF seront parallèles. En effet, si l'on menait par le point L une parallèle

à GF, elle ferait avec LM un angle égal à l'angle LMF : la droite ED, remplissant déjà cette condition, n'est autre que la parallèle indiquée.

On démontrerait d'une manière identique les autres parties de la réciproque.

55. Les propositions contraires des deux précédentes sont vraies (9, 49). En particulier, *lorsque deux droites font avec une sécante deux angles internes d'un même côté dont la somme est différente de deux angles droits, elles se rencontrent du côté où cette somme est moindre.* Ainsi, *une perpendiculaire et une oblique à une même droite se rencontrent toujours, lorsqu'on les suppose suffisamment prolongées du côté où l'oblique fait avec la sécante le plus petit angle intérieur.*

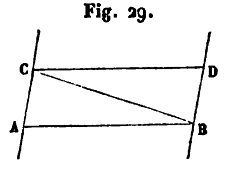
C'est là le *postulatum* sur lequel Euclide fonde directement la théorie des parallèles. Nous avons remplacé la *demande* d'Euclide par celle-ci : *Par un même point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite* (50).

THÉORÈME.

56. *Les portions de parallèles comprises entre deux droites parallèles sont égales* (*fig.* 29).

Soient les parallèles AC et BD coupées par les parallèles AB et CD. Joignons les points C et B. Les deux triangles ACB et CBD seront égaux d'après le premier cas d'égalité (30) : on en déduit AC = BD; on a de même AB = CD.

Fig. 29.



Si les droites AC et BD étaient perpendiculaires aux droites AB et CD, elles seraient toujours parallèles ; mais elles mesureraient alors les distances de deux points quelconques de la droite AB à sa parallèle CD : il en résulte que *deux droites parallèles sont partout également distantes.*

THÉORÈME.

57. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 30).

Soient d'abord les angles ABC, DEF, qui ont leurs côtés pa-

rallèles et dirigés dans le même sens. Prolongeons DE jusqu'en H. Si l'on considère les parallèles AB, DH, et la sécante BC, les angles ABC et DHC sont égaux comme correspondants (53). Si l'on considère les parallèles EF, HC, et la sécante DH, les angles DHC et DEF sont égaux comme correspondants. Il en résulte l'égalité des angles ABC et DEF.

Fig. 30.

Soient maintenant les angles ABC et IEH, qui ont leurs côtés parallèles, mais dirigés en sens contraires. Ces deux angles sont encore égaux, puisqu'en prolongeant les côtés de l'angle IEH (22) on obtient l'angle DEF égal à l'angle ABC.

Soient enfin les angles ABC et DEI : les deux côtés AB et DE sont parallèles et dirigés dans le même sens, les deux côtés BC et EI sont parallèles et dirigés en sens contraires. L'angle DEI, étant le supplément de l'angle DEF, est aussi le supplément de l'angle égal ABC.

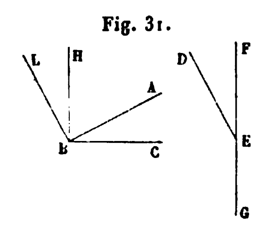
En résumé, *lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles, ils sont égaux lorsque ces côtés sont dirigés dans le même sens ou en sens contraires; ils sont supplémentaires, lorsqu'en les comparant on trouve deux côtés dirigés dans le même sens et deux côtés dirigés en sens contraires.*

COROLLAIRE.

58. *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires.*

Soient les deux angles de même espèce ABC et DEF (*fig.* 31) : AB est perpendiculaire à DE, BC est perpendiculaire à EF. Par le point B, menons BL perpendiculaire à AB : BL sera parallèle à DE (50); par le point B, menons BH perpendiculaire à BC, c'est-à-dire parallèle à EF. Les deux angles LBH et DEF seront égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Mais les deux angles LBH et ABC sont égaux comme compléments du même angle HBA : les deux angles ABC et DEF sont donc égaux.

Fig. 31.



Si l'on avait considéré l'angle DEG d'espèce différente, il

aurait été le supplément de l'angle DEF, et par suite de l'angle ABC.

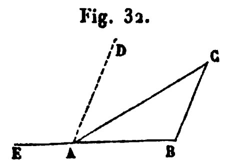
En résumé, *deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires, suivant qu'ils sont ensemble aigus ou obtus, ou bien que l'un est aigu et l'autre obtus.*

THÉORÈME.

59. *La somme des angles d'un triangle est toujours égale à deux angles droits (fig. 32).*

Soit le triangle ABC. Prolongeons le côté AB suivant AE, et menons AD parallèle à BC. Considérons les trois angles formés autour du point A et au-dessus de la droite BE : la somme de ces trois angles est égale à deux angles droits (17). Le premier de ces angles est l'angle CAB du triangle; le second DAC est égal à l'angle C du triangle, car ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles BC et AD et à la sécante AC; le troisième angle DAE est égal à l'angle B du triangle, car ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles coupées par la sécante BE. La somme des angles du triangle est donc bien égale à deux angles droits.

Fig. 32.



COROLLAIRES.

60. L'angle CAE formé par le côté AC et le prolongement AE du côté AB s'appelle angle *extérieur* du triangle ABC.

Un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.

Il en résulte que *deux parallèles forment un angle nul.*

Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus.

Dans un triangle rectangle, les deux anglès aigus sont complémentaires.

Dans un triangle équilatéral, chaque angle vaut deux tiers d'angle droit.

Dans un triangle isocèle, la valeur d'un angle étant donnée, on connaît les deux autres angles.

Deux triangles sont équiangles chacun à chacun lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun, que ces angles soient ou non adjacents au côté égal (30, 1°).

VI. — Des polygones et, en particulier, des quadrilatères.

61. Toute ligne brisée qui se ferme d'elle-même est un *polygone*. Les différents côtés de la ligne brisée sont les *côtés* du polygone; les angles consécutifs formés par ces côtés et les sommets de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone. En joignant deux sommets non consécutifs, on a une *diagonale* du polygone. L'ensemble des côtés du polygone constitue son *contour* ou son *périmètre*.

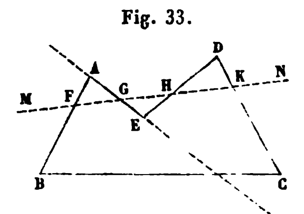
Un polygone de trois côtés est un *triangle*. Celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère;* celui de cinq côtés s'appelle *pentagone;* celui de six s'appelle *hexagone*, celui de sept *heptagone*, celui de huit *octogone*, celui de neuf *ennéagone*, celui de dix *décagone*, celui de douze *dodécagone*, celui de quinze *pentédécagone*.

62. Un polygone est *convexe* lorsqu'il tombe tout entier d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés indéfiniment prolongés. Il est *concave* dans le cas contraire.

Une droite quelconque ne peut couper le périmètre d'un polygone convexe en plus de deux points.

En effet, si la droite MN (*fig.* 33) rencontre le polygone ABCDE en trois points F, G, H, les points F et H se trouvant de part et d'autre du côté AE, le polygone considéré n'est pas tout entier d'un même côté par rapport à AE prolongé : il n'est donc pas convexe.

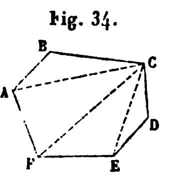
Fig. 33.



THÉORÈME.

63. *La somme des angles d'un polygone convexe est toujours égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux* (*fig.* 34).

Soit le polygone ABCDEF. En menant toutes les diagonales qui partent du sommet C, on le partage en triangles. Chacun de ces triangles emploie un côté du polygone, sauf les deux triangles extrêmes, qui en emploient deux. Si n est le nombre des côtés du polygone, le nombre des triangles sera donc représenté par $n-2$. La somme des angles de tous les triangles est précisément la somme des angles du polygone, et la somme des angles de chaque triangle est égale à deux angles droits (59). La somme des angles du polygone est donc, en prenant l'angle droit pour unité,



$$2(n-2) \quad \text{ou} \quad 2n-4.$$

COROLLAIRES.

64. Si l'on fait dans cette formule $n=4$, on trouve 4 pour la somme cherchée. *La somme des angles d'un quadrilatère est donc égale à quatre angles droits.*

65. *La somme des angles qu'on forme à l'extérieur d'un polygone, en prolongeant successivement ses côtés dans le même sens, est toujours égale à quatre angles droits;* car la somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs est égale à $2n$ angles droits, en désignant par n le nombre des sommets ou des côtés du polygone convexe considéré.

Il en résulte qu'un polygone convexe ne peut pas avoir plus de trois angles intérieurs qui soient aigus, sans quoi il aurait plus de trois angles extérieurs obtus.

THÉORÈME.

66. *Deux polygones de même espèce sont égaux lorsque toutes leurs parties disposées dans le même ordre sont égales, à l'exception de deux côtés consécutifs et de l'angle qu'ils forment* (*fig.* 35).

Soient les deux hexagones ABCDEF, A'B'C'D'E'F'. On suppose égaux les angles A et A', B et B', C et C', D et D', E et E', ainsi que les côtés AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D', DE et D'E'. Portons les deux polygones l'un sur l'autre de manière que les angles A et A' coïncident : A'F' prendra la direction de AF, A'B' et AB se confondront. L'angle B étant égal à

l'angle B', le côté B'C' prendra alors la direction du côté BC, et, comme il lui est égal, les sommets C' et C se confondront.

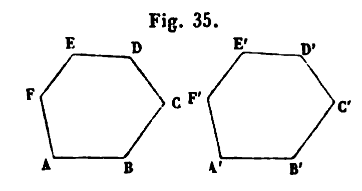


Fig. 35.

Il en sera de même des sommets D et D', E et E'. L'angle E' étant égal à l'angle E, le côté E'F' prendra la direction du côté EF, et le sommet F', devant se trouver à la fois sur les côtés EF et AF, tombera à leur intersection F. Les deux polygones, ayant mêmes sommets, se recouvriront exactement et seront égaux.

On voit que, si les polygones considérés ont n côtés, il faut, pour être égaux, qu'ils aient $n - 1$ angles égaux et $n - 2$ côtés égaux. Les conditions nécessaires pour l'égalité des deux polygones considérés sont donc au nombre de $2n - 3$.

67. Parmi les quadrilatères, on distingue :

Le *parallélogramme*, dont les côtés opposés sont parallèles; le *rectangle*, dont les angles sont droits; le *losange*, dont les côtés sont égaux; le *carré*, dont les côtés et les angles sont égaux; le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles.

THÉORÈME.

68. *Dans tout parallélogramme, les côtés et les angles opposés sont égaux.*

Les angles opposés sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraires (57). Les côtés opposés sont égaux comme portions de parallèles comprises entre parallèles (56).

69. Réciproquement, *tout quadrilatère dans lequel les angles opposés ou les côtés opposés sont égaux est un parallélogramme* (*fig.* 36).

Supposons d'abord les angles opposés égaux. De $A = C$ et

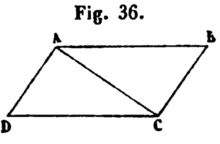


Fig. 36.

$B = D$, on conclut $A + B = C + D$. Les deux angles A et B valent donc ensemble la moitié de la somme des angles du quadrilatère ou deux droits (64) : ils sont donc supplémentaires. Par suite, comme ils sont internes d'un même côté par rapport aux

droites AD, BC, et à la sécante AB, les droites AD et BC sont parallèles (54). On prouverait de même que les droites AB et DC sont parallèles. La figure ABCD est donc bien un parallélogramme.

Supposons maintenant qu'on ait AB = DC et AD = BC. Les deux triangles ADB, DBC, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles ADB et DBC sont donc égaux, et, comme ils sont alternes-internes par rapport aux droites AD, BC, et à la sécante DB, les droites AD et BC sont parallèles. L'égalité des angles ABD, BDC, entraîne de même le parallélisme des droites AB et DC. Le quadrilatère considéré est encore un parallélogramme.

70. *Tout quadrilatère dans lequel deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles est un parallélogramme* (*fig.* 36).

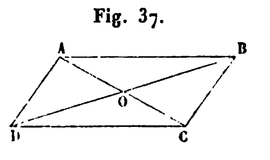
Si l'on a AD égal et parallèle à BC, les deux triangles ADB, DBC, sont égaux d'après le premier cas d'égalité (30), car DB est commun et les angles ADB, DBC, sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AD et BC et à la sécante DB. Il en résulte AB = DC. La figure ABCD est donc un parallélogramme (69).

THÉORÈME.

71. *Les diagonales d'un parallélogramme sont inégales et se divisent mutuellement en parties égales* (*fig.* 37).

Les triangles AOB, DOC, sont égaux d'après le second cas d'égalité (30), car les côtés AB et DC sont égaux (68), et les angles ABO et ODC, BAO et OCD, le sont aussi comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par les sécantes BD et AC. On en conclut AO = OC et OB = OD.

Fig. 37.



Les diagonales AC et BD sont d'ailleurs inégales, car les deux triangles ADC et BCD ont le côté DC commun ; le côté AD est égal au côté BC; mais l'angle ADC est plus petit que l'angle BCD, puisque, ces angles étant supplémentaires (53), si l'un est aigu, l'autre est obtus. Donc la diagonale AC est plus petite que la diagonale BD (38).

72. Réciproquement, *lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en parties égales, ce quadrilatère est un parallélogramme* (*fig.* 37).

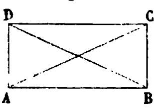
Cette réciproque est immédiatement démontrée par l'égalité des triangles AOB, DOC, et celle des triangles AOD, BOC (69).

73. Le point O (*fig.* 37) où se coupent les diagonales d'un parallélogramme est le *centre* du quadrilatère. Toute droite limitée de part et d'autre au parallélogramme et passant par le centre y est divisée en deux parties égales et partage le parallélogramme en deux trapèzes égaux (66).

COROLLAIRES.

74. *Lorsque dans un parallélogramme l'un des angles est droit, tous les autres le sont, et le quadrilatère est un rectangle* (*fig.* 38).

Fig. 38.



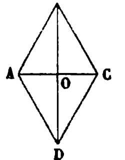
Si l'angle A est droit, l'angle opposé C l'est aussi (68); les angles B et D sont alors droits comme suppléments d'angles droits.

75. *Dans un rectangle, les diagonales sont égales;* car les triangles rectangles ABC, BAD, sont égaux.

Réciproquement, *tout parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle* (74).

76. *Un losange est un parallélogramme* (*fig.* 39); car, les quatre côtés étant égaux, les côtés opposés le sont deux à deux (69).

Fig. 39.



Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles opposés.

En effet, la diagonale AC est perpendiculaire sur le milieu de DB, puisque les points A et C sont également distants des points D et B. La diagonale DB est perpendiculaire sur le milieu de AC, puisque les points D et B sont également distants des points A et C (46).

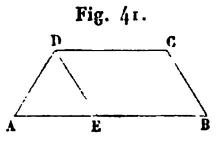
Les triangles BAD, BCD, étant isocèles, AC est alors la bissectrice commune des angles A et C (27). Pour une raison analogue, BD est la bissectrice des angles B et D.

77. *Le carré réunit les propriétés du rectangle et du losange* (*fig.* 40) : ses diagonales sont donc égales, perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles opposés.

Fig. 40.

78. Parmi les trapèzes, on considère les trapèzes *rectangles*, dans lesquels un côté est perpendiculaire aux deux côtés parallèles, et les trapèzes *isocèles* ou *symétriques*, dans lesquels les deux côtés non parallèles sont égaux (*fig.* 41).

Fig. 41.



Dans un trapèze isocèle, les angles formés par les côtés parallèles avec les deux autres côtés sont égaux. Menons DE parallèle à CB : la figure DCBE est un parallélogramme, et l'on a DE = CB. Puisque DA = CB par hypothèse, le triangle ADE est isocèle : l'angle A est donc égal à l'angle DEA et, par suite, à l'angle B (53). Les angles D et C sont alors égaux comme suppléments d'angles égaux.

79. *Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; deux rectangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés adjacents égaux chacun à chacun; deux losanges sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et un angle égal; deux carrés sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal* (66).

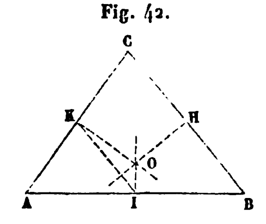
VII. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

80. *Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés concourent en un même point* (*fig.* 42).

Les perpendiculaires IO et KO élevées sur les milieux des côtés AB et AC se coupent en un point O, car, si l'on joint IK, la somme des angles KIO et IKO est moindre que deux droits (55).

Fig. 42.



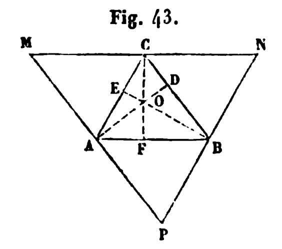
Cela posé, le point O, étant à égale distance des points A et B et des points A et C (45), est à égale distance des points B et C et appartient, par conséquent, à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

COROLLAIRE.

81. *Dans tout triangle, les trois hauteurs concourent en un même point* (*fig.* 43).

Les *hauteurs* d'un triangle sont les perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés, considérés alors comme *bases*.

Soient le triangle ABC et ses trois hauteurs AD, BE, CF. Par les sommets A, B, C, menons respectivement des parallèles aux côtés opposés du triangle donné; elles formeront un triangle MNP dont les côtés auront pour milieux les sommets du premier triangle. Ainsi, les parallèles comprises entre parallèles étant égales (56), on a AB = CM = CN, c'est-à-dire que le sommet C est le milieu du côté MN, etc.

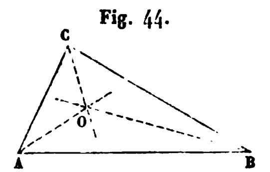


Deux parallèles ayant leurs perpendiculaires communes (51), les hauteurs du triangle ABC sont alors les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle MNP : elles concourent donc en un même point (80).

THÉORÈME.

82. *Dans tout triangle, les bissectrices des trois angles concourent en un même point* (*fig.* 44).

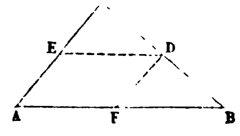
Les bissectrices des angles A et B se coupent en un point O, parce que la somme de deux angles d'un triangle est moindre que deux droits (59, 55). Mais le point O, étant à égale distance des côtés AB et AC (48) aussi bien que des côtés AB et BC, est à égale distance des côtés AC et BC, et appartient, par conséquent, à la bissectrice du troisième angle C du triangle.



On démontrerait de la même manière que les bissectrices de deux angles *extérieurs* d'un triangle (60) se coupent sur la bissectrice de l'angle intérieur qui n'est adjacent à aucun de ces deux angles.

LEMME.

83. *La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié* (*fig.* 45).



Comme deux points déterminent une droite (4), et que par un point donné on ne peut mener qu'une parallèle à une droite (50), nous établirons cette proposition en démontrant que, *si par le milieu* D *du côté* BC *du triangle* ABC *on mène* DE *parallèle à* AB, *le point* E *est le milieu du côté* AC

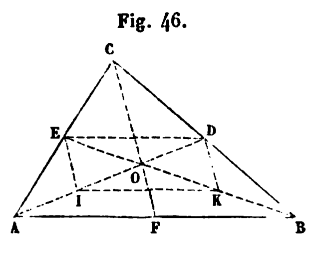
En effet, traçons en outre DF parallèle à AC. La figure AEDF est un parallélogramme (67), et l'on a (68) DF = EA, DE = FA. Les deux triangles égaux CED et DFB (30, 1°) donnent ensuite DF = CE et DE = BF. Il en résulte CE = EA et $DE = \frac{AB}{2}$.

THÉORÈME.

84. *Dans tout triangle, les trois médianes se rencontrent en un même point, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé* (*fig.* 46).

Menons les médianes AD, BE, CF, du triangle ABC. Les deux premières se coupent au point O, parce que la somme des deux angles d'un triangle est moindre que deux droits. Joignons d'une part les points D et E et, d'autre part, les milieux I et K des segments AO et BO. On a alors, d'après le lemme précédent, $ED = IK = \frac{AB}{2}$. De plus, les deux droites ED et IK, parallèles à AB, sont parallèles entre elles (50).

Fig. 46.



La figure EIKD est alors un parallélogramme (70), dont les diagonales se coupent en parties égales. Le point O, milieu de ID, est donc au tiers de AD; il est de même au tiers de BE.

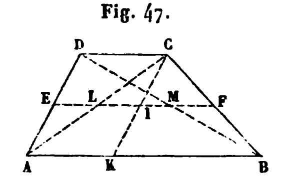
Le point de rencontre de deux médianes quelconques étant au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé, les trois médianes du triangle se rencontrent en un même point situé comme on vient de le dire.

THÉORÈME.

85. *Dans tout trapèze, la droite qui joint les milieux des deux côtés non parallèles est parallèle aux deux autres côtés et égale à leur demi-somme; les diagonales du trapèze interceptent sur cette même droite une longueur égale à la demi-différence des mêmes côtés* (*fig.* 47).

Soit le trapèze ABCD, dont les côtés non parallèles sont AD et BC. Par le point F, milieu de BC, menons FE parallèle à AB et par conséquent à CD (50); par le point C, menons CK parallèle à AD, et appelons I le point de rencontre de CK et de FE.

Fig. 47.



Le point I est alors le milieu de CK (83). Les deux figures CIED, IKAE, étant des parallélogrammes, on a CI = DE, IK = EA, c'est-à-dire que le point E est le milieu de AD, en même temps, IE = KA = CD.

Cela posé, on a (83)

$$FE = FI + IE = \frac{KB}{2} + CD = \frac{AB - CD}{2} + CD$$

ou

$$FE = \frac{AB + CD}{2}.$$

Si l'on considère maintenant les deux diagonales AC et BD, qui rencontrent la droite FE en L et en M, le triangle ACB montre que le point L est le milieu de AC et le triangle CBD montre que le point M est le milieu de BD. On a donc

$$LF = \frac{AB}{2}, \quad MF = \frac{CD}{2},$$

d'où, par soustraction,

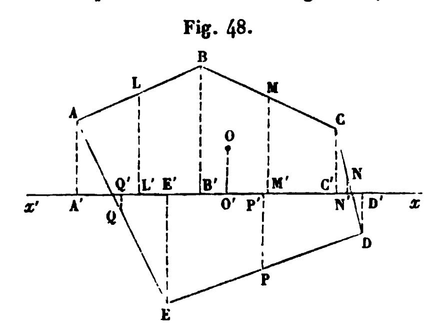
$$LM = \frac{AB - CD}{2}.$$

THÉORÈME.

86. *Étant donnée une série de points dans un plan, il existe toujours dans ce plan un point déterminé dont la distance à une droite quelconque du plan prise comme axe est la moyenne arithmétique des distances des points donnés au même axe.*

Pour que le théorème soit général, il faut affecter de signes contraires les distances des points donnés à l'axe choisi lorsque ces points tombent de côtés différents par rapport à l'axe. Nous regarderons comme *positives* les distances comptées *au-dessus* de l'axe et comme *négatives* les distances comptées *au-dessous*.

Fig. 48.



Soient (*fig.* 48) les points A, B, C, D, E, qui forment un contour polygonal. Prenons les milieux L, M, N, P, Q, des côtés de ce contour, et abaissons de tous les points indiqués des perpendiculaires AA', BB', ..., LL', MM', ..., sur l'axe xx'.

Les trapèzes consécutifs ainsi formés donnent évidemment (85)

$$LL' = \frac{AA' + BB'}{2}, \quad MM' = \frac{BB' + CC'}{2}, \quad NN' = \frac{CC' - DD'}{2},$$

$$-PP' = -\frac{DD' + EE'}{2}, \quad -QQ' = -\frac{EE' - AA'}{2}.$$

En ajoutant toutes ces égalités membre à membre, il vient

$$LL' + MM' + NN' - PP' - QQ' = AA' + BB' + CC' - DD' - EE'.$$

Le périmètre du nouveau contour polygonal formé par les points milieux des côtés du contour précédent est d'ailleurs toujours moindre que le périmètre de celui-ci. On a, en effet (35),

$$LM < LB + BM, \quad MN < MC + CN, \quad NP < ND + DP, \quad \ldots.$$

On voit par là que, si, partant du polygone donné ABCDE, on imagine successivement de nouveaux polygones, ayant pour sommets les milieux des côtés du polygone précédent, leurs périmètres iront toujours en diminuant, tandis que la somme algébrique des distances de leurs sommets à l'axe xx' restera invariable. Remarquons en même temps que, pour la série des polygones construits de cette manière, les pieds des perpendiculaires extrêmes (AA' et DD', QQ' et NN', ...) se rapprocheront indéfiniment.

A la limite, on pourra donc regarder le dernier polygone de la série comme ayant ses sommets réunis en un seul point O, dont la distance OO' à l'axe xx' devra être attribuée à chacun des sommets ainsi confondus. On aura alors

$$5\,OO' = AA' + BB' + CC' - DD' - EE'$$

ou

$$OO' = \frac{AA' + BB' + CC' - DD' - EE'}{5}.$$

Le point O porte le nom de *centre des moyennes distances* (¹) des points donnés à l'axe xx'.

COROLLAIRES.

87. Désignons par Y la distance OO', par y l'une quelconque des distances AA', BB', CC', ... Si le nombre des points considérés est égal à m, on peut écrire symboliquement

$$Y = \frac{\Sigma y}{m}.$$

Il est entendu que Σy est une somme algébrique.

Les deux conditions $Y = 0$ et $\Sigma y = 0$ s'entraînent mutuellement. Toute droite passant par le centre des moyennes distances satisfait donc à la condition $\Sigma y = 0$, et réciproquement. Une pareille droite est, pour les points considérés, un *axe des moyennes distances*.

(¹) *Voir* la *Théorie du centre des moyennes distances*, présentée d'une manière plus générale dans l'Ouvrage déjà cité : TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4ᵉ édition (1879).

Dans un triangle, le centre des moyennes distances des trois sommets se confond avec le point de rencontre des médianes; car chacune de ces droites est, par rapport aux trois sommets, un axe des moyennes distances, puisqu'elle satisfait évidemment pour ces points à la condition $\Sigma y = 0$.

De même, *dans un quadrilatère quelconque, le centre des moyennes distances est au point de rencontre des deux médianes* (en appelant ainsi les droites qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrilatère); car chacune de ces droites est évidemment, pour les quatre sommets, un axe des moyennes distances.

CHAPITRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — **Des arcs et des cordes.**

88. La *circonférence de cercle* est le lieu géométrique de tous les points d'un plan à égale distance d'un point intérieur nommé *centre*. C'est là seule ligne courbe que l'on considère dans les éléments.

La portion de surface plane limitée par la circonférence s'appelle *cercle*.

Toute ligne menée du centre à la circonférence est un *rayon* : tous les rayons sont égaux. On désigne une circonférence par son rayon. Un point est *intérieur* ou *extérieur* à la circonférence suivant que sa distance au centre est *plus petite* ou *plus grande* que le rayon.

On appelle *arc* une portion quelconque de la circonférence : la *corde* d'un arc est la droite qui joint les extrémités de cet arc. A chaque corde correspondent deux arcs dont la somme constitue la circonférence : on ne s'occupe ordinairement que du plus petit de ces deux arcs.

Deux arcs de même rayon sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux arcs de même rayon, on les porte à la suite l'un de l'autre sur la circonférence correspondante : l'arc compris entre leurs extrémités non communes représente leur somme.

Toute corde passant par le centre est un *diamètre* : tous les diamètres sont égaux, puisqu'ils équivalent à deux fois le rayon.

La circonférence est une courbe *convexe*, c'est-à-dire qu'elle ne peut être coupée par une droite en plus de deux points. S'il en était autrement, on pourrait mener du centre à une même droite trois droites égales, ce qui est inadmissible. En

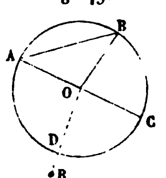
effet, *d'un point à une droite on ne peut mener plus de deux obliques égales* (41, 44).

THÉORÈME.

89. *La plus grande corde qu'on puisse mener dans une circonférence est un diamètre; tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales* (*fig.* 49).

Soit la corde AB; menons par le point A le diamètre AC et joignons le centre O au point B. Le triangle AOB donne

Fig. 49.



$$AB < AO + OB \quad \text{ou} \quad AB < AC.$$

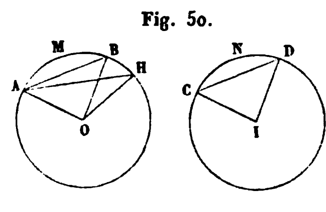
Si l'on plie maintenant la figure le long du diamètre AC pour rabattre la partie supérieure du cercle sur sa partie inférieure, les deux portions de circonférence déterminées par le diamètre AC se recouvriront complètement. S'il n'en était pas ainsi, si le point B, par exemple, tombait en B_1, les rayons OD et OB_1 seraient inégaux, de sorte qu'il y aurait des points de la circonférence inégalement éloignés du centre.

THÉORÈME.

90. *Dans le même cercle ou dans des cercles de rayons égaux, à des arcs égaux correspondent des cordes égales* (*fig.* 50).

Soient les deux cercles de rayons égaux OA et IC; ces deux cercles coïncideront nécessairement si l'on fait coïncider leurs centres. On peut les faire coïncider de manière que le point C tombe au point A. Si l'on suppose alors que l'arc CD soit égal à l'arc AB, le point D tombera au point B. Les deux cordes CD et AB coïncideront donc et seront égales.

Fig. 50.



THÉORÈME.

91. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, à un plus grand arc correspond une plus grande corde.*

Il est bien entendu que l'on considère toujours des arcs plus petits qu'une demi-circonférence.

Soient le cercle IC égal au cercle OA et l'arc AH plus grand que l'arc CD (*fig.* 50); la corde AH sera plus grande que la corde CD.

Prenons l'arc AB égal à l'arc CD; la corde AB sera égale à la corde CD (90), et la question sera ramenée à comparer les deux cordes AH et AB. Joignons OB; le rayon OB se trouvera nécessairement dans l'angle AOH, puisque le point B doit se trouver entre les points A et H. L'angle AOB sera donc plus petit que l'angle AOH. Si l'on compare alors les deux triangles AOB et AOH qui ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux, on en conclura immédiatement AH > AB (38).

92. Les *réciproques* des deux propositions précédentes sont évidentes (40).

On voit qu'il existe entre deux cordes la même relation qu'entre les arcs qu'elles sous-tendent, pourvu que ces arcs soient plus petits qu'une demi-circonférence. Si l'on considérait des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, la corde serait d'autant plus petite au contraire que l'arc serait plus grand.

Fig. 51.

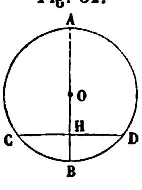
Il est évident d'ailleurs que *le rapport de deux arcs n'est pas égal à celui de leurs cordes.* Si l'arc AB est double de l'arc AC, la corde AB est plus petite que AC + CB, c'est-à-dire plus petite que le double de la corde AC (*fig.* 51).

II. — Perpendiculaires et parallèles dans le cercle.

THÉORÈME.

93. *Le diamètre perpendiculaire à une corde divise en deux parties égales cette corde et les arcs qu'elle sous-tend* (*fig.* 52).

Fig. 52.



Soient la corde CD et le diamètre AB qui lui est perpendiculaire; plions la figure le long du diamètre AB. Le point D tombera sur HC, puisque, les angles en H étant droits, HD prend la direction de HC; le point D tombera aussi sur la demi-circonférence ACB: il tombera donc au point C. HD étant égal à HC, le point H est le milieu de la corde CD. L'arc BD coïnci-

dant avec l'arc BC et l'arc AD coïncidant avec l'arc AC, les points B et A sont les milieux des arcs sous-tendus par la corde CD.

Le diamètre AB remplit *cinq* conditions : il passe par le centre, il est perpendiculaire sur la corde CD, il passe par son milieu et par les milieux des arcs qu'elle détermine. Deux de ces conditions suffisant pour déterminer une droite (4, 15, 21), dès qu'une droite remplira deux des cinq conditions énoncées, elle remplira forcément les trois autres.

Le lieu géométrique des points milieux d'un système de cordes parallèles est évidemment *le diamètre mené perpendiculairement à leur direction.*

THÉORÈME.

94. *Deux cordes égales sont également éloignées du centre, et, de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre* (*fig.* 53).

Soient les deux cordes égales AB et CD. Abaissons du centre sur ces cordes les perpendiculaires OE et OF. Les points E et F seront les milieux des deux cordes (93). Les deux triangles rectangles EOB, FOC, seront donc égaux (47, 2°), et l'on aura OE = OF.

Fig. 53.

Prenons maintenant un arc AG plus petit que l'arc AB; la corde AG sera plus petite que la corde AB (91). La perpendiculaire OH abaissée du centre sur la corde AG coupera nécessairement la corde AB au point I, car les points O et H sont de côtés différents par rapport à AB. On aura donc OI < OH. OI étant une oblique à AB, on aura à plus forte raison OE < OH.

La *réciproque* de cette proposition est évidente, c'est-à-dire que les distances des cordes au centre ont entre elles la même relation *inverse* que les longueurs des cordes elles-mêmes, sauf dans le cas d'égalité.

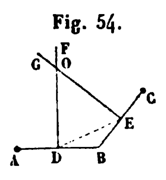
THÉORÈME.

95. *Trois points non en ligne droite déterminent une circonférence* (*fig.* 54).

Soient les trois points A, B, C, non situés en ligne droite. Menons les droites AB et BC. Élevons DF perpendiculaire sur le milieu de AB, EG perpendiculaire sur le milieu de BC. Ces

deux perpendiculaires se rencontreront en un point O; car, si l'on joint DE, la somme des angles internes d'un même côté ODE et OED est inférieure à deux angles droits. Le point O, étant à la fois également distant des points A et B et des points B et C, est à égale distance des trois points A, B, C. Par suite, si du point O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence, elle passe par les trois points donnés. Et comme il n'y a qu'un point O à égale distance des points A, B, C, il n'y a aussi qu'une circonférence passant par ces points.

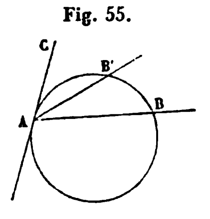
Fig. 54.



D'après ce théorème, *trois points non en ligne droite suffisant pour déterminer une circonférence, dès que deux circonférences ont trois points communs* (88), *elles coïncident.*

96. Lorsqu'une droite AB rencontre une circonférence en deux points A et B (*fig.* 55), on dit qu'elle est *sécante* à cette circonférence. Si la sécante AB tourne autour du point A pour venir prendre une position telle que AB′, le second point d'intersection se rapproche du premier. Il arrive un moment où, la sécante venant en AC, *les deux points d'intersection* B *et* A *se réunissent en un seul.* On dit alors que la droite AC est *tangente* à la circonférence au point A, qu'on appelle *point de contact.* La circonférence étant une courbe *convexe* (88), la tangente AC ne peut avoir qu'un point commun avec elle; elle la *touche* en ce point. *On peut donc définir la tangente à la circonférence une droite qui n'a qu'un point commun avec elle;* mais cette définition, applicable seulement aux courbes convexes, est moins générale que la précédente.

Fig. 55.



THÉORÈME.

97. *Toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence;* réciproquement, *toute tangente à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact* (*fig.* 56).

Soit CD perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Toute droite telle que OB sera oblique par rapport à CD. On aura

donc OB > OA, c'est-à-dire que le point B sera extérieur à l circonférence. Le point B étant quelconque, la droite C n'aura que le point A commun avec la ci conférence; elle lui sera tangente en ce poin

Fig. 56.

Supposons, réciproquement, que la droi CD soit tangente à la circonférence au point A Le point B sera extérieur à la circonférenc et l'on aura OB > OA. Donc OA représente la plus courte distance du centre à la droi CD et sera perpendiculaire sur cette droite.

Il résulte de ce théorème que, *par un point pris sur un circonférence, on peut toujours mener une tangente, mai une seule.*

On voit aussi qu'*une tangente est parallèle au système de cordes que le diamètre mené au point de contact divise en deux parties égales* (93).

THÉORÈME.

98. *Deux parallèles interceptent sur une même circonférence des arcs égaux* (*fig.* 57).

Soient les deux parallèles DE, BC, et soit la tangente FG qui leur est parallèle. Le rayon OA mené au point de contact étant perpendiculaire aux cordes DE, BC, le point A est le milieu des arcs DE et BC, et l'on a arc AD = arc AE, arc AB = arc AC. Il en résulte évidemment arc BD = arc CE.

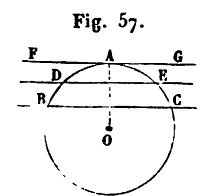


Fig. 57.

Si l'on considérait la tangente parallèle à la tangente FG, cette tangente correspondrait à l'autre extrémité du diamètre qui passe par le point A: les arcs compris entre ces deux tangentes seraient donc des demi-circonférences.

THÉORÈME.

99. *Pour trouver la plus courte ou la plus grande distance d'un point à la circonférence, il faut le joindre au centre* (*fig.* 58).

Soit le point A *extérieur* à la circonférence dont le centre est O. Joignons le point A au centre; en prolongeant AO, on obtient deux points d'intersection B et C. Menons une droite

quelconque AD. Le triangle OAD donne OA < OD + AD. Retranchant de part et d'autre le rayon OB et le rayon OD, il reste AB < AD. On a de même

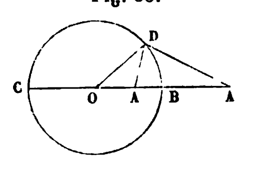


Fig. 58.

$$AO + OD > AD,$$

ce qui revient à AC > AD.

Si le point A est *intérieur* à la circonférence, le triangle OAD donne

$$OD - OA < AD,$$

et, si l'on remplace OD par son égal OB, il vient encore

$$AB < AD.$$

On a de même

$$AD < OA + OD \quad \text{ou} \quad AD < AC.$$

La plus courte distance cherchée est donc AB; la plus grande est AC.

On appelle *normale* à une courbe la perpendiculaire élevée, au point de contact, à une tangente à cette courbe. *Dans le cercle, toutes les normales concourent au centre* (97). La plus courte et la plus grande distance, que nous venons de déterminer, se confondent avec les deux normales qu'on peut mener à la circonférence par le point donné. La *distance* du point A à la circonférence est alors la *normale* AB.

III. — Positions mutuelles de deux circonférences.

THÉORÈME.

100. *Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne qui joint leurs centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.*

Deux circonférences qui ne coïncident pas ne peuvent avoir plus de deux points communs (95) : on dit alors qu'elles sont *sécantes*.

Cela posé, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde commune passe par les centres des deux circonférences (93); elle se confond donc avec la ligne des centres.

101. *Deux circonférences sont tangentes, lorsqu'elles ont en un point commun une tangente commune.*

Considérons deux circonférences sécantes. Si l'une reste fixe, et que l'autre tourne autour de l'un de ses points d'intersection avec la première circonférence, de manière que le second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier, la corde commune devient à la limite (96) une tangente commune aux deux circonférences au point d'intersection invariable. Le point de contact de cette tangente commune est nécessairement sur la ligne des centres dans sa position limite, car les rayons correspondants des deux circonférences ne peuvent former qu'une seule et même droite (15).

102. Deux circonférences ne peuvent occuper que cinq positions différentes l'une par rapport à l'autre. Elles peuvent être *extérieures* l'une à l'autre, *tangentes extérieurement*, *sécantes*, *tangentes intérieurement*, *intérieures* l'une à l'autre.

1° *Lorsque deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons* (*fig.* 59). On a, en effet,

$$OO' = OA + AA' + O'A' \quad \text{ou} \quad OO' > OA + O'A'.$$

2° *Lorsque deux circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons*

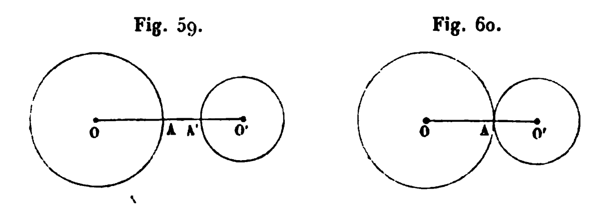


Fig. 59. Fig. 60.

(*fig.* 60). En effet, le point de contact des deux circonférences étant sur la ligne des centres, on a

$$OO' = OA + O'A.$$

3° *Lorsque deux circonférences sont sécantes, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence* (*fig.* 61).

En effet, le triangle OBO' donne

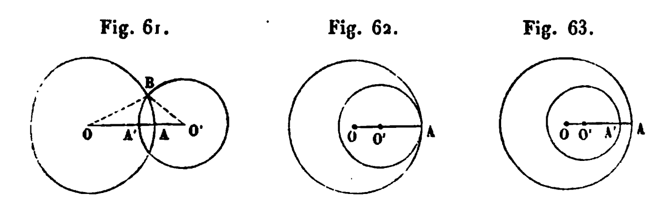
$$OO' < OB + O'B \quad \text{et} \quad OO' > OB - O'B.$$

4° *Lorsque deux circonférences sont tangentes intérieure-*

ment, la distance des centres est égale à la différence des rayons (*fig.* 62). En effet, le point de contact des deux circonférences étant sur la ligne des centres, on a

$$OO' = OA - O'A.$$

5° *Lorsque deux circonférences sont intérieures l'une à*



l'autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons (*fig.* 63). En effet, l'on a

$$OO' = OA - O'A' - AA' \quad \text{ou} \quad OO' < OA - O'A'.$$

Les *réciproques* de ces cinq propositions sont évidentes (40). Par exemple, si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences sont tangentes extérieurement. En effet, si elles occupaient une des quatre autres positions possibles, la distance des centres serait plus grande ou plus petite que la somme des rayons.

IV. — Mesure des angles.

103. Comme nous l'avons déjà dit en Arithmétique, le *rapport* de deux grandeurs est le nombre qui mesure la première, lorsqu'on prend la seconde pour unité.

Lorsque deux grandeurs sont *commensurables*, leur rapport est *commensurable avec l'unité*, c'est-à-dire qu'il est exprimé par un nombre entier ou fractionnaire. Soient deux grandeurs A et B; désignons leur commune mesure par m, et supposons qu'on ait $A = 17m$, $B = 9m$. Le rapport de A à B sera

$$\frac{17m}{9m} \quad \text{ou} \quad \frac{17}{9}.$$

Lorsque deux grandeurs sont *incommensurables*, leur rapport est *incommensurable avec l'unité*, c'est-à-dire qu'il ne

peut être exprimé ni par un nombre entier ni par un nombre fractionnaire. Mais on peut l'obtenir avec telle approximation qu'on veut (11).

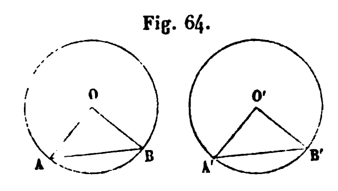
Il est nécessaire de définir ce qu'on doit entendre par *deux rapports incommensurables égaux*. Deux rapports incommensurables sont égaux lorsqu'ils ont la même expression numérique pour le même degré d'approximation, et cela quel que soit le degré d'approximation choisi.

THÉORÈME.

104. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre égaux correspondent à des arcs égaux, et réciproquement* (*fig.* 64).

On appelle *angle au centre* un angle dont le sommet se confond avec le centre de la circonférence considérée. Supposons que l'angle AOB soit égal à l'angle A'O'B', le rayon AO étant égal au rayon A'O'. Les deux triangles AOB, A'O'B', seront égaux d'après le deuxième cas d'égalité. La corde AB étant alors égale à la corde A'B', l'arc AB sera égal à l'arc A'B' (92).

Fig. 64.

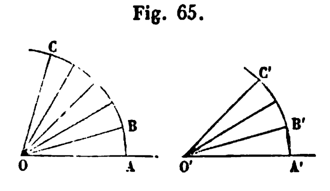


Réciproquement, si l'on suppose l'arc AB égal à l'arc A'B', la corde AB sera égale à la corde A'B', les deux triangles AOB, A'O'B', seront égaux d'après le troisième cas d'égalité, et l'on en conclura l'égalité des angles AOB, A'O'B'.

THÉORÈME.

105. *Le rapport de deux angles quelconques est égal à celui des arcs compris entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centres avec un même rayon* (*fig.* 65).

Fig. 65.



Soient les angles AOC et A'O'C'. Décrivons de leurs sommets comme centres avec un même rayon les arcs AC, A'C'. Supposons d'abord que ces arcs aient une commune mesure contenue 5 fois, par exemple,

dans l'arc AC, et 3 fois dans l'arc A'C'. Nous aurons alors (103)

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}.$$

Joignons aux centres O et O' tous les points de division des arcs AC, A'C'. Nous décomposerons l'angle AOC en 5 angles partiels tels que AOB, et l'angle A'O'C' en 3 angles partiels tels que A'O' B'. Tous ces angles partiels, correspondant à des arcs égaux, seront égaux entre eux (104), et l'un d'eux pourra servir de commune mesure aux angles AOC, A'O'C'. On aura donc

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{5}{3}.$$

Par conséquent, le rapport des deux angles est bien alors égal à celui des deux arcs interceptés.

Supposons maintenant que les deux arcs AC et A'C' n'aient pas de commune mesure. Divisons l'arc A'C' en un certain nombre m de parties égales; désignons par a l'une de ces parties. Nous aurons $A'C' = ma$. Portons a sur AC autant de fois que possible; supposons que AC contienne p fois a, plus un reste r, inférieur à a et nécessairement incommensurable avec a (s'il n'en était pas ainsi, les deux arcs considérés auraient une commune mesure). Nous aurons $AC = pa + r$. Il en résultera

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{pa+r}{ma} = \frac{p}{m} + \frac{r}{ma}.$$

La fraction $\frac{r}{a}$ étant inférieure à 1, la fraction $\frac{r}{ma}$ est inférieure à $\frac{1}{m}$. Par suite, $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{AC}{A'C'}$, avec une approximation marquée par $\frac{1}{m}$.

Si l'on joint aux centres O et O' tous les points de division des arcs AC, A'C', on décomposera l'angle A'O'C' en m angles partiels égaux entre eux (nous désignerons l'un de ces angles par A) et l'angle AOC en p angles partiels égaux à A, plus un angle R inférieur à A. On pourra donc écrire

$$A'O'C' = mA \quad \text{et} \quad AOC = pA + R.$$

Il en résultera

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{pA+R}{mA},$$

c'est-à-dire

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{p}{m} + \frac{R}{mA}.$$

La fraction $\frac{R}{A}$ étant inférieure à 1, la fraction $\frac{R}{mA}$ est inférieure à $\frac{1}{m}$. Par suite, $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{AOC}{A'O'C'}$, avec une approximation marquée par $\frac{1}{m}$.

Pris avec le même degré d'approximation, les deux rapports $\frac{AC}{A'C'}$ et $\frac{AOC}{A'O'C'}$ sont donc égaux, et cela quel que soit le degré d'approximation, puisque la valeur de m est complètement arbitraire. Le théorème subsiste donc encore, lors même que le rapport des arcs est incommensurable.

Le mode de raisonnement dont nous venons de faire usage est complètement général; dans tous les cas analogues à celui que nous venons de traiter, nous ne le répéterons donc pas, et nous renverrons à ce qui précède.

THÉORÈME.

106. *Si l'on fait correspondre l'unité d'arc à l'unité d'angle, la mesure de l'angle est exprimée par le même nombre abstrait que la mesure de l'arc qu'il intercepte sur une circonférence décrite de son sommet comme centre avec un rayon quelconque.*

Il est naturel de choisir l'angle droit pour unité d'angle (**16**).

Fig. 66.

Menons par le centre d'une circonférence deux diamètres AA', BB', perpendiculaires entre eux (*fig.* 66). On forme ainsi quatre angles au centre égaux entre eux : il en est donc de même des arcs correspondants (**104**). A l'angle droit correspond par suite un quart de circonférence, et nous devrons prendre ce quart de circonférence ou *quadrant* pour unité d'arc.

Si l'on veut comparer l'angle quelconque AOC à l'angle droit AOB, on a (**105**)

$$\frac{AOC}{AOB} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{AOC}{1^{dr}} = \frac{AC}{1^{qu}}.$$

Le premier membre de l'égalité exprime la mesure de l'angle AOC, le second membre exprime la mesure de l'arc AC. Le même nombre abstrait représente donc bien les deux mesures.

Si l'on dit souvent qu'*un angle a pour mesure son arc*, c'est seulement pour abréger le discours. On doit dire : *La mesure de l'angle est égale à celle de l'arc qu'il intercepte.*

107. Pour faciliter l'expression des arcs, on a divisé la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés;* chaque degré, en 60 parties égales appelées *minutes;* chaque minute, en 60 parties égales appelées *secondes.* Le quart de la circonférence renferme 90 degrés ou 5400 minutes ou 324000 secondes. On indique un arc de 32 degrés 25 minutes 27 secondes en écrivant $32°25'17''$.

Un angle de $32°\,25'\,17''$ est alors un angle qui intercepterait un arc de $32°25'\,17''$ sur une circonférence décrite de son sommet comme centre *avec un rayon quelconque.* Pour comparer cet angle à l'angle droit, il faut comparer $32°25'17''$ à $90°$. Pour effectuer cette comparaison, on doit exprimer en secondes le nombre complexe $32°25'\,17''$ (*voir* t. I, *Arithmétique*) et remplacer $90°$ par $324000''$. On trouve ainsi pour le rapport cherché $\frac{116717}{324000}$.

THÉORÈME.

108. *La mesure d'un angle inscrit est égale à la mesure de la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

On appelle *angle inscrit* un angle formé par deux cordes qui se coupent en un même point de la circonférence.

Fig. 67.

Nous distinguerons trois cas (*fig.* 67).

Le centre de la circonférence peut tomber sur l'un des côtés de l'angle. Soit, par exemple, l'angle ABC. Joignons OA. Le triangle AOB sera isocèle, et l'angle A sera égal à l'angle B. L'angle AOC extérieur au triangle AOB, étant égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents (60), est égal au double de l'angle ABC. Comme angle au centre, l'angle AOC a la même mesure que son arc AC:

l'angle ABC, qui en est la moitié, a donc pour mesure celle de la moitié de l'arc AC (105).

Supposons que le centre de la circonférence tombe entre les deux côtés de l'angle, et considérons l'angle ABD. On mènera par le sommet B le diamètre BC. L'angle ABD étant la somme des angles ABC, CBD, sa mesure est égale à la somme de leurs mesures. Elle est donc encore la même que celle de la moitié de l'arc AD.

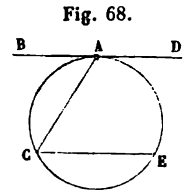
Enfin, si le centre est extérieur à l'angle considéré ABE, on mènera encore le diamètre BC. L'angle ABE étant la différence des angles EBC, ABC, sa mesure est égale à la différence de leurs mesures, c'est-à-dire à celle de la moitié de l'arc AE.

COROLLAIRES.

109. *La mesure de l'angle formé par une tangente et une corde aboutissant au point de contact est égale à la mesure de la moitié de l'arc sous-tendu par la corde* (*fig.* 68).

Soit l'angle BAC. Par le point C, menons CE parallèle à la tangente BD : les arcs AC et AE seront égaux (98). Les angles BAC, ACE, sont d'ailleurs égaux comme alternes-internes. La mesure de l'angle BAC est donc égale à la mesure de l'angle ACE, c'est-à-dire qu'elle est égale à celle de la moitié de l'arc AE ou de son égal AC.

Fig. 68.



La moitié de l'arc AC correspondant à la mesure de l'angle BAC, la moitié de l'arc AEC correspondra à celle de l'angle supplémentaire CAD; car la somme des mesures de deux angles supplémentaires doit être égale à la mesure de deux angles droits ou à une demi-circonférence.

110. *On appelle* segment *la portion de surface circulaire comprise entre un arc et sa corde :* à chaque corde, correspondent deux segments.

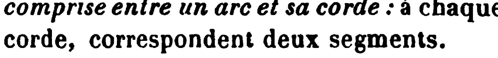
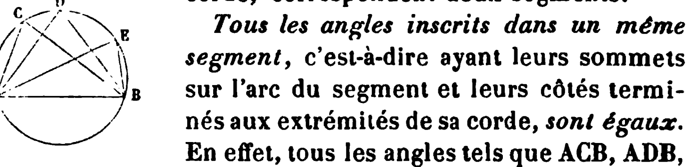


Fig. 69.



Tous les angles inscrits dans un même segment, c'est-à-dire ayant leurs sommets sur l'arc du segment et leurs côtés terminés aux extrémités de sa corde, *sont égaux*.

En effet, tous les angles tels que ACB, ADB, AEB, correspondent au même arc AB et ont la même mesure (*fig.* 69).

Lorsque le segment considéré est un demi-cercle, les angles inscrits sont droits, puisque leur mesure correspond au quart de la circonférence.

Suivant que le segment considéré est *plus petit* ou *plus grand* qu'un demi-cercle, les angles qui y sont inscrits sont *obtus* ou *aigus*, puisque leur mesure est alors *plus grande* ou *plus petite* que celle d'un angle droit.

On dit qu'un segment de cercle est *capable d'un angle donné*, lorsque les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle considéré.

THÉORÈME.

111. *La mesure de l'angle formé par deux sécantes qui se croisent à l'intérieur de la circonférence est égale à la somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et leurs prolongements* (*fig.* 70).

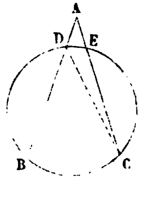
Fig. 70.

Soit l'angle BAC. Ses côtés interceptent l'arc BC, ses côtés prolongés interceptent l'arc DE. Joignons CD. L'angle BAC extérieur au triangle CAD est égal à la somme des deux angles intérieurs D et C. Sa mesure est, par suite, égale à la somme des mesures de ces deux angles. Elle équivaut donc à la moitié de l'arc BC, augmentée de la moitié de l'arc DE.

THÉORÈME.

112. *La mesure de l'angle formé par deux sécantes qui se croisent à l'extérieur de la circonférence est égale à la différence des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle* (*fig.* 71).

Fig. 71.



Soit l'angle BAC, dont les côtés interceptent les arcs BC et DE. Joignons CD. L'angle BDC extérieur au triangle ACD est égal à la somme des angles intérieurs A et C. L'angle BAC est donc égal à la différence des angles BDC et DCE. Sa mesure est alors égale à la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire qu'elle équivaut à la moitié de l'arc *concave* BC, diminuée de la moitié de l'arc *convexe* DE.

Le théorème subsiste, l'une des sécantes ou toutes les deux devenant tangentes.

COROLLAIRES.

113. *Le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle donné est formé de deux arcs de cercle passant par les extrémités de cette droite* (*fig.* 72).

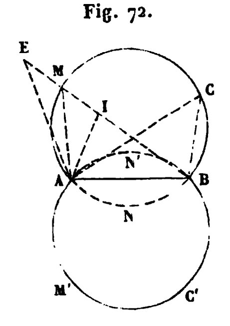


Fig. 72.

Soient la droite donnée AB et un point C du lieu, situé au-dessus de AB : l'angle ACB est alors égal à l'angle donné. Considérons la circonférence déterminée par les trois points A, B, C. Tout point M de cette circonférence appartient au lieu; car l'angle AMB est égal à l'angle ACB comme inscrit dans le même segment (110). Aucun point E *extérieur* et aucun point I *intérieur* à cette circonférence ne peuvent appartenir au lieu énoncé; car l'angle AEB est moindre (112) et l'angle AIB est plus grand (111) que l'angle ACB. L'arc AMCB représente donc, *au-dessus* de AB, le lieu cherché.

Si l'on plie la figure autour de AB, on obtient l'arc AM'C'B, identique au premier arc, et qui représente évidemment, *au-dessous* de AB, le lieu cherché.

En résumé, *le lieu des points d'où l'on voit la droite donnée* AB *sous l'angle donné* ACB *se compose de deux arcs de cercle égaux entre eux, symétriques* ([1]) *par rapport à* AB *et passant par les extrémités* A *et* B.

Les arcs restants ANB, AN'B, représentent à leur tour le lieu des points d'où l'on voit la droite AB sous un angle supplémentaire de l'angle donné ACB (108).

Si l'angle donné est droit, les deux arcs AMCB, AM'C'B, deviennent les demi-circonférences décrites sur AB comme diamètre (110). *Le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle droit est* donc *la circonférence décrite sur cette droite comme diamètre.*

([1]) Deux points sont dits *symétriques* par rapport à une droite, lorsque cette droite est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les points considérés. Deux figures sont *symétriques* par rapport à une droite, lorsque chaque point de l'une a son symétrique sur l'autre.

114. *Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence sont supplémentaires.*

On dit qu'un quadrilatère est *inscrit* dans une circonférence, lorsque ses quatre sommets sont sur cette circonférence.

Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 73). La mesure de l'angle A correspond à la moitié de l'arc BCD (108), celle de l'angle C correspond à la moitié de l'arc BAD. La somme des mesures des deux angles A et C équivaut donc à une demi-circonférence, c'est-à-dire que ces angles sont supplémentaires.

Fig. 73.

La *réciproque* de cette proposition est vraie. *Tout quadrilatère dans lequel deux angles opposés sont supplémentaires est inscriptible.*

Supposons que les angles A et C remplissent cette condition. Si l'on fait passer une circonférence par les trois sommets D, A, B, elle passera par le quatrième sommet C; car, s'il n'en était pas ainsi, la mesure de l'angle C serait plus grande ou plus petite que celle de la moitié de l'arc BAD (111, 112); cet angle ne serait donc pas le supplément de l'angle A.

V. — Problèmes graphiques sur la ligne droite et la circonférence de cercle.

115. Résoudre *graphiquement* un problème, c'est construire certaines figures devant satisfaire à des conditions déterminées. L'exactitude de la solution dépend de l'exactitude des constructions. On ne doit employer, au point de vue élémentaire, que la ligne droite et la circonférence de cercle, c'est-à-dire que les lignes qu'on peut tracer à l'aide de la *règle* et du *compas*.

Nous ne dirons rien de l'usage et de la vérification de ces instruments, bien connus du lecteur. Nous ferons seulement remarquer qu'on doit toujours éviter de déterminer un point par l'intersection de deux lignes se coupant sous un angle trop aigu. Dans ce cas, en effet, par suite de l'épaisseur des lignes tracées, elles semblent coïncider dans une étendue plus ou moins grande, et il y a incertitude sur la position du point cherché.

Les questions très simples que nous allons traiter permet-

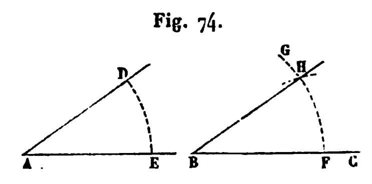
tent d'arriver à la solution graphique de la plupart des problèmes de Géométrie.

PROBLÈME.

116. *Construire un angle égal à un angle donné* (*fig.* 74).

Soit l'angle donné A. Du sommet A comme centre, décrivons entre les côtés de cet angle un arc DE. Traçons une droite BC et, du point B comme centre, avec un rayon égal à AD, décrivons l'arc de cercle indéfini FG. Sur cet arc, à partir du point F, portons une ouverture de compas FH, égale à la corde DE. L'angle HBF est égal à l'angle donné, d'après l'égalité des arcs FH, DE (104).

Fig. 74.

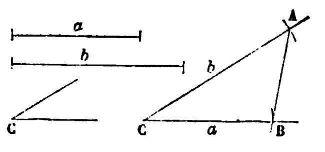


Cette construction permet de trouver le troisième angle d'un triangle, quand on connaît les deux autres (59).

PROBLÈME.

117. *Construire un triangle, connaissant un angle et les deux côtés qui le comprennent* (*fig.* 75).

Fig. 75.

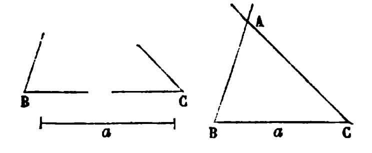


On donne l'angle C et les côtés *a* et *b*. Construisons un angle égal à l'angle C, et prenons sur les côtés de cet angle, à partir du sommet C, des longueurs égales aux côtés *a* et *b*. Le triangle ACB sera évidemment le triangle demandé. On aurait pu renverser l'ordre dans lequel on a porté les côtés *a* et *b* : on aurait obtenu le même triangle *retourné*.

PROBLÈME.

118. *Construire un triangle, connaissant un côté et deux angles* (*fig.* 76).

Fig. 76.



On peut toujours supposer que les deux angles donnés B et C sont adjacents au côté *a* (59). Prenons une longueur BC égale à *a*. Au point B, construisons un angle ABC égal à l'angle donné B; au point C,

un angle ACB égal à l'angle donné C. Les deux droites BA et CA se couperont au point A, et le triangle BAC sera le triangle demandé.

On aurait pu renverser l'ordre dans lequel on a construit les angles B et C, c'est-à-dire faire l'angle C au point B et l'angle B au point C : on aurait obtenu le même triangle *retourné*.

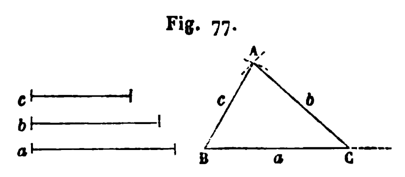
Pour que le problème soit possible, il faut que la somme des angles donnés B et C soit inférieure à deux angles droits (59, 55).

PROBLÈME.

119. *Construire un triangle, connaissant ses trois côtés* (*fig.* 77).

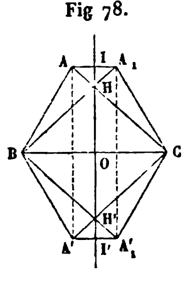
Soient *a*, *b*, *c*, les trois côtés donnés. On prendra une longueur BC égale à *a*. Du point B comme centre, avec un rayon égal à *c*, on décrira un arc de cercle. Du point C comme centre, avec un rayon égal à *b*, on décrira un autre arc de cercle. Si les trois côtés donnés sont bien ceux d'un triangle, le côté *a* sera plus petit que la somme des côtés *b* et *c* et plus grand que leur différence (35), c'est-à-dire que la distance des centres des deux arcs sera plus petite que la somme de leurs rayons et plus grande que la différence de ces mêmes rayons : ces deux arcs se couperont donc (102, 3°) en un point A, qui sera le troisième sommet du triangle demandé.

Fig. 77.



Les arcs de cercle se couperont aussi au-dessous de la ligne des centres (*fig.* 78), en un point A', et le triangle A'BC répondra encore à la question. La ligne AA', qui joint les deux sommets A et A', sera coupée perpendiculairement par BC en deux parties égales (100). On dit alors que les deux triangles ABC, A'BC, sont *symétriques*. Si l'on échangeait les rayons *c* et *b*, on obtiendrait deux nouveaux triangles A_1BC, A'_1BC, symétriques par rapport à BC, qui ne seraient que les triangles ABC, A'BC, *retournés*. On peut remarquer que les quatre triangles BHC, AHA_1, BH'C, $A'H'A'_1$, sont nécessaire-

Fig 78.



ment isocèles. La perpendiculaire II′ élevée au milieu O de BC passe donc par les milieux I et I′ des droites AA_1, $A'A'_1$, parallèles à BC. Les sommets A et A_1, A′ et A'_1, sont donc deux à deux *symétriques* par rapport à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

Lorsque deux figures planes quelconques ont, comme les deux triangles BAC, BA′C, leurs sommets symétriques par rapport à un même axe, elles sont égales, c'est-à-dire qu'elles peuvent coïncider, comme les deux triangles désignés, par *renversement* ou *rotation* autour de l'axe.

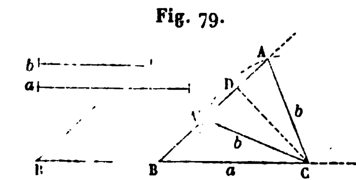
PROBLÈME.

120. *Construire un triangle, étant donnés deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

Soient donnés les côtés b et a et l'angle B. Le côté b peut être plus petit ou plus grand que le côté a; il peut lui être égal.

Supposons $b < a$. Construisons (*fig.* 79) un angle égal à l'angle donné B. Prenons sur l'un des côtés de cet angle une longueur BC égale à a. Du point C comme centre, avec b pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera l'autre côté de l'angle en deux points A et A′. Les deux triangles BCA, BCA′, rempliront les conditions de l'énoncé.

Fig. 79.



Pour que le problème soit possible dans le cas considéré, il faut que l'angle donné B soit aigu (59,32).

Si l'on avait $b = CD$, CD étant la perpendiculaire abaissée du point C sur le second côté de l'angle B, l'arc de cercle décrit du point C serait tangent au second côté de l'angle, et il n'y aurait plus qu'une solution, qui serait le triangle rectangle BCD.

Si b est $> a$ (*fig.* 80), le second point d'intersection A′ se trouve rejeté au-dessous du point B, et le second triangle BCA′ ne répond pas à la question, puisqu'il renferme le supplément de l'angle donné B au lieu de cet angle lui-même. Dans ce cas, l'angle B peut être obtus. S'il est droit, les deux solutions conviennent; mais elles n'en font en réalité qu'une seule,

parce qu'un triangle rectangle est déterminé lorsqu'on connaît son hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit (47, 2°).

Si b est égal à a, le second point d'intersection A' se confond avec le point B : il n'y a qu'une solution, qui est le triangle isocèle BCA.

Fig. 80.

Le problème n'est d'ailleurs possible dans aucun cas, lorsque le côté b est inférieur à la perpendiculaire CD, plus courte distance du point C au second côté de l'angle B.

En résumé, un triangle n'est pas *déterminé* par la connaissance de deux de ses côtés et de l'angle opposé à l'un d'eux. Il faut examiner les données pour savoir s'il n'y a qu'une seule réponse à la question.

D'ailleurs, *le seul cas où il puisse y avoir deux solutions est celui où, l'angle donné étant aigu, le côté opposé à cet angle est le plus petit des deux côtés donnés.*

PROBLÈME.

121. *Construire un parallélogramme, étant donnés deux côtés adjacents* A *et* B *et l'angle* C *qu'ils forment* (*fig.* 81).

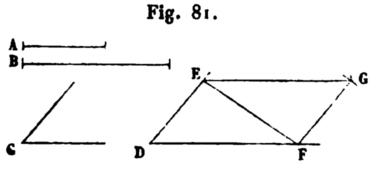


Fig. 81.

Cette question revient évidemment à construire un triangle EDF, dont on connaît deux côtés et l'angle compris; puis un triangle EFG, dont on connaît les trois côtés.

PROBLÈME.

122. *Par un point donné sur une droite donnée, élever une perpendiculaire à cette droite* (*fig.* 82).

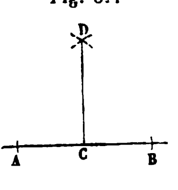


Fig. 82.

Soit la droite AB. De part et d'autre du point donné C, on détermine des longueurs égales CA et CB. Des points A et B comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de AB ou que AC, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en D, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence qui est nulle.

La droite CD sera la perpendiculaire demandée, car, les deux points C et D étant également éloignés des points A et B, CD est perpendiculaire sur le milieu de AB (46).

La construction est d'autant plus exacte que les points C et D sont plus éloignés l'un de l'autre : deux points étant très rapprochés, une erreur très petite sur la position de l'un d'eux en produit en effet une très grande sur la direction de la droite qui les joint.

On peut, comme vérification, déterminer au-dessous de AB un troisième point de la perpendiculaire CD.

Si l'on ne pouvait pas prolonger la droite AB au delà du point B, et si la perpendiculaire devait être élevée au point B, on pourrait opérer comme il suit.

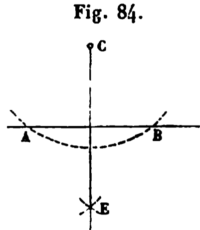
Fig. 83.

D'un point C pris hors de la droite AB (*fig.* 83), on décrirait une circonférence ayant CB pour rayon. Cette circonférence couperait AB en un second point D. On mènerait le diamètre DCE, et la droite BE serait la perpendiculaire demandée; car l'angle DBE est droit comme inscrit dans une demi-circonférence (110).

PROBLÈME.

123. *Par un point pris hors d'une droite, lui mener une perpendiculaire* (*fig.* 84).

Fig. 84.



Du point donné C, avec un rayon convenable, on décrit un arc de cercle qui coupe la droite donnée AB en deux points A et B. Des points A et B comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de AB, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en E au-dessous de AB. La ligne CE, perpendiculaire sur le milieu de AB, est la perpendiculaire demandée.

PROBLÈME.

124. *Division d'une droite, d'un arc ou d'un angle, en deux parties égales.*

Pour diviser la droite AB en deux parties égales (*fig.* 85), des points A et B comme centres, avec un même rayon nota-

blement plus grand que la moitié de AB, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en deux points C et D, au-dessus et au-dessous de AB. La droite CD, perpendiculaire sur le milieu de AB, détermine le milieu E de cette ligne. On voit que le

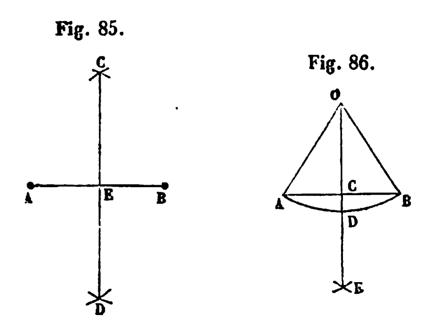


Fig. 85. Fig. 86.

problème proposé revient à celui-ci : *Élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite.*

Si l'on veut diviser l'arc AB ou l'angle AOB en deux parties égales (*fig.* 86), on détermine comme précédemment un point E à égale distance des points A et B. En joignant ce point E au centre de l'arc ou au sommet de l'angle, c'est-à-dire au point O, on a la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde AB. Cette perpendiculaire divise l'arc AB au point D en deux parties égales (93); elle divise donc aussi l'angle AOB en deux parties égales (104).

En appliquant cette construction aux moitiés obtenues et en continuant de la même manière, on voit qu'on pourra partager une droite, un arc ou un angle, en un nombre de divisions marqué par une puissance quelconque de 2.

PROBLÈME.

125. *Retrouver le centre d'une circonférence ou d'un arc de cercle* (*fig.* 87).

On marquera trois points A, B, C, sur la circonférence ou l'arc donné; on obtiendra ainsi deux cordes AB et BC. On élèvera la perpendiculaire DE sur le milieu de AB, la perpendiculaire FG sur le milieu de BC. Ces deux perpendiculaires se croiseront en un point O qui sera le centre cherché (95).

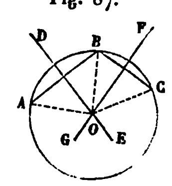


Fig. 87.

PROBLÈME.

126. *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

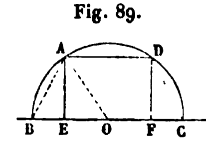
Soient la droite BC et le point A (*fig.* 88). Par le point A, on mène une droite quelconque AC qui vienne couper BC au point C. On fait ensuite avec AC, en prenant le point A pour sommet, un angle CAD égal à l'angle ACB. AD est la parallèle demandée, puisque les angles égaux formés sont alternes-internes par rapport aux droites BC, AD, coupées par la sécante AC.

Fig. 88.

On aurait pu aussi mener une droite quelconque telle que AB, et achever le parallélogramme ABCD, dont les deux côtés adjacents AB, BC, comprennent l'angle ABC (121).

On aurait pu abaisser du point A une perpendiculaire AE sur BC (*fig.* 89) ; puis, au point F, élever FD perpendiculaire sur BC. Si l'on prend FD égale à AE, le point D appartient à la parallèle menée par le point A à la droite BC (70).

Fig. 89.



On aurait pu encore prendre un point O quelconque sur BC (*fig.* 89), et du point O comme centre, avec OA pour rayon, décrire une demi-circonférence arrêtée aux points B et C. Portant alors la distance BA de C en D, le point D appartient à la parallèle menée par le point A à BC (98).

SCOLIE.

127. On peut abréger toutes les constructions que nous venons d'indiquer à l'aide de l'*équerre* et du *rapporteur*. On pourra notamment, en se servant de l'équerre et de la propriété des angles correspondants, tracer très exactement des parallèles. Nous n'entrerons dans aucun détail sur ces instruments (1), dont la pratique de l'art du dessin a dû rendre l'emploi familier à tous nos lecteurs.

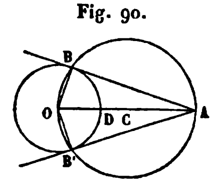
(1) *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition, ou ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, par les mêmes, 2e édition.

PROBLEME.

128. *Par un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle (fig. 90).*

Soient le cercle dont le centre est O, et le point A. Joignons OA et, sur OA comme diamètre, décrivons une circonférence qui rencontrera forcément la circonférence donnée en deux points B et B′. Les droites AB et AB′ seront les tangentes demandées. En effet, les angles OBA et OB′A sont droits comme angles inscrits dans une demi-circonférence. Les droites AB, AB′, sont donc perpendiculaires à l'extrémité des rayons OB, OB′ (96).

Fig. 90.



Remarquons l'égalité des deux triangles rectangles OBA, OB′A, qui ont la même hypoténuse OA et OB = OB′. On en conclut l'égalité des deux tangentes AB et AB′, et celle des deux angles OAB, OAB′.

Ainsi, *par un point pris hors d'un cercle, on peut lui mener deux tangentes; ces tangentes sont égales, et elles sont également inclinées sur la ligne qui joint leur point de concours au centre.*

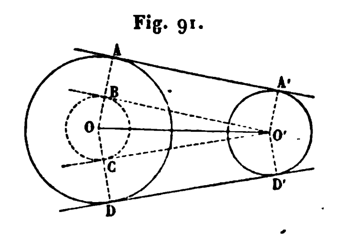
PROBLÈME.

129. *Mener une tangente commune à deux circonférences données.*

La tangente commune peut laisser les deux circonférences d'un même côté ou de côtés différents. Dans le premier cas, c'est une tangente commune *extérieure;* dans le second, c'est une tangente commune *intérieure.*

1° Soient les deux circonférences O et O′ et la tangente commune extérieure AA′. Menons les rayons OA et O′A′. Ces rayons seront parallèles et, si l'on mène par le point O′ la parallèle O′B à AA′, la figure O′A′AB sera un rectangle, de sorte que OB représentera la différence des deux rayons OA et O′A′. Par conséquent, si du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente à la droite O′B

Fig. 91.



qui est parallèle à la direction de la tangente commune. Il en résulte immédiatement la construction suivante (*fig.* 91).

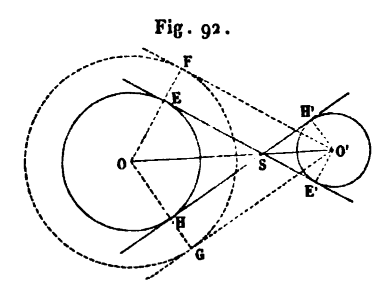
Du point O comme centre, avec la différence des rayons des circonférences données pour rayon, on décrit une circonférence. Du point O′, on mène à cette circonférence la tangente O′B. On prolonge le rayon OB jusqu'au point A où il rencontre la circonférence O et, par le point A, on mène AA′ parallèle à O′B : AA′ est la tangente commune demandée. Comme on peut mener par le point O′ au cercle OB deux tangentes O′B et O′C, il y a en général deux solutions AA′ et DD′.

Le problème est possible tant que le point O′ demeure extérieur au cercle OB, c'est-à-dire tant que la distance des centres des circonférences données est plus grande que la différence de leurs rayons. Si la distance OO′ est égale à la différence des rayons, le point O′ se trouve sur la circonférence OB et sur la ligne des centres : les deux solutions se réduisent à une seule, qui est la tangente commune aux deux circonférences données, alors tangentes intérieurement.

Ainsi, deux circonférences extérieures l'une à l'autre, tangentes extérieurement ou sécantes, admettent deux tangentes communes extérieures. Deux circonférences tangentes intérieurement n'en admettent plus qu'une seule. Il n'existe aucune solution, lorsque les circonférences données sont intérieures l'une à l'autre.

2° Soient les deux circonférences O et O′ et la tangente commune intérieure EE′. Menons les rayons OE et O′E′. Ces rayons seront parallèles et, si l'on mène par le point O′ la parallèle O′F à EE′, la figure O′E′EF sera un rectangle, de sorte que OF représentera la somme des deux rayons OE et O′E′. Par conséquent, si du point O comme centre, avec OF pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente à la droite O′F, qui est parallèle à la direction de la tangente commune. Il en résulte immédiatement la construction suivante (*fig.* 92).

Fig. 92.



Du point O comme centre, avec la somme des rayons des circonférences données pour rayon, on décrit une circonfé-

rence. Du point O′, on mène à cette circonférence la tangente O′F. Par le point E, où le rayon OF rencontre la circonférence O, on trace EE′ parallèle à O′F : EE′ est la tangente commune demandée. Comme on peut mener par le point O′ au cercle OF deux tangentes O′F et O′G, il y a en général deux solutions EE′ et HH′.

Le problème est possible tant que le point O′ demeure extérieur au cercle OF, c'est-à-dire tant que la distance des centres des circonférences données est plus grande que la somme de leurs rayons. Si la distance OO′ est égale à la somme des rayons, le point O′ se trouve sur la circonférence OF et sur la ligne des centres : les deux solutions se réduisent à une seule qui est la tangente commune aux deux circonférences données, alors tangentes extérieurement.

Ainsi, deux circonférences extérieures l'une à l'autre admettent deux tangentes communes intérieures. Deux circonférences tangentes extérieurement n'en admettent plus qu'une seule. Il n'existe aucune solution, lorsque les circonférences données sont sécantes, tangentes intérieurement ou intérieures l'une à l'autre.

Les deux tangentes communes extérieures se coupent en un même point situé sur la ligne des centres. En effet, les points O et O′ appartiennent à la bissectrice de l'angle qu'elles forment.

Les deux tangentes communes intérieures se coupent aussi en un même point S *de la ligne des centres* (*fig.* 92). En effet, elles forment deux angles opposés par le sommet, les points O et O′ appartiennent aux bissectrices de ces angles, et les bissectrices des angles opposés par le sommet sont en ligne droite.

Dans le cas des tangentes communes extérieures, si les rayons des deux circonférences données étaient égaux, la circonférence OB se réduirait à un point, et la tangente O′B, parallèle à la direction de la tangente commune, se confondrait avec la ligne des centres. Les deux tangentes extérieures sont donc alors parallèles à la ligne des centres. Quant aux tangentes intérieures, leur point de concours S est au milieu de la distance des centres : c'est ce que prouve la comparaison des triangles OSE, O′SE′ qui, dans l'hypothèse indiquée, deviennent égaux.

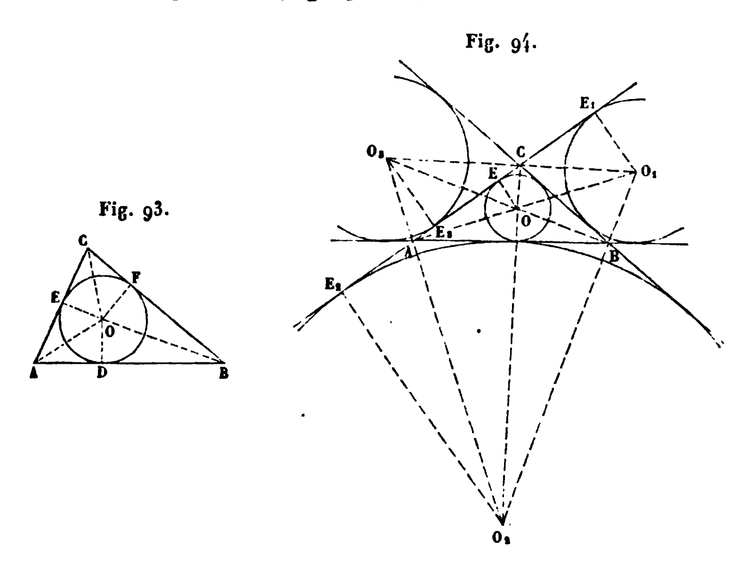
On doit appliquer la méthode que nous avons employée pour résoudre la question proposée, toutes les fois qu'on n'aperçoit

pas rapidement la solution du problème. *Cette méthode consiste à supposer le problème résolu,* à tracer la figure correspondante, et à étudier sur cette figure la liaison des données et des inconnues.

PROBLÈME.

130. *Mener une circonférence tangente à trois droites qui se coupent* (*fig.* 93 *et* 94).

Les trois droites données forment un triangle ABC. Si l'on mène les bissectrices des angles de ce triangle, elles se croisent en un point O (*fig.* 93) également distant des trois



côtés (82). Par suite, si, de ce point O comme centre, avec sa distance OD au côté AB comme rayon, on décrit une circonférence, elle touchera (97) les trois côtés du triangle aux points D, E, F. On dit alors que la circonférence OD est *inscrite* dans le triangle ABC qui, à son tour, lui est *circonscrit.*

Si l'on trace maintenant (*fig.* 94) les bissectrices des angles *extérieurs* du même triangle, elles forment un second triangle $O_1O_2O_3$ dont les sommets, situés sur les prolongements des bissectrices des angles intérieurs du premier (82), sont aussi à égale distance des trois droites données. De là, trois autres circonférences O_1E_1, O_2E_2, O_3E_3, répondant à la question. Chacune d'elles est tangente à l'un des côtés du triangle ABC

et aux prolongements des deux autres côtés, et on les qualifie, par rapport à ce triangle, de circonférences *exinscrites*.

En résumé, on peut mener en général quatre circonférences tangentes à trois droites données.

Si l'on désigne par a, b, c, les trois côtés BC, CA, AB, du triangle ABC et par $2p$ son *périmètre* $a+b+c$, on démontre facilement, en s'appuyant sur l'égalité des tangentes menées d'un même point à une même circonférence (128), que les distances de l'un des sommets du triangle aux points de contact de l'un des côtés qui y passent avec les quatre circonférences tangentes, représentent les longueurs p, $p-a$, $p-b$, $p-c$. Ainsi, en se reportant à la *fig.* 94, on aura, sur le côté AC,

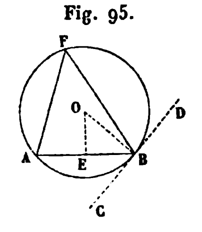
$$AE_1 = p, \quad AE = p-a, \quad AE_2 = p-b, \quad AE_3 = p-c.$$

PROBLÈME.

131. *Décrire sur une droite donnée comme corde, un segment capable d'un angle donné* (*fig.* 95).

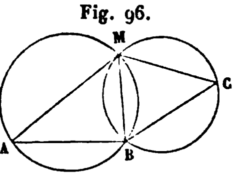
On veut décrire une circonférence passant par les points A et B, et telle, que l'un des deux segments correspondant à la corde que ces points déterminent soit capable de l'angle donné (110).

Fig. 95.



Menons par le point B une droite CD faisant au-dessous de AB un angle ABC égal à l'angle donné. Elevons BO perpendiculaire à CD et EO perpendiculaire à AB, le point E étant le milieu de AB. Les droites BO et EO se coupent nécessairement au point O. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons une circonférence qui sera la circonférence demandée. En effet, la droite CD est tangente à cette circonférence, et l'angle donné ABC a pour mesure la moitié de l'arc AB. Or tous les angles AFB, inscrits dans le segment supérieur à AB, ont aussi pour mesure la moitié de l'arc AB : ils sont donc égaux à l'angle ABC, et le segment AFB est bien capable de l'angle donné.

Fig. 96.



Lorsqu'on veut rapporter sur une carte (*fig.* 96) un point remarquable M, on choisit trois points

A, B, C, déjà marqués sur cette carte. On mesure, à l'aide d'instruments spéciaux, les angles AMB, BMC. En décrivant sur AB et sur BC des segments capables des angles AMB, BMC, on obtient deux lieux géométriques du point M. Ce point se trouvera donc sur la carte, au second point d'intersection des deux circonférences qui ont déjà le point B commun.

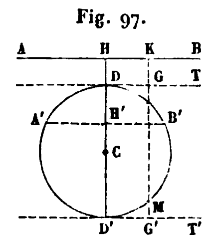
VI. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

132. *Lorsqu'on considère une circonférence et une droite extérieure, les extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite sont les points de cette circonférence dont les distances à la droite sont maximum et minimum* (*fig.* 97).

Soient la circonférence C et la droite extérieure AB à laquelle le diamètre DD' est perpendiculaire en H. Menons les deux tangentes DT, D'T', et abaissons, d'un point quelconque M de la circonférence, MK perpendiculaire sur AB.

Fig. 97.



On a $MK > GK$, c'est-à-dire $MK > DH$, et $MK < G'K$, c'est-à-dire $MK < D'H$.

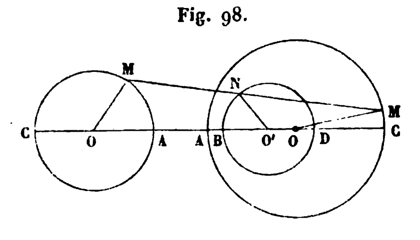
S'il s'agit d'une droite *sécante* A'B' (supposée sur la figure parallèle à AB), les points D et D' sont évidemment les points de distance maximum, le premier pour l'arc A'DB', le second pour l'arc A'D'B'.

H'D est ce qu'on appelle la *flèche* de l'arc supérieur, H'D' est celle de l'arc inférieur.

THÉORÈME.

133. *Lorsque deux circonférences sont extérieures ou intérieures, la plus grande et la plus petite des droites qu'on peut mener entre les deux circonférences sont dirigées suivant la ligne des centres* (*fig.* 98).

Fig. 98.



En effet, menons entre les deux circonférences O et O' une droite quelconque MN et désignons par AC et BD les diamètres de ces circonférences qui sont confondus avec la ligne des centres

Le quadrilatère OO'NM donne, si les circonférences sont *extérieures*,

$$OO' < OM + MN + NO', \quad \text{c'est-à-dire} \quad AB < MN;$$

et, si les circonférences sont *intérieures*,

$$OM \quad \text{ou} \quad OO' + O'B + BA < OO' + O'N + NM,$$

c'est-à-dire

$$AB < MN.$$

Le même quadrilatère permet de poser, si les circonférences sont *extérieures*,

$$MO + OO' + O'N > MN, \quad \text{c'est-à-dire} \quad CD > MN;$$

et, si les circonférences sont *intérieures*,

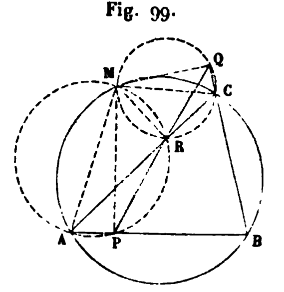
$$MO + OO' + O'N > MN, \quad \text{c'est-à-dire} \quad CB > MN.$$

THÉORÈME.

134. *Lorsqu'un triangle est inscrit dans une circonférence, les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la circonférence sur les trois côtés du triangle sont en ligne droite* (*fig.* 99).

Soient le triangle ABC et la circonférence circonscrite. D'un point quelconque M de cette circonférence, abaissons sur les trois côtés du triangle les perpendiculaires MP, MQ, MR : il faut démontrer que les deux droites RP et RQ n'en font qu'une seule.

Fig. 99.



Le quadrilatère AMCB étant inscrit, l'angle MAB, supplément de l'angle MCB, est égal à l'angle MCQ. Les deux triangles AMP, CMQ, étant rectangles, il en résulte l'égalité des angles AMP et CMQ, compléments des précédents.

Or, la circonférence décrite sur AM comme diamètre contient les points P et R, puisque les angles APM, ARM, sont droits. De même, la circonférence décrite sur MC comme diamètre passe par les points Q et R.

Dans la première circonférence AM, les angles AMP et ARP sont égaux comme inscrits dans un même segment; dans la seconde circonférence MC, les angles CMQ et CRQ sont égaux pour la même raison. On a donc, finalement, angle ARP = angle CRQ. Comme ces angles sont dans la position d'opposés par le sommet et que les deux côtés RA et RC sont en ligne droite, il en est de même des côtés RP et RQ.

THÉORÈME.

135. *Dans tout quadrilatère circonscrit à une circonférence, les sommes formées par les côtés opposés sont égales* (*fig.* 100).

Un quadrilatère est *circonscrit* à une circonférence, lorsque ses côtés sont tangents à cette circonférence qui, à son tour, est *inscrite* dans le quadrilatère.

Les tangentes au cercle issues d'un même point étant égales, on a

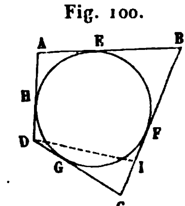
$$AE = AH, \quad BE = BF, \quad CG = CF, \quad DG = DH.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient évidemment

$$AB + CD = AD + BC.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, le quadrilatère est *circonscriptible*, c'est-à-dire que le cercle tangent intérieurement aux trois côtés DA, AB, BC, et dont le centre est à la rencontre des bissectrices des angles A et B, est nécessairement tangent au quatrième côté CD du quadrilatère. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait mener par le sommet D une tangente DI à cette circonférence. Le quadrilatère DABI étant circonscrit, on aurait à la fois

Fig. 100.



$$AB + DI = AD + BI \quad \text{et} \quad CD < DI + IC.$$

On en conclurait donc, en ajoutant,

$$AB + CD < AD + BC;$$

ce qui est contre l'hypothèse.

CHAPITRE III.

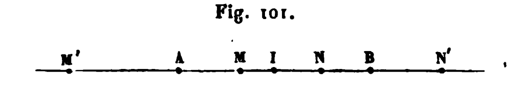
LES LIGNES PROPORTIONNELLES.

I. — Des lignes proportionnelles dans le triangle.

LEMME.

136. *Si l'on considère sur une droite indéfinie deux points fixes* A *et* B, *il existe sur cette droite un point et un seul dont*

Fig. 101.



le rapport des distances aux points A *et* B *ait une valeur donnée (fig.* 101).

Le rapport donné peut être *positif* ou *négatif*, il peut être *plus petit* ou *plus grand* que 1.

Soient I le milieu de AB, l la distance des points A et B, et $\frac{\alpha}{\beta}$ le rapport donné supposé d'abord *moindre que* 1 et pris en valeur absolue.

Si l'on suppose que le point *intérieur* M, situé nécessairement *à gauche* de I, réponde à la question, on doit avoir

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad MA+MB=l.$$

Il en résulte

$$\frac{MA}{MA+MB}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad MA=\frac{\alpha l}{\alpha+\beta};$$

ce qui détermine un seul point M *intérieur*.

Si l'on suppose que le point *extérieur* M', situé nécessairement *à gauche* de A, réponde aussi à la question, on doit avoir

$$\frac{M'A}{M'B}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad M'B-M'A=l.$$

Il en résulte

$$\frac{M'A}{M'B-M'A}=\frac{\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{et} \quad M'A=\frac{\alpha l}{\beta-\alpha};$$

ce qui détermine un seul point M' *extérieur*.

Il semble donc que les deux points M et M' satisfassent tous deux à la condition imposée; mais, si l'on fait intervenir les signes des segments, les deux segments MA et MB sont de signes contraires, tandis que les deux segments M'A et M'B sont de même signe (12). Les deux rapports qui correspondent aux points M et M' sont donc égaux en valeur absolue, mais de signes contraires, et l'on a en réalité

$$\frac{MA}{MB}=-\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{M'A}{M'B}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

En raisonnant absolument de la même manière, on voit que, le rapport donné $\frac{\alpha'}{\beta'}$ étant *plus grand* que 1, deux points N et N' situés *à droite* du milieu I de AB, l'un *intérieur*, l'autre *extérieur* à AB, répondent à la question si le rapport $\frac{\alpha'}{\beta'}$ est pris en valeur absolue; mais que, si l'on tient compte des signes des segments, le point N répond à ce rapport pris négativement et le point N' à ce rapport pris positivement. On a donc en réalité

$$\frac{NA}{NB}=-\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{et} \quad NA=\frac{l\alpha'}{\alpha'+\beta'}, \quad \frac{N'A}{N'B}=\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{et} \quad N'A=\frac{l\alpha'}{\alpha'-\beta'}.$$

COROLLAIRE.

137. Si l'on ne tient pas compte des signes, on a, dans le premier cas par exemple $\left(\frac{\alpha}{\beta}<1\right)$, la proportion

$$(1) \qquad \frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}.$$

Cette proportion est une *proportion harmonique*. On a vu,

en effet (Tome I, *Questions proposées sur l'Arithmétique*, nº 141, p. 700), que trois nombres a, b, c, rangés par ordre de grandeur, forment une proportion harmonique quand on a

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c};$$

b est la *moyenne harmonique* entre a et c qui sont les deux *extrêmes*.

Or, on a ici

$$\text{MA}=\text{MM}'-\text{M}'\text{A},\quad \text{MB}=\text{M}'\text{B}-\text{MM}',$$

d'où, en changeant les signes des deux termes du premier rapport de la proportion (1)

$$\frac{\text{M}'\text{A}-\text{MM}'}{\text{MM}'-\text{M}'\text{B}}=\frac{\text{M}'\text{A}}{\text{M}'\text{B}};$$

MM' est donc la moyenne harmonique entre les extrêmes M'A et M'B.

On dit alors que les deux points M et M' divisent *harmoniquement* la droite AB ou sont *conjugués harmoniques* par rapport à cette droite. Comme on peut écrire la proportion (1), en échangeant les moyens,

$$\frac{\text{AM}}{\text{AM}'}=\frac{\text{BM}}{\text{BM}'},$$

A et B sont à leur tour *conjugués harmoniques* par rapport à la droite MM'.

Si l'on tient compte des signes, la forme exacte de la proportion harmonique (1) est

$$\frac{\text{MA}}{\text{MB}}=-\frac{\text{M}'\text{A}}{\text{M}'\text{B}}\quad\text{ou}\quad\frac{\text{MA}}{\text{MB}}:\frac{\text{M}'\text{A}}{\text{M}'\text{B}}=-1.$$

THÉORÈME.

138. *Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres en parties proportionnelles* (*fig.* 102).

Soient le triangle ABC, et la droite DE parallèle au côté BC. Supposons que les deux segments AD et DB admettent une commune mesure, et qu'elle soit contenue 3 fois dans AD et

2 fois dans DB, par exemple. On aura

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}.$$

Par les points de division F, G, M, menons des parallèles à BC ou à DE. Les divisions que toutes ces parallèles déterminent sur le côté AC sont aussi égales entre elles. En effet, traçons GO parallèle à AC, et comparons les deux triangles AFK et GDO. Ces triangles sont égaux, car leurs côtés égaux AF et GD sont adjacents à des angles égaux chacun à chacun comme correspondants. On en conclut AK = GO. Mais la figure GOEL étant un parallélogramme, on a

Fig. 102.

$$GO = LE, \quad \text{d'où} \quad AK = LE.$$

On prouverait de la même manière l'égalité de AK et des autres divisions de AC. AK peut donc servir de commune mesure aux deux segments AE et EC, et l'on a

$$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2},$$

puisque cette commune mesure est contenue 3 fois dans AE et 2 fois dans EC.

Les segments AD et DB d'une part, AE et EC d'autre part, présentant le même rapport, ces segments sont *proportionnels,* et l'on a

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

On en déduit (*Arithm.*, 393)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

COROLLAIRE.

139. *Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de parallèles* (*fig.* 103).

Soient les deux droites AC et DF coupées par les parallèles AD, BE, CF. Menons AH parallèle à DF. Le triangle CAH

donne alors

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}.$$

Mais AG = DE, GH = EF (68). On a donc

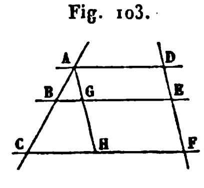


Fig. 103.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

On a aussi

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}.$$

140. Réciproquement, *si une droite divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième côté* (*fig.* 102).

Soit le triangle ABC. Supposons que la droite DE divise les côtés AB et AC en parties proportionnelles : DE sera parallèle au côté BC. En effet, si l'on mène par le point D une parallèle au côté BC, elle coupera le côté AC en parties proportionnelles à AD et à DB. Le côté AC étant déjà divisé au point E de cette manière, cette parallèle passera nécessairement par le point E (136), c'est-à-dire qu'elle se confondra avec la droite DE.

Il est sous-entendu que les points D et E doivent être placés d'une manière analogue sur les côtés AB et AC.

Si, dans le théorème direct (138), les segments AD et DB n'avaient pas de commune mesure, on aurait recours au mode de démonstration déjà indiqué (105).

THÉORÈME.

141. *La bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés qui comprennent l'angle* (*fig.* 104).

Soient le triangle ABC et la bissectrice BD de l'angle B : il faut prouver qu'on a

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB}.$$

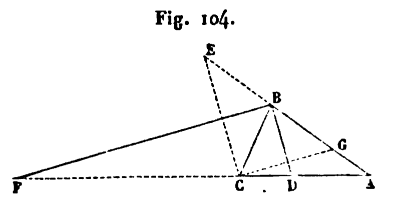


Fig. 104.

Par le point C, menons à BD la parallèle CE jusqu'à la ren-

contre de AB prolongé. On a alors dans le triangle ACE (138) :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}.$$

Considérons le triangle CBE. L'angle en C de ce triangle est égal à l'angle CBD, puisque ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles CE et BD coupées par la sécante CB. De même, l'angle en E est égal à l'angle DBA, puisque ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles coupées par la sécante EA. Les angles CBD, DBA, étant égaux, il en est de même des angles en C et en E du triangle CBE : ce triangle est donc isocèle, et l'on a BE = CB, c'est à-dire

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB}.$$

142. *La bissectrice de l'angle extérieur d'un triangle coupe le côté opposé en un point dont les distances aux extrémités de ce côté sont proportionnelles aux côtés qui comprennent l'angle intérieur adjacent* (*fig.* 104).

Considérons l'angle extérieur CBE et menons sa bissectrice BF : il faut prouver qu'on a

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CB}.$$

Par le point C, menons CG parallèle à BF jusqu'à la rencontre du côté AB. Le triangle ABF donne alors (138)

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{BG}.$$

Considérons le triangle CBG. Ce triangle est isocèle : son angle C est égal à l'angle FBC, puisque ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles CG, BF, et à la sécante CB; son angle G est égal à l'angle FBE, puisque ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles et à la sécante AE; les deux angles C et G sont donc égaux, et l'on a CB = BG, c'est-à-dire

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CB}.$$

143. Les *réciproques* des deux propositions précédentes sont évidentes. Le point D, qui partage AC en segments pro-

portionnels aux côtés AB et CB, étant un point unique (136), toute droite BD qui détermine un point jouissant de cette propriété se confond avec la bissectrice de l'angle B. De même, le point F, situé sur le prolongement de AC, dont les distances aux points A et C forment un rapport égal à celui des côtés AB et CB, étant aussi un point unique, toute droite BF qui détermine un point jouissant de cette propriété se confond avec la bissectrice de l'angle extérieur CBE.

Les deux points D et F sont conjugués harmoniques par rapport à la droite CA (137). Ainsi, *les deux côtés d'un angle, la bissectrice de cet angle et la bissectrice de son supplément, déterminent sur une sécante quelconque quatre points dont les deux derniers sont conjugués par rapport aux deux autres.*

THÉORÈME.

144. *Le lieu géométrique de tous les points d'un plan dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné, est une circonférence de cercle* (*fig.* 105).

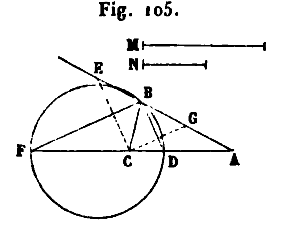


Fig. 105.

Soient les deux points donnés A et C, soient M et N les deux lignes dont le rapport représente le rapport donné. Déterminons sur AC un point D tel, qu'on ait

$$\frac{AD}{DC} = \frac{M}{N}:$$

le point D appartiendra au lieu cherché. Déterminons sur le prolongement de AC un point F tel, qu'on ait

$$\frac{FA}{FC} = \frac{M}{N}:$$

le point F appartiendra au lieu cherché.

Supposons que le point B du plan soit un des points du lieu. On aura alors

$$\frac{AB}{CB} = \frac{M}{N}.$$

Dès lors, si l'on forme le triangle ABC, BD sera la bissectrice de l'angle intérieur ABC, et BF sera la bissectrice de l'angle extérieur CBE (143). Les droites BD et BF étant bissectrices

d'angles supplémentaires seront à angle droit et, par suite, si l'on décrit une circonférence sur FD comme diamètre, elle passera par le point B. *Tous les points du lieu appartiennent donc à cette circonférence.*

Il reste à prouver que *tous les points de la circonférence appartiennent au lieu.* Prenons un point B quelconque sur la circonférence dont FD est le diamètre. Joignons-le aux points D et F et formons le triangle ABC. Menons par le point C les parallèles CE et CG à BD et à BF. Ces parallèles seront à angle droit, puisque l'angle DBF est droit : il en résulte que la circonférence décrite sur EG comme diamètre passe par le point C. Mais le triangle ACE donne $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BE}$, le triangle ABF donne $\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{BG}$: on en conclut, à cause du rapport commun,

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AB}{BG}, \quad \text{d'où} \quad BE = BG;$$

le point B est le centre de la circonférence décrite sur EG comme diamètre, et l'on a

$$BE = CB.$$

L'égalité $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$ devient $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB} = \frac{M}{N}$, de sorte que le point B est un point du lieu.

Le lieu géométrique demandé est donc bien la circonférence décrite sur DF comme diamètre, les points D et F étant ceux de la ligne AC qui répondent à la question.

II. — De la similitude et de l'homothétie.

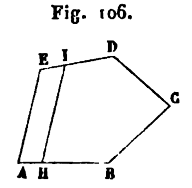
145. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont *semblables*, lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et compris entre côtés proportionnels, les côtés proportionnels étant d'ailleurs disposés dans le même ordre.

On appelle *homologues* les parties qui se correspondent dans deux polygones semblables : ainsi, les sommets des angles égaux sont des points homologues, les diagonales qui joignent des sommets homologues sont des lignes homologues.

On appelle *rapport de similitude* de deux polygones semblables le rapport constant qui lie deux côtés homologues.

On voit facilement qu'on peut, dans un polygone quelconque, changer la proportion des côtés sans faire varier les angles, ou faire varier les angles sans changer les côtés Ainsi, étant donné le polygone ABCDE (*fig.* 106), si l'on mène IH parallèle à EA, on forme un nouveau pentagone qui a les mêmes angles que le pentagone proposé; mais la proportion des côtés n'est plus la même, puisque les côtés ED et AB sont devenus plus petits, tandis que les côtés BC et CD n'ont pas changé. On pourrait aussi conserver aux côtés les mêmes longueurs et altérer les différents angles, en supposant des articulations aux différents sommets, et en rapprochant par exemple le sommet A du sommet D. Il résulte de cette remarque que, si l'on considère deux polygones quelconques, la proportionnalité des côtés n'est pas une conséquence de l'égalité des angles, et réciproquement.

Fig. 106.

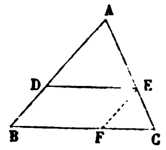


Cette dépendance n'a lieu que pour les triangles, et la théorie de leur similitude s'en trouve beaucoup simplifiée, comme on va le voir.

LEMME.

146. *Si l'on coupe un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, le triangle partiel qu'on détermine est semblable au triangle proposé* (*fig.* 107)

Fig. 107.



Soit le triangle ABC. Menons la parallèle DE au côté BC. Les deux triangles ABC, ADE, ont évidemment leurs angles égaux chacun à chacun. DE étant parallèle à BC, on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Traçons EF parallèle à AB, on a de même

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}.$$

La figure DEFB étant un parallélogramme, on peut rem-

placer BF par son égale DE et écrire

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Les deux triangles ABC, ADE, ayant leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels, sont semblables (145).

THÉORÈME.

147. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun (fig. 108).*

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′. L'angle A est égal à l'angle A′, l'angle B égal à l'angle B′, l'angle C égal à l'angle C′. Prenons AD = A′B′ et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable au triangle ABC (146), et il suffit de démontrer que les deux triangles ADE, A′B′C′, sont égaux.

Fig. 108.

Or, l'angle A est égal à l'angle A′ par hypothèse; l'angle D, égal à l'angle B comme correspondant, est égal à l'angle B′; enfin, le côté AD est égal au côté A′B′ par construction. Les deux triangles ADE, A′B′C′, sont donc égaux d'après le premier cas d'égalité (30, 1°).

THÉORÈME.

148. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels (fig. 108).*

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′. L'angle A est égal à l'angle A′ et l'on a la proportion

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Tout revient à démontrer que le triangle ADE, formé comme dans le cas précédent et semblable au triangle ABC, est égal au triangle A′B′C′.

Or, on a, à cause de la parallèle DE,

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Si l'on compare les proportions (1) et (2), on voit que, AD étant égal à A′B′ par construction, on doit avoir AE = A′C′. Les deux triangles ADE, A′B′C′, sont donc égaux d'après le deuxième cas d'égalité (30, 2°).

THÉORÈME.

149. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont leurs côtés proportionnels* (*fig.* 108).

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′, on a

(1) $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}.$$

Tout revient encore à démontrer que le triangle ADE, formé comme dans les deux cas précédents et semblable au triangle ABC, est égal au triangle A′B′C′.

La similitude des deux triangles ABC, ADE, donne (146)

(2) $$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{CA}{EA}.$$

Les suites de rapports égaux (1) et (2) présentent les mêmes numérateurs et les dénominateurs A′B′ et AD des deux premiers rapports sont égaux par construction. Il en résulte B′C′ = DE, C′A′ = EA, et les deux triangles ADE, A′B′C′, sont égaux d'après le troisième cas d'égalité (30, 3°).

SCOLIE.

150. Les théorèmes des nos 147 et 149 prouvent que l'égalité des angles entraîne, pour les triangles, la proportionnalité des côtés, et réciproquement. Il est donc permis de définir deux triangles semblables, *deux triangles qui sont équiangles*, par exemple. Au point de vue pratique, il suffit de vérifier que les deux triangles considérés ont deux angles égaux chacun à chacun, puisque la somme des angles d'un triangle est constante.

Il existe pour les triangles d'autres caractères très-simples de similitude, utiles à connaître, et que nous allons indiquer.

THÉORÈME.

151. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun.*

Nous avons vu (57, 58) que deux angles qui avaient leurs

côtés parallèles ou perpendiculaires étaient égaux ou supplémentaires. Désignons les angles des deux triangles considérés par A et A', B et B', C et C'. On ne pourra faire sur les relations qui doivent lier ces angles deux à deux que les quatre hypothèses suivantes :

$$A + A' = 2^d, \quad B + B' = 2^d, \quad C + C' = 2^d.$$
$$A + A' = 2^d, \quad B + B' = 2^d, \quad C = C'.$$
$$A + A' = 2^d, \quad B = B', \quad C = C'.$$
$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$

La première hypothèse doit être rejetée, la somme des angles des deux triangles ne pouvant être égale à six droits. Elle ne peut pas non plus être égale à quatre droits augmentés de deux fois l'angle C : la seconde hypothèse est donc aussi inadmissible. La troisième hypothèse entraîne la condition $A = A'$: elle n'est donc qu'un cas particulier (celui où les triangles proposés sont rectangles) de la quatrième hypothèse, qui est la seule vraie. Les triangles considérés étant équiangles sont semblables (147).

Il faut remarquer que les côtés proportionnels sont toujours, dans les triangles semblables, opposés aux angles égaux. Dans le dernier cas examiné, les côtés homologues sont parallèles ou perpendiculaires entre eux.

THÉORÈME.

152. *Deux parallèles sont coupées en parties proportionnelles par une série de sécantes issues d'un même point* (*fig.* 109).

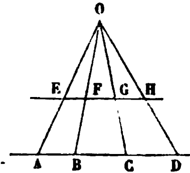


Fig. 109.

Soient les deux parallèles AD, EH, coupées par les sécantes OA, OB, OC, OD.

Les triangles OAB, OEF, sont semblables (146) et donnent

$$\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}.$$

De même, la similitude des triangles OBC, OFG, permet d'écrire

$$\frac{OB}{OF} = \frac{BC}{FG}.$$

On a donc

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}.$$

On prouverait de la même manière que

$$\frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}.$$

Réciproquement, *si les deux parallèles* AD, EH, *sont coupées proportionnellement par une série de sécantes* AE, BF, CG, DH, *ces sécantes aboutissent à un même point* O.

Supposons que les deux droites AE et CG se rencontrent en un certain point O. On a par hypothèse

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{FG}.$$

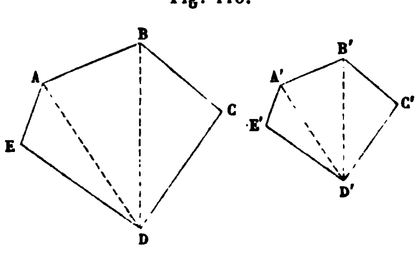
Joignons OF : cette ligne prolongée devra couper AC en parties proportionnelles aux segments EF et FG, d'après le théorème direct. Or AC est déjà divisée de cette manière au point B; OF prolongée passera donc par le point B (136), c'est-à-dire que les trois points B, F, O, sont en ligne droite. On prouverait de même que DH prolongée passe par le point O.

La *fig.* 109 suppose le point de concours des sécantes *extérieur* aux deux parallèles. Si ce point de concours était *intérieur*, la démonstration resterait la même; seulement, la disposition des parties proportionnelles serait inverse sur les deux parallèles.

THÉORÈME.

153. *Deux polygones, composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chaoun et semblablement disposés, sont semblables* (*fig.* 110).

Fig. 110.



Soient AED et A'E'D', ADB et A'D'B', BDC et B'D'C', deux séries de triangles respectivement semblables et semblablement disposés. Il faut démontrer que le polygone ABCDE, formé par les premiers triangles, est semblable au polygone A'B'C'D'E' formé par les seconds.

On voit d'abord que les angles des deux polygones sont égaux, soit comme angles homologues de deux triangles semblables, soit comme sommes d'angles homologues de plusieurs triangles semblables.

On voit ensuite que les côtés homologues des deux polygones sont proportionnels; car les triangles semblables considérés donnent successivement

$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{ED}{E'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'},$$

c'est-à-dire, en supprimant les rapports intermédiaires,

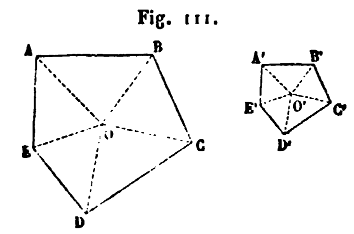
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

THÉORÈME.

154. Réciproquement, *deux polygones semblables peuvent toujours se décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés* (*fig.* 111).

Soient les deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E'. Prenons un point O quelconque dans l'intérieur du premier polygone, et décomposons-le en triangles en joignant ce point O à tous ses sommets. Il faut déterminer dans le second polygone le point O', homologue du point O. Pour cela, formons en A', avec A'B', un angle égal à l'angle BAO et, en B', un angle égal à l'angle ABO. Le triangle ABO et le triangle A'B'O' sont semblables (147), et le point O' est l'homologue du point O. Joignons le point O' à tous les sommets du polygone A'B'C'D'E'. Comparons les triangles BOC, B'O'C'. Les deux polygones étant semblables, l'angle B du premier est égal à l'angle B' du second; les deux triangles AOB, A'O'B', étant semblables par construction, l'angle ABO est égal à l'angle A'B'O'. L'angle OBC, différence des angles B et ABO, est donc égal à l'angle O'B'C', différence des angles B' et A'B'O'. La similitude des deux polygones entraîne d'ailleurs l'égalité

Fig. 111.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

et celle des deux triangles AOB, A′O′B′, donne

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'};$$

on a donc

$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Par suite, les deux triangles BOC, B′O′C′, sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

On prouvera de la même manière la similitude des triangles COD, C′O′D′, DOE, D′O′E′, EOA, E′O′A′.

SCOLIE.

155. Il faut remarquer que le point O pourrait se confondre avec l'un des sommets A du polygone ABCDE; son homologue O′ se confondrait alors avec le sommet A′. Les deux polygones seraient divisés en triangles semblables par les diagonales homologues partant des sommets A et A′. Cette remarque prouve que, dans deux polygones semblables, le rapport de deux diagonales homologues est égal au rapport de similitude des deux polygones. *Ce rapport est celui de deux lignes homologues tracées d'une manière quelconque dans les deux polygones.*

Le point O pourrait être *extérieur* au polygone ABCDE. Le même théorème subsisterait, en convenant de regarder le polygone comme composé d'une série de triangles, les uns *additifs*, les autres *soustractifs*. Ainsi (*fig.* 112) on pourra regarder le polygone ABCDE comme composé des triangles additifs SAB, SAE, SED, et des triangles soustractifs SBC, SCD. Le raisonnement sera le même que précédemment.

156. Supposons que les polygones considérés aient n côtés. En prenant pour centres de décomposition deux sommets homologues, on les partagera en $(n-2)$ triangles semblables; et, comme il faut deux conditions pour que deux triangles soient semblables, la similitude des deux polygones exigera $2(n-2)$ ou $2n-4$ conditions.

Nous avons vu précédemment (66) que l'égalité de deux polygones de n côtés exigeait en général $2n-3$ conditions. La *similitude* demande donc une condition de moins que l'*égalité*; par suite, deux polygones dont une seule condition

entraîne l'égalité sont nécessairement semblables quand ils ne sont pas égaux.

THÉORÈME.

157. *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude des deux polygones* (*fig.* 110).

Les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', étant semblables, on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Un théorème connu (Tome I, *Arithm.*, 386) permet donc de poser immédiatement

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Le numérateur du premier membre de l'égalité obtenue représente la somme des côtés du polygone ABCDE, c'est-à-dire son *périmètre* P; le dénominateur de ce même premier membre représente le périmètre P' du polygone A'B'C'D'E'. On a donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

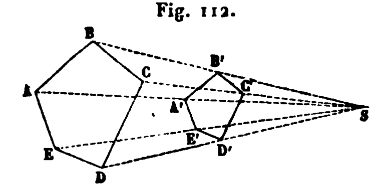
THÉORÈME.

158. *Si l'on joint un point quelconque* S *à tous les sommets d'un polygone* ABCDE, *et si l'on prend sur les droites* SA, SB, SC,..., *des points* A', B', C',..., *tels, qu'on ait*

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SD'} = \frac{SE}{SE'},$$

les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', *sont semblables* (*fig.* 112).

Fig. 112.



En effet, les deux triangles SAB, SA'B', ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables; le côté AB est parallèle au côté A'B', et l'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'}.$$

En comparant les deux triangles SBC, SB'C', on prouvera de

même le parallélisme des côtés BC, B′C′, et l'égalité des rapports $\frac{BC}{B'C'}$ et $\frac{SB}{SB'}$, c'est-à-dire celle des rapports $\frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{BC}{B'C'}$, etc. Les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′, ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ont tous leurs angles égaux; ils ont, de plus, tous leurs côtés proportionnels : ils sont donc semblables.

Remarquons que les points A′, B′, C′, ..., peuvent être pris soit sur les côtés SA, SB, SC,..., soit sur les prolongements de ces côtés : le point S s'appelle *centre de similitude*, les droites SA, SA′, SB, SB′,..., sont les *rayons vecteurs* des points A, A′, B, B′,.... Lorsque les deux polygones sont du même côté du point S, ils sont *semblablement placés;* lorsqu'ils sont de part et d'autre du point S, ils sont *inversement placés* (*fig.* 113). Dans le premier cas, la similitude est *directe;* dans le second cas, elle est *inverse.*

Pour abréger, on donne le nom d'*homothétie* à la similitude de forme et de position qu'on vient d'examiner. Les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 112 et 113) sont dits *homothétiques*, le point S est le *centre d'homothétie directe ou inverse*, le rapport constant $\frac{SA}{SA'}$ est le *rapport de similitude* ou d'*homothétie.*

Quand deux polygones sont homothétiques, les droites qui joignent les points homologues deux à deux sont parallèles et leur rapport est égal au rapport d'homothétie.

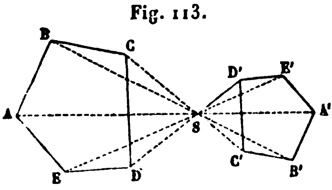
Quand deux polygones sont homothétiques inverses, il suffit évidemment, pour les rendre homothétiques directs, de faire tourner l'un d'eux de 180° autour du centre d'homothétie.

En faisant varier le rapport d'homothétie de 0 à ∞, on obtient tous les polygones semblables à un polygone donné.

THÉORÈME.

159. Réciproquement, *si deux polygones semblables ont leurs côtés parallèles, les droites qui joignent les sommets homologues se croisent en un même point qui est le centre d'homothétie des deux polygones* (*fig.* 113).

Fig. 113.



Soient les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′, qui remplissent les conditions de l'é-

noncé. Joignons AA′ et BB′. Soit S le point de rencontre de ces deux droites. Les deux triangles SAB, SA′B′, sont semblables comme équiangles, puisque AB et A′B′ sont parallèles, et l'on a

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Joignons SC et SC′, et comparons les triangles BSC, B′SC′. L'angle en B est égal à l'angle en B′, à cause des parallèles BC, B′C′. On a d'ailleurs

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

par suite de la similitude des polygones. On a donc aussi, d'après ce qui précède,

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BS}{B'S};$$

et les deux triangles BSC, B′SC′, sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Ils sont donc équiangles, et les rayons SC et SC′ ne forment qu'une seule et même ligne droite. On prouvera de même que DD′ et EE′ passent par le point S.

Plusieurs instruments ingénieux employés pour réduire les dessins sont fondés sur les théorèmes que nous venons d'établir : nous citerons le *pantographe*.

SCOLIE.

160. Ce qu'on vient de dire pour un polygone peut évidemment s'appliquer à un système quelconque de points situés dans un plan.

Suivant que le système proposé est formé de points isolés ou se succédant d'une manière continue, le système homothétique du système donné est lui-même formé de points isolés ou continus. Les propriétés précédentes s'étendent ainsi aux lignes courbes.

161. Lorsqu'on transporte l'un des deux systèmes homothétiques parallèlement à lui-même, l'homothétie n'est pas altérée.

Par conséquent, *les extrémités de droites concourantes et les extrémités d'autres droites concourantes respectivement*

parallèles et proportionnelles aux premières, forment deux systèmes homothétiques.

L'homothétie des deux systèmes est *directe* ou *inverse*, suivant que les droites parallèles sont dirigées dans le même sens ou en sens contraires.

THÉORÈME.

162. *Deux circonférences quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses* (*fig.* 114).

En effet, les rayons de ces circonférences peuvent être re-

Fig. 114.

gardés comme deux à deux parallèles et de même sens ou parallèles et de sens contraires, et leur rapport K est constant (161).

Pour avoir les deux centres d'homothétie de ces circonférences O et O', il suffit de mener parallèlement (*fig.* 114) le rayon OA de l'une et le diamètre $A'O'A_1$ de l'autre. Les droites AA' et AA_1 coupent la ligne des centres OO' aux points S et S_1, et l'on a

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{SA}{SA'} = K, \quad \frac{S_1O}{S_1O'} = \frac{OA}{O'A_1} = \frac{S_1A}{S_1A_1} = K.$$

Le point S est donc le centre d'homothétie directe et le point S_1 le centre d'homothétie inverse, puisque tous les rayons vecteurs tels que AA' viendront se croiser en S et, tous les rayons vecteurs tels que AA_1, en S_1 (136).

Les relations précédentes donnant

$$\frac{S_1O}{S_1O'} = \frac{SO}{SO'},$$

les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la distance des centres des deux circonférences (137).

Ce qui précède fournit un procédé très-simple pour diviser

harmoniquement une droite donnée dans un rapport donné. On n'a pas besoin de tracer les deux circonférences : il suffit que les parallèles OA et O'A' ou O'A_1 soient dans le rapport voulu.

SCOLIE.

163. Les rayons des deux circonférences menés aux points de contact d'une tangente commune étant parallèles, *les tangentes communes extérieures passent par le centre d'homothétie directe et les tangentes communes intérieures, par le centre d'homothétie inverse.*

De là, un nouveau procédé pour construire les tangentes communes à deux circonférences. Il suffit de mener par les centres d'homothétie des tangentes à l'une des circonférences: elles le seront nécessairement à l'autre circonférence.

Lorsque deux cercles sont tangents *extérieurement,* leur point de contact devient évidemment le centre d'homothétie *inverse;* s'ils sont tangents *intérieurement,* leur point de contact devient le centre d'homothétie *directe.*

THÉORÈME.

164. *Deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie correspondants sont situés en ligne droite* (*fig.* 115 *et* 116).

Soient les deux systèmes P' et P'', homothétiques au sys-

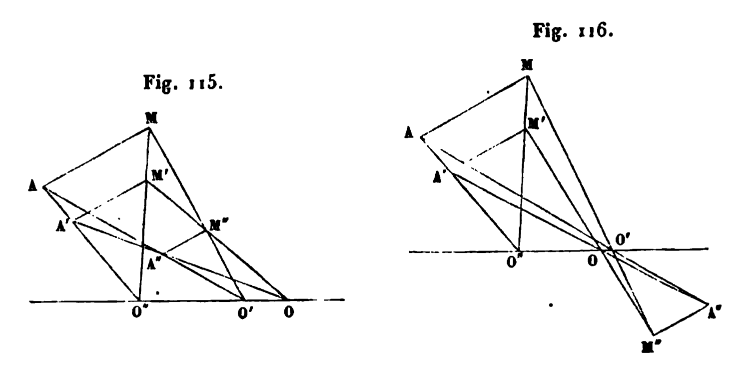


Fig. 115.

Fig. 116.

tème P. Prenons dans les trois systèmes les points homologues A, A', A''; joignons A à un point quelconque M du

système P, ainsi que les points A′ et A″ aux points M′ et M″, homologues de M dans les systèmes P′ et P″.

Les systèmes P et P′ étant homothétiques, AM et A′M′ sont parallèles et l'on a $\frac{AM}{A'M'} = K''$, rapport d'homothétie des deux systèmes (158). De même, les systèmes P et P″ étant homothétiques, AM et A″M″ sont parallèles et l'on a $\frac{AM}{A''M''} = K'$, rapport d'homothétie des deux systèmes. Il en résulte que A′M′ et A″M″ sont parallèles et dans le rapport constant $\frac{K'}{K''}$. Les deux systèmes P′ et P″ sont donc eux-mêmes homothétiques (159).

Les droites AA′ et MM′ se croisent d'ailleurs au point O″, centre d'homothétie des systèmes P et P′. On détermine de même les centres d'homothétie O′ et O des systèmes P et P″, P′ et P″.

Comme un centre d'homothétie est à lui-même son homologue dans les deux systèmes considérés et que deux droites homologues sont toujours parallèles, toute droite passant par un centre d'homothétie est à elle-même son homologue dans les deux systèmes.

D'après cela, la droite O″O′ étant à elle-même son homologue relativement aux systèmes P et P′ et aux systèmes P et P″, elle est aussi son homologue relativement aux systèmes P′ et P″, de sorte qu'elle passe par leur centre O. La droite des centres OO′O″ est appelée l'*axe d'homothétie* des trois systèmes proposés.

Si l'homothétie des systèmes P et P′, P et P″ est directe, celle des deux systèmes P′ et P″ est aussi directe (*fig.* 115). Si l'homothétie des systèmes P et P′ étant directe, celle des systèmes P et P″ est inverse, il en est de même de celle des systèmes P′ et P″ (*fig.* 116). *Quand on considère trois systèmes homothétiques deux à deux, il y en a donc toujours un nombre impair dont l'homothétie est directe.*

COROLLAIRE.

165. Trois circonférences quelconques, prises deux à deux, sont doublement homothétiques (162), c'est-à-dire admettent deux centres d'homothétie, l'un direct, l'autre inverse. On obtient ainsi six centres d'homothétie, trois directs et trois

inverses. D'après ce qui précède, on aura à associer les trois centres directs, ou bien un centre direct avec les deux centres inverses qui ne lui correspondent pas. D'ailleurs, les trois centres associés seront toujours en ligne droite. Les trois circonférences proposées admettent donc *quatre axes d'homothétie :* celui qui contient les trois centres directs est qualifié d'*axe direct*, et les trois autres sont qualifiés d'*axes inverses.*

III. — Relations métriques entre les différentes parties d'un triangle.

166. Pour simplifier les énoncés, on appelle en Géométrie *produit de deux lignes* le produit des nombres qui expriment les mesures de ces lignes par rapport à la même unité; *carré d'une ligne*, le carré du nombre qui exprime sa mesure.

Si l'on a

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

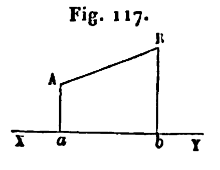
A, B, C, D, représentant des longueurs ou les nombres qui les mesurent lorsqu'on les rapporte à une même unité, on dit que D est une *quatrième proportionnelle* à A, B, C.

Si les moyens B et C sont égaux, on a

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{D};$$

D est alors une *troisième proportionnelle* à A et B. Dans ce cas, B, à son tour, est une *moyenne proportionnelle* entre A et D, et l'on a $B^2 = A \times D$.

Fig. 117.



On appelle *projection* d'un point A sur une ligne droite XY le pied *a* de la perpendiculaire abaissée du point A sur XY. Si l'on donne une droite limitée AB, sa projection sur XY est la longueur *ab* qui sépare les projections de ses points extrêmes (*fig.* 117).

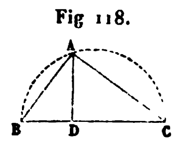
THÉORÈME.

167. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, chaque côté*

de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse elle-même, la perpendiculaire abaissée est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse (*fig.* 118).

Soient le triangle rectangle ABC et la perpendiculaire AD abaissée du sommet A sur l'hypoténuse BC. Cette perpendiculaire partage le triangle proposé en deux triangles partiels, qui lui sont semblables et qui sont, par conséquent, semblables entre eux. En effet, les deux triangles rectangles ABC et ABD ayant l'angle aigu B commun sont équiangles et semblables; il en est de même des triangles rectangles ABC et ADC, qui ont l'angle aigu C commun.

Fig 118.



Si l'on compare successivement les triangles ABD et ABC, ADC et ABC, on peut donc écrire

$$\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}, \quad \text{d'où} \quad AB^2=BD.BC;$$

$$\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BC}, \quad \text{d'où} \quad AC^2=CD.BC.$$

Il faut se rappeler que les côtés proportionnels sont les côtés opposés aux angles égaux.

Si l'on compare ensuite les triangles partiels ABD, ADC, on a

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}, \quad \text{d'où} \quad AD^2=BD.CD.$$

Si l'on décrit un cercle sur BC comme diamètre, il passera par le sommet A (113); on peut, par conséquent, énoncer sous la forme suivante les propriétés démontrées :

Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre; la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur un diamètré est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.

THÉORÈME.

168. *Si l'on exprime numériquement, par rapport à une même unité, les trois côtés d'un triangle rectangle, le carré du nombre qui représente l'hypoténuse est égal à la somme*

des carrés des nombres qui représentent les deux côtés de l'angle droit (*fig.* 118).

Le théorème précédent vient de nous donner les deux égalités

$$AB^2 = BD.BC,$$
$$AC^2 = CD.BC.$$

Ajoutons-les membre à membre, et mettons dans le second membre BC en facteur commun; nous aurons

$$AB^2 + AC^2 = (BD + CD).BC,$$

c'est-à-dire

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

COROLLAIRES.

169. On peut facilement, en ayant égard à cette relation, *trouver l'un des côtés d'un triangle rectangle, lorsqu'on connaît les deux autres.*

Si l'on donne les côtés de l'angle droit égaux à 4^M et à 3^M, on a immédiatement, en représentant l'hypoténuse par z,

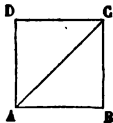
$$z^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad \text{d'où} \quad z = 5.$$

Si l'on donne l'hypoténuse égale à 13^M et l'un des côtés de l'angle droit égal à 5^M, on a immédiatement, en représentant par x le côté inconnu,

$$13^2 = 5^2 + x^2, \quad \text{d'où} \quad x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \quad \text{et} \quad x = 12.$$

Le rapport de la diagonale du carré à son côté est exprimé par le nombre incommensurable $\sqrt{2}$.

Fig. 119.



Le triangle ABC (*fig.* 119) étant rectangle et isocèle, donne

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2,$$

ou

$$\frac{AC^2}{AB^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

On doit remarquer que les théorèmes relatifs à la similitude des triangles (**147**, **148**, **149**), joints à celui du carré de l'hypoténuse, sont les plus importants de la Géométrie. Car toutes les figures peuvent se décomposer en triangles quelconques, et tout triangle quelconque peut se décomposer en

deux triangles rectangles par une perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé. On a donc constamment à appliquer les propositions indiquées.

THÉORÈME.

170. *Dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de l'un d'eux par la projection de l'autre côté sur la direction du premier* (*fig.* 120).

Fig. 120.

Soit le triangle ABC dans lequel l'angle C est aigu. Considérons le côté AB opposé à cet angle. Du sommet A, abaissons sur le côté opposé la perpendiculaire AD : elle tombe en dedans ou en dehors du triangle, suivant que l'angle B est aigu ou obtus. Dans le premier cas on a

$$DB = BC - CD;$$

dans le second,

$$DB = CD - BC.$$

Dans les deux cas, on a donc (t. I, *Arithm.*, 275)

$$DB^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne d'ailleurs

$$AB^2 = AD^2 + DB^2,$$

c'est-à-dire

$$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ADC permettant de remplacer

$$AD^2 + CD^2 \text{ par } AC^2,$$

il vient finalement

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.CD.$$

THÉORÈME.

171. *Dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus le double produit de l'un d'eux par la projection de l'autre côté sur la direction du premier* (*fig.* 121).

Soit le triangle ABC dans lequel l'angle C est obtus. Considérons le côté AB opposé à cet angle. Du sommet A, abaissons sur le côté opposé la perpendiculaire AD : elle tombe en dehors du triangle, et l'on a

Fig. 121.

$$DB = BC + CD,$$

d'où (t. I, *Arithm.*, 275)

$$DB^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne d'ailleurs

$$AB^2 = AD^2 + DB^2.$$

On a donc, en remplaçant DB^2 par sa valeur,

$$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ADC permettant de substituer AC^2 à $AD^2 + CD^2$, il vient finalement

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD.$$

COROLLAIRES.

172. Si l'on rapproche les théorèmes précédents, on voit que *l'angle d'un triangle est nécessairement aigu, obtus ou droit, suivant que le carré du côté opposé est inférieur, supérieur ou égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Étant donnés $AB = 7^M$, $AC = 4^M$, $BC = 5^M$, proposons-nous de déterminer la hauteur du sommet A au-dessus du côté BC ou la perpendiculaire AD (*fig.* 121). Comme 7^2 l'emporte sur $4^2 + 5^2$, l'angle opposé au côté AB est obtus, et l'on peut poser

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD,$$

c'est-à-dire

$$49 = 25 + 16 + 10CD.$$

On en déduit

$$CD = 0,8.$$

Le triangle rectangle ADC donne alors

$$AD = \sqrt{16 - 0,64} \quad \text{ou} \quad AD = \sqrt{15,36} = 3,919,$$

à moins de 0,0005 par défaut.

THÉORÈME.

173. *Dans tout triangle, la somme des carrés de deux côtés est égale à deux fois la somme des carrés de la moitié du troisième côté et de la médiane correspondante* (*fig.* 122).

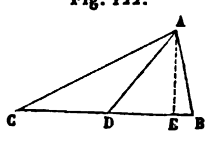


Fig. 122.

Soit le triangle ABC : la *médiane* qui correspond au côté BC est la droite AD qui joint le sommet A au milieu D du côté BC. L'un des angles en D est aigu, l'autre est obtus, sauf le cas du triangle isocèle; mais alors le théorème est évident. Le triangle ADC donne (171)

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD.DE.$$

Le triangle ADB donne à son tour (170)

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.DE.$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre et si l'on remarque que CD = BD, il vient, en réduisant,

$$AC^2 + AB^2 = 2(CD^2 + AD^2).$$

COROLLAIRES.

174. Si la droite BC ne change pas et si la somme des carrés des côtés AC et AB reste constante, ces côtés variant eux-mêmes, l'égalité précédente prouve que la valeur de la médiane AD reste constante. Par conséquent, *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante est une circonférence de cercle qui a pour centre le milieu de la droite qui joint les deux points fixes.*

Si l'on a

$$AC^2 + AB^2 = m^2,$$

il vient

$$m^2 = 2(CD^2 + AD^2), \quad \text{d'où} \quad AD = \sqrt{\frac{m^2}{2} - CD^2}.$$

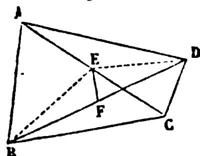
Telle est l'expression du rayon de la circonférence. Le problème est impossible, lorsqu'on a $m^2 < 2CD^2$.

175. *La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales, aug-*

mentée de quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales (*fig.* 123).

Soit le quadrilatère ABCD. Soient E et F les milieux des diagonales AC et BD. Les deux triangles ADC, ABC, donnent

Fig. 123.



$$AD^2 + DC^2 = 2(AE^2 + DE^2),$$
$$AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2).$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre, il vient

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AE^2 + 2(BE^2 + DE^2).$$

Le triangle BED donne d'ailleurs

$$2(BE^2 + DE^2) = 4(BF^2 + EF^2).$$

On a donc

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AE^2 + 4BF^2 + 4EF^2.$$

Mais de $2AE = AC$, on déduit $4AE^2 = AC^2$; de même, de $2BF = BD$, on déduit $4BF^2 = BD^2$. Il reste donc

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

S'il s'agit d'un parallélogramme, la distance EF devient nulle. Par conséquent, *dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales;* et réciproquement, *tout quadrilatère qui remplit cette condition est un parallélogramme.*

THÉORÈME.

176. *Dans tout triangle, la différence des carrés de deux côtés est égale au double produit du troisième côté par la projection sur sa direction de la médiane correspondante* (*fig.* 122).

Nous avons déjà trouvé (173) les deux égalités

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD.DE,$$
$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.DE.$$

Retranchons-les membre à membre, en remarquant que

CD = BD ; il viendra

$$AC^2 - AB^2 = 4CD.DE,$$

c'est-à-dire

$$AC^2 - AB^2 = 2BC.DE.$$

COROLLAIRE.

177. Remarquons que, si les points B et C restent fixes, tandis que, les côtés AC et AB variant, la différence de leurs carrés demeure constante, l'égalité précédente prouve que la projection DE ou la position du point E reste aussi constante. Par conséquent, *le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante est une perpendiculaire à la droite qui joint les points fixes.*

Si l'on a

$$AC^2 - AB^2 = m^2,$$

il vient

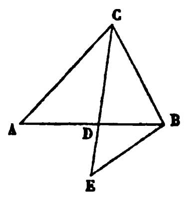
$$m^2 = 2BC.DE, \quad \text{d'où} \quad DE = \frac{m^2}{2BC}.$$

Telle est la valeur de DE. On portera cette valeur de DE, à partir du point D milieu de BC, à droite ou à gauche de ce point, et le lieu se composera en réalité des deux perpendiculaires élevées à BC par les points obtenus.

THÉORÈME.

178. *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de l'angle qu'ils forment, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté* (*fig.* 124).

Fig. 124.



Soient le triangle ABC et la bissectrice CD de l'angle C. Formons l'angle DBE égal à la moitié de l'angle C. Les deux triangles ACD et DBE seront évidemment équiangles et semblables. L'angle CAD sera donc égal à l'angle DEB, ce qui entraîne la similitude des deux triangles ACD, CBE. On a, par suite,

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CB}, \quad \text{d'où} \quad AC.CB = CD.CE.$$

On peut remplacer CE par CD + DE : on a alors

$$AC.CB = CD^2 + CD.DE.$$

La similitude des triangles ACD, DBE, donne d'ailleurs

$$\frac{CD}{DB}=\frac{AD}{DE}, \quad \text{d'où} \quad CD.DE=AD.DB.$$

En substituant dans l'égalité précédente, il vient finalement

$$AC.CB=CD^2+AD.DB.$$

THÉORÈME.

179. *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur qui correspond au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit au triangle* (*fig.* 125).

Fig. 125.

Lorsqu'un triangle est inscrit dans une circonférence, on dit que la circonférence lui est *circonscrite*.

Soit le triangle ABC inscrit dans la circonférence O, soit AE perpendiculaire sur BC. Les deux triangles rectangles ABD, AEC sont semblables; car l'angle ADB et l'angle ACE sont inscrits dans le même segment. On a donc

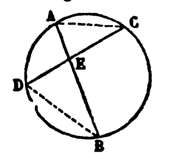
$$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}, \quad \text{d'où} \quad AB.AC=AE.AD.$$

IV. — Des lignes proportionnelles dans le cercle.

THÉORÈME.

180. *Si d'un point pris dans le plan d'un cercle on lui mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux intersections de chaque sécante avec la circonférence est constant* (*fig.* 126).

Fig. 126.



Supposons d'abord le point donné intérieur au cercle. Par ce point E, menons deux cordes quelconques AB et CD. Joignons AC et BD. Nous formerons deux triangles AEC, DEB; ces triangles sont équiangles, car les angles en E sont opposés par le sommet, et les angles en C et en B sont égaux comme inscrits dans le même segment. La similitude des triangles con-

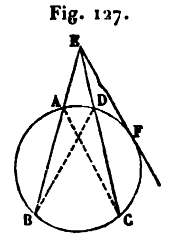
sidérés permet donc de poser

$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}, \quad \text{d'où} \quad AE.BE = CE.DE.$$

On énonce quelquefois cette importante propriété en disant que *deux cordes quelconques se coupent dans une circonférence en parties inversement proportionnelles.*

Supposons maintenant le point donné extérieur au cercle. Par ce point E, menons deux sécantes quelconques EAB, EDC (*fig.* 127). Joignons AC et BD. Les deux triangles AEC, DEB, sont semblables. En effet, ils ont l'angle E commun, et les angles C et B sont égaux comme inscrits dans le même segment. On peut donc poser

Fig. 127.



$$\frac{EC}{EB} = \frac{EA}{ED}, \quad \text{d'où} \quad EC.ED = EB.EA.$$

On énonce quelquefois cette propriété en disant que *deux sécantes issues d'un même point sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

COROLLAIRE.

181. Si l'on conçoit que la sécante EC tourne autour du point E de manière à devenir la tangente EF, le théorème ne cesse pas d'être vrai; mais, à la limite, la sécante entière se confond avec sa partie extérieure. On a donc

$$EF^2 = EB.EA.$$

Ce qui prouve que, *lorsqu'une tangente et une sécante partent d'un même point, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure* (*fig.* 128).

Fig. 128.

On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit. Soient la tangente EF et la sécante EAB. Joignons AF et BF. Les deux triangles EBF, EAF, sont semblables. En effet, ils ont l'angle E commun, et l'angle EBF est égal à l'angle EFA, puisque ces deux angles ont pour mesure la moitié du même arc AF. On a donc

$$\frac{EB}{EF} = \frac{EF}{EA}, \quad \text{d'où} \quad EF^2 = EB.EA.$$

THÉORÈME.

182. Réciproquement, *lorsque deux droites* AD, BC, *prolongées s'il y a lieu, se coupent en un point* E, *tel qu'on ait*

$$AE.DE = BE.CE,$$

leurs extrémités A, D, B, C, *sont situées sur une même circonférence* (*fig.* 129).

Fig. 129.

Divisons les deux membres de l'égalité donnée par BE.DE; il viendra

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}.$$

Les deux triangles ACE, BDE, ont donc un angle commun ou un angle égal compris entre côtés proportionnels. Ces triangles, étant alors semblables, sont équiangles. Par conséquent, si l'on décrit sur CD comme corde un segment capable de l'angle CAD, la circonférence qui passe par les trois sommets C, A, D, passe aussi par le quatrième sommet B; en effet, les angles en A et en B sont égaux, d'après ce qu'on vient de dire.

On prouverait de même que, si par rapport à l'angle E (*fig.* 128) les trois points A, B, F, satisfont à la relation

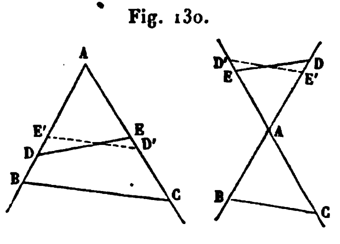
$$EF^2 = EB.EA,$$

la circonférence déterminée par ces trois points est tangente en F au côté EF.

SCOLIE.

183. Lorsque deux droites forment respectivement des angles égaux avec les côtés d'un même angle, on leur donne le nom de droites *antiparallèles*.

Fig. 130.



Soit l'angle A coupé par les droites BC, DE; si les angles ABC, AED, sont égaux, les droites BC et DE sont antiparallèles (*fig.* 130). Prenons AE' = AE et AD' = AD, joignons D'E' : les deux triangles ADE, AD'E', sont égaux, et l'angle AED est égal à l'angle AE'D'. L'angle ABC est donc lui-même égal à l'angle AE'D',

et la droite BC est parallèle à la droite E′D′. On a donc

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{d'où} \quad AB.AD = AC.AE.$$

Les distances du sommet de l'angle aux points d'intersection de chacun de ses côtés avec les deux droites antiparallèles forment donc *un produit constant.*

Si le point D se confondait avec le point B, on aurait

$$AB^2 = AC.AE.$$

Lorsque les deux droites antiparallèles se croisent en un même point sur l'un des côtés de l'angle, la distance du sommet à ce point est donc *moyenne proportionnelle entre les segments comptés sur l'autre côté de l'angle.*

La propriété qu'on vient de démontrer permet de rendre plus rapide l'exposition de quelques-uns des théorèmes précédents. Considérons, par exemple (*fig.* 126), les cordes AB, CD. Les angles en A et en D étant égaux comme inscrits dans le même segment, les droites AC, DB, sont antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle E; on a donc immédiatement

$$AE.BE = CE.DE.$$

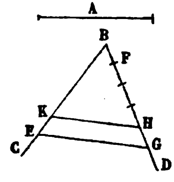
On voit que deux droites antiparallèles déterminent deux triangles semblables, qui deviennent semblablement placés par le *retournement* de l'un d'eux.

V. — Problèmes sur les lignes proportionnelles.

PROBLÈME.

184. *Diviser une ligne droite en un certain nombre de parties égales* (*fig.* 131).

Fig. 131.



Soit A à diviser en cinq parties égales. Formons un angle quelconque CBD et, sur le côté BC, portons une longueur BE égale à la droite A. Sur l'autre côté BD, marquons à la suite l'une de l'autre cinq fois de suite la longueur arbitraire BF. Soient H et G les deux derniers points de division. Joignons GE et,

par le point H, menons HK parallèle à GE; EK sera la cinquième partie de BE ou de A. On a, en effet, à cause des parallèles,

$$\frac{EK}{BE}=\frac{GH}{BG}=\frac{1}{5}.$$

PROBLÈME.

185. *Diviser une ligne droite en parties proportionnelles à des lignes données ou à des nombres donnés* (*fig.* 132).

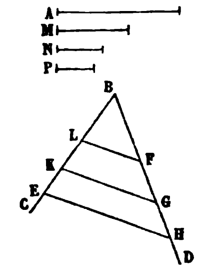


Fig. 132.

Soit à diviser la droite A en parties proportionnelles aux droites M, N, P. Formons un angle quelconque CBD et, sur le côté BC, portons une longueur BE égale à A. Sur l'autre côté DB, marquons successivement des longueurs BF, FG, GH, respectivement égales aux longueurs M, N, P. Joignons le point H au point E, et menons à la droite HE les parallèles GK, FL. La droite BE ou A est divisée aux points L et K, comme l'exige l'énoncé. On a, en effet, à cause des parallèles,

$$\frac{BL}{LK}=\frac{BF}{FG}=\frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{LK}{KE}=\frac{FG}{GH}=\frac{N}{P},$$

d'où

$$\frac{BL}{M}=\frac{LK}{N}=\frac{KE}{P}.$$

Si l'on devait partager A proportionnellement à des nombres donnés, on représenterait ces nombres par des droites en faisant choix d'une certaine unité, et l'on opérerait comme on vient de l'indiquer.

PROBLÈME.

186. *Construire la quatrième proportionnelle à trois droites données* (*fig.* 133).

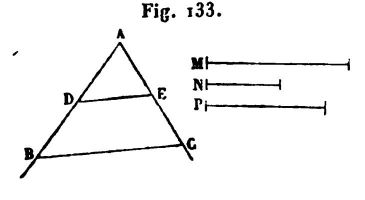


Fig. 133.

Soient M, N, P, les trois droites données. Formons un angle quelconque BAC. Sur le côté AB, prenons AB = M et AD = N; puis, sur le côté AC, AC = P. Joignons BC et, par le point D, menons DE parallèle à BC. AE est la quatrième

proportionnelle demandée, car on a

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N}=\frac{P}{AE} \quad (166).$$

Si les lignes N et P étaient égales, AE serait la troisième proportionnelle aux lignes M et N.

PROBLÈME.

187. *Construire la moyenne proportionnelle à deux lignes données* (*fig.* 134).

Fig. 134.

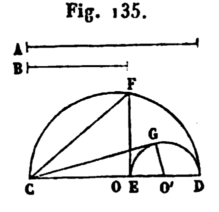
Soient les deux lignes données A et B. Portons ces lignes de C en D et de D en E, sur une droite indéfinie. Sur CE comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, et soit DF perpendiculaire à CE; DF est la moyenne proportionnelle demandée. On a, en effet,

$$DF^2 = CD.DE = A.B \quad (167).$$

Si les lignes A et B sont inégales, le rayon OF est toujours plus grand que la perpendiculaire FD. On vérifie ainsi géométriquement que *la moyenne proportionnelle à deux lignes inégales est plus petite que leur moyenne arithmétique.*

Lorsque les lignes A et B sont trop grandes pour qu'il soit commode de les porter à la suite l'une de l'autre, on opère autrement. On prend sur une droite indéfinie (*fig.* 135) CD = A, CE = B. On décrit sur CD comme diamètre une demi-circonférence et, au point E, on élève EF perpendiculaire au diamètre. La moyenne proportionnelle demandée est la corde CF. On a, en effet,

Fig. 135.



$$CF^2 = CD.CE = A.B \quad (167).$$

On aurait pu aussi, dans le cas considéré, décrire une demi-circonférence sur ED comme diamètre : ED représente la différence des deux lignes données. Si l'on mène, par le point C, une tangente CG à cette circonférence, CG représente la moyenne proportionnelle cherchée, car on a encore

$$CG^2 = CD.CE = A.B \quad (181).$$

On a évidemment $CO' = B + \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2}$. De même, $O'G = O'D = \frac{A-B}{2}$. Le triangle CO'G est d'ailleurs rectangle en G. Il en résulte que *la demi-somme de deux lignes, leur moyenne proportionnelle et leur demi-différence peuvent être représentées par les trois côtés d'un triangle rectangle.*

PROBLEME.

188. *Construire deux droites, connaissant leur somme et leur produit* (*fig.* 136).

Soit BC la somme donnée; soit A la droite dont le carré égale le produit donné. Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. Au point B, élevons sur le diamètre BC la perpendiculaire BD égale à A. Par le point D ainsi obtenu, menons la parallèle DEE' au diamètre BC. Cette parallèle coupe généralement la circonférence en deux points E et E'; par ces points, abaissons sur le diamètre BC les perpendiculaires EF, E'F'. Les deux droites demandées sont BF et FC ou BF' et F'C : ces deux solutions n'en font qu'une seule, car on a évidemment $BF' = FC$ et $F'C = BF$; on a bien d'ailleurs $BF + FC = BC$ et $BF.FC = EF^2 = A^2$.

Fig. 136.

Pour que la parallèle DEE' rencontre la circonférence, il faut que A ne surpasse pas le rayon de la circonférence ou la moitié de la somme BC : si A est égale à $\frac{BC}{2}$, la parallèle devient tangente à la circonférence, et son point de contact se projette au centre. *Le produit de deux lignes dont la somme est constante est* donc *maximum lorsque ces deux lignes sont égales.* Nous retrouvons ainsi par la Géométrie un théorème déjà démontré au point de vue algébrique (t. I, *Alg.*, 285).

PROBLÈME.

189. *Construire deux droites, connaissant leur différence et leur produit* (*fig.* 137).

Soit BC la différence donnée, soit A la droite dont le carré égale le produit donné. Sur BC comme diamètre, décrivons une circonférence. Au point B, élevons sur le diamètre BC la

perpendiculaire BD égale à A. Par le point D ainsi obtenu et le centre de la circonférence, menons la sécante DEF. Les deux lignes demandées sont la sécante entière DF et sa partie extérieure DE. On a, en effet,

Fig. 137.

$$DF - DE = EF = BC$$

et

$$DF . DE = DB^2 = A^2 \quad (181).$$

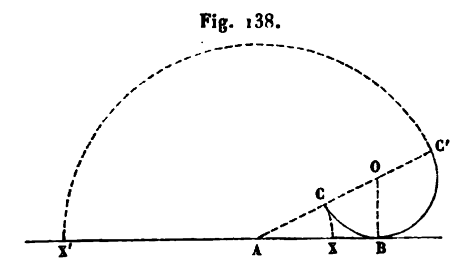
Les deux problèmes que nous venons de résoudre permettent de *construire* les racines des équations du second degré.

PROBLÈME.

190. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison* (*fig.* 138).

Diviser une droite AB en moyenne et extrême raison, c'est trouver, sur cette droite ou sur son prolongement, un point

Fig. 138.



dont la distance à l'une des extrémités A soit moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité B et la droite AB elle-même.

Supposons qu'un point X situé entre A et B réponde à la question. On a alors à considérer les rapports $\frac{XB}{XA}$ et $\frac{XA}{AB}$. Quand le point X parcourt AB, le premier rapport *diminue d'une manière continue* depuis l'infini jusqu'à zéro, tandis que le second rapport *augmente d'une manière continue* depuis zéro jusqu'à 1. Il y a donc entre A et B un point X et un seul répondant à la question, et pour lequel on a

$$(1) \qquad \frac{XB}{XA} = \frac{XA}{AB} \quad \text{ou} \quad \overline{XA}^2 = XB\ AB.$$

Supposons qu'un point X', situé sur le prolongement de la droite AB, *à gauche* de A, réponde à la question. On a alors à considérer les rapports $\frac{X'B}{X'A}$ et $\frac{X'A}{AB}$. Quand le point X' parcourt X'A, en supposant d'abord X' aussi loin que possible à gauche de A, le premier rapport, qu'on peut écrire

$$\frac{X'A + AB}{X'A} = 1 + \frac{AB}{X'A},$$

augmente d'une manière continue depuis 1 jusqu'à l'infini, tandis que le second rapport *diminue d'une manière continue* depuis l'infini jusqu'à zéro. Il y a donc, à gauche de A, un point X' et un seul répondant à la question, et pour lequel on a

$$(2) \qquad \frac{X'B}{X'A} = \frac{X'A}{AB} \quad \text{ou} \quad \overline{X'A}^2 = X'B.AB.$$

Il est d'ailleurs évident que, sur le prolongement de AB *à droite* de B, aucun point X″ ne peut répondre à la question, la distance X″A surpassant alors à la fois la distance X″B et la droite AB.

Pour déterminer les deux points X et X' qui, seuls, répondent à la question, retranchons membre à membre les relations (1) et (2). Il vient

$$\overline{X'A}^2 - \overline{XA}^2 = (X'B - XB)\,AB.$$

Mais le premier membre de cette égalité équivaut à

$$(X'A + XA)(X'A - XA),$$

c'est-à-dire à XX'(X'A — XA), tandis que le second membre est XX'.AB. En supprimant le facteur commun XX', on a donc

$$(3) \qquad X'A - XA = AB.$$

D'ailleurs, la relation (1) donne (t. I, *Arithm.*, 393)

$$\frac{XB + XA}{XA} = \frac{XA + AB}{AB},$$

ou, d'après (3),

$$\frac{AB}{XA} = \frac{X'A}{AB},$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad X'A.XA = \overline{AB}^2.$$

La recherche des points X et X' ou des droites AX et AX' revient donc, en vertu des équations (3) et (4), à construire deux longueurs ayant pour différence AB et pour produit $\overline{AB}^2$. Le problème de la moyenne et extrême raison n'est, par conséquent, qu'un cas particulier du problème résolu au n° 189 : ce qui motive la construction suivante.

A l'extrémité B de AB, on élève la perpendiculaire BO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit une circonférence que la droite AO rencontre aux points C et C'. La partie extérieure AC de la sécante AO représente l'inconnue AX, et la sécante entière AC' représente l'inconnue AX'.

On retrouve ainsi les valeurs obtenues précédemment, en traitant le même problème par l'Algèbre (t. I, *Alg.*, 256), car, si l'on désigne par a la longueur AB, on a, sur la figure,

$$AC = AX = AO - OC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

et, *en valeur absolue*,

$$AC' = AX' = AO + OC' = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

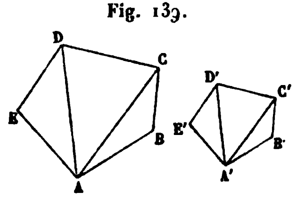
Il peut être utile de remarquer que les deux autres segments BX et BX' ont pour valeurs

$$BX = a - AX = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad BX' = a + AX' = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

PROBLÈME.

191. *Construire sur une droite donnée un triangle ou un polygone semblable à un triangle ou à un polygone donné* (*fig.* 139).

Fig. 139.



Si l'on veut construire sur la droite A'B', homologue de AB, un triangle semblable au triangle ABC, on fera l'angle B'A'C' égal à l'angle BAC et l'angle A'B'C' égal à l'angle ABC. Le triangle A'B'C' et le triangle ABC seront semblables, comme équiangles.

Si l'on veut construire sur la droite A′B′, homologue de AB, un polygone semblable au polygone ABCDE, on décomposera le polygone donné en triangles en menant du sommet A les diagonales AC, AD. On construira alors sur A′B′ un triangle A′B′C′ semblable au triangle ABC; puis, sur A′C′, homologue de AC, un triangle A′C′D′ semblable au triangle ACD; enfin, sur A′D′, homologue de AD, un triangle A′D′E′ semblable au triangle AED. Les deux polygones ABCDE et A′B′C′D′E′ seront semblables, comme composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

PROBLÈME.

192. *Construire une échelle* (*fig.* 140).

Quand on a levé le plan d'un terrain, il faut le rapporter sur le papier. Le rapport d'une droite du plan à celle qui lui correspond sur le terrain s'appelle *échelle* du plan. Si ce rapport est 0,01, le plan est construit à l'échelle de 0,01 ou au ***centième.***

Fig. 140.

Par extension, on appelle *échelle graphique* une figure géométrique qui permet de trouver immédiatement les longueurs des lignes du terrain, réduites dans un certain rapport, et, réciproquement, de passer des lignes mesurées sur le plan aux lignes qu'elles représentent effectivement.

Soit à construire une échelle de $\frac{1}{5000}$. 5000^M sont alors représentés par 1^M et 100^M par $0^M,02$.

Sur une droite indéfinie AB, on prend une longueur AF égale à $0^M,02$ et on la divise en 10 parties égales. AF représentant 100^M, chaque division représentera 10^M : on numérotera donc les points de division 0, 10, 20, ..., 100. On porte alors des

longueurs égales à AF à la suite du point F, et l'on indique ces nouvelles divisions par les nombres 100, 200, 300, etc., de manière à atteindre le plus grand nombre de centaines de mètres qu'on puisse avoir à considérer. Par les points A, F, 100, 200, 300, etc., on élève des perpendiculaires à la droite AB. On porte sur l'une d'elles, FE, dix fois une même longueur arbitraire, et par les points de division 1, 2, 3,..., 10, on mène des parallèles à AB. On prend sur CE, à partir du point E, une longueur EG égale au dixième de AF, on joint FG, et par les points de division de AF on mène des parallèles à FG.

Les *centaines* de mètres sont alors représentées par les divisions de FB, les *dizaines* de mètres par les divisions de AF, et les *neuf premiers multiples du mètre* par les portions de parallèles à AB comprises dans le triangle FGE. En effet, si l'on considère la cinquième parallèle et le segment L5 qui lui correspond, on a

$$\frac{F5}{FE} = \frac{L5}{GE} = \frac{5}{10};$$

comme GE représente 10^M, L5 en représente 5.

Si l'on veut marquer sur le plan une longueur de 325^M, on place l'une des pointes du compas sur l'intersection M de la parallèle à FG qui correspond au point de division 20 sur AF, avec la parallèle à AF qui passe par la division 5 de FE, et l'on amène l'autre pointe du compas sur la parallèle à FE qui est marquée 300 : on a 300^M depuis cette parallèle jusqu'à FE, 25^M depuis FE jusqu'au point M.

Réciproquement, si l'on veut savoir la longueur réelle d'une ligne du plan, on prend une ouverture de compas égale à cette ligne, et l'on voit immédiatement combien elle renferme de centaines de mètres. Supposons qu'elle tombe entre 200^M et 300^M. On place alors l'une des pointes du compas sur la parallèle 200 à FE, et on la fait glisser sur cette parallèle jusqu'à ce que l'autre pointe du compas vienne rencontrer un point d'intersection des parallèles à AF et des parallèles à FG ou couper l'une des parallèles à FG entre deux parallèles à AF. Supposons qu'on rencontre ainsi la parallèle 30 à FG entre la huitième et la neuvième parallèle à AF. La longueur cherchée renferme d'abord 200^M, puis 30^M, puis un nombre de mètres compris entre 8^M et 9^M. Cette longueur sera donc 238^M ou 239^M, à un demi-mètre près, en déterminant à vue quelle est la

parallèle à AF la plus rapprochée de la pointe du compas.

Ce que nous venons de dire relativement au *lever des plans* s'applique évidemment à la représentation graphique d'un bâtiment, d'une machine, d'un objet quelconque.

VI. — Exercices et questions complémentaires.

PROBLÈME.

193. *Déterminer les hauteurs, les médianes et les bissectrices d'un triangle en fonction de ses trois côtés.*

Nous désignerons par ABC le triangle donné et par a, b, c, les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C.

1° Cherchons la hauteur $AE = h$, qui correspond au sommet A. Des deux angles B et C, l'un est nécessairement aigu. Supposons que ce soit l'angle C (*fig.* 122).

Le triangle rectangle AEC donne d'abord

$$h^2 = b^2 - \overline{CE}^2.$$

Le triangle ABC, où l'angle C est aigu, permet ensuite de poser (170)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CE,$$

d'où

$$CE = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

La première relation devient alors

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2},$$

ou, d'après un théorème élémentaire d'Agèbre (t. I, *Alg.*, 30, II),

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$
$$= \frac{[(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]}{4a^2}$$
$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{4a^2}.$$

Mais, si l'on désigne par $2p$ le périmètre du triangle ABC, on a successivement

$$a + b + c = 2p, \qquad a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c),$$
$$c + a - b = 2p - 2b = 2(p - b), \qquad c - a + b = 2p - 2a = 2(p - a).$$

En substituant ces résultats dans la valeur de h^2, en simplifiant et en

extrayant la racine carrée, on trouve

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pour avoir les hauteurs h' et h'' qui correspondent aux côtés b et c, il suffit de remplacer successivement dans la valeur de h le facteur $\frac{2}{a}$ par $\frac{2}{b}$ et $\frac{2}{c}$.

2° Cherchons la médiane AD $= m$, qui correspond au côté a (*fig.* 122). On a immédiatement, d'après le théorème du n° 173,

$$b^2 + c^2 = 2\left(\frac{a^2}{4} + m^2\right).$$

On en déduit

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}.$$

Les médianes m' et m'' qui correspondent aux côtés b et c auront de même pour expressions

$$m' = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}, \quad m'' = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

3° Cherchons la bissectrice CD $= \gamma$ de l'angle C du triangle ABC (*fig.* 124). Le théorème du n° 178 donne immédiatement

$$ab = \gamma^2 + \text{AD}.\text{DB}.$$

Mais on a (141)

$$\frac{\text{AD}}{b} = \frac{\text{DB}}{a} = \frac{\text{AD}+\text{DB}}{a+b} = \frac{c}{a+b}.$$

Il en résulte

$$\text{AD} = \frac{bc}{a+b}, \quad \text{DB} = \frac{ac}{a+b}.$$

Il vient donc, en substituant dans la première relation et en isolant γ^2,

$$\gamma^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}$$
$$= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

Par suite, en remplaçant $a+b+c$ par $2p$, $a+b-c$ par $2(p-c)$, et en extrayant la racine carrée, on trouve

$$\gamma = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}.$$

Si l'on désigne par β et α les bissectrices des angles B et A, on a de la

même manière

$$\beta = \frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}, \quad \alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}.$$

PROBLÈME.

194. *Calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle, en fonction des côtés de ce triangle.*

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC (*fig.* 125). Le théorème du n° 179 donne immédiatement

$$ab = 2\mathrm{R}h'',$$

en désignant par h'' la hauteur qui correspond au côté c. Si l'on remplace h'' par sa valeur (193, 1°), il vient

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

PROBLÈME.

195. *Construire les racines d'une équation du second degré.*

Les équations du second degré, en mettant les signes en évidence, rentrent toutes dans les quatre types suivants (t. I, *Alg.*) :

$$x^2+px+q=0, \quad x^2-px+q=0,$$
$$x^2+px-q=0, \quad x^2-px-q=0.$$

Le premier se ramène au deuxième et le troisième au quatrième, par le seul changement de x en $-x$. On n'a donc à construire effectivement que les racines des équations

$$x^2-px+q=0, \quad x^2-px-q=0,$$

où la somme de ces racines est égale à p, tandis que leur produit est $\pm q$.

En les mettant sous la forme

$$x(p-x)=q, \quad x(x-p)=q,$$

on voit que construire les racines de la première, c'est *trouver deux droites dont la somme soit p et le produit q* (188), et que construire les racines de la seconde, c'est *trouver deux droites dont la différence soit p et le produit q* (189). Remarquons en effet que, dans l'équation

$$x^2-px-q=0,$$

les racines sont de signes contraires, la plus grande étant positive. Si x représente cette plus grande racine positive, la racine négative *prise en valeur absolue* est $x-p$.

PROBLÈME.

196. *Construire une circonférence qui passe par deux points donnés et soit tangente à une droite ou à une circonférence donnée.*

1° Soient (*fig.* 141) A et B les deux points donnés, et KL la droite donnée. Supposons le problème résolu.

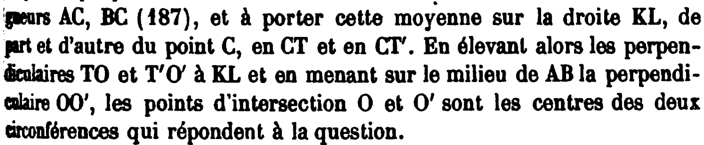


Fig. 141.

Si la corde AB prolongée coupe KL, et si CT désigne la distance du point d'intersection C au point de contact de KL avec la circonférence cherchée, on doit avoir (181)

$$CT^2 = AC.BC.$$

On n'a donc qu'à construire la moyenne proportionnelle CT aux longueurs AC, BC (187), et à porter cette moyenne sur la droite KL, de part et d'autre du point C, en CT et en CT'. En élevant alors les perpendiculaires TO et T'O' à KL et en menant sur le milieu de AB la perpendiculaire OO', les points d'intersection O et O' sont les centres des deux circonférences qui répondent à la question.

Si AB était parallèle à KL, il n'y aurait qu'une solution. Le point de contact correspondant T s'obtiendrait en menant une perpendiculaire sur le milieu de AB jusqu'à la rencontre de KL.

2° Soient (*fig.* 142) B et C les deux points donnés, et O la circonférence donnée. Supposons le problème résolu. Il n'est évidemment possible que si les points B et C sont *ensemble* extérieurs ou intérieurs à la circonférence O.

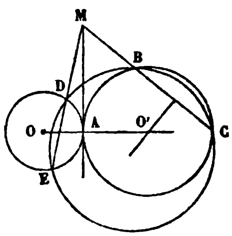


Fig. 142.

Cela posé, si A est le point de contact de la circonférence donnée O et de la circonférence inconnue O', on voit qu'il suffit de trouver le point M de rencontre de la tangente commune AM avec la corde BC prolongée. Or, si l'on fait passer par B et C une circonférence auxiliaire quelconque qui coupe la circonférence O en deux points D et E, la corde DE prolongée coupe précisément BC au point M. En effet, désignons pour un instant par ε le point où la droite MD couperait la circonférence O. On aura à la fois (181)

$$\overline{MA}^2 = MB.MC = MD.M\varepsilon.$$

Il en résulte (182) que le point ε appartient à la circonférence déterminée par les trois points B, C, D, de sorte qu'il se confond avec le point E.

Le point M étant ainsi à la rencontre de BC et de DE, on mène par ce

point la tangente MA à la circonférence O. Le point A est le point de contact de cette circonférence avec la circonférence cherchée O', dont le centre est à la rencontre de OA prolongée et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

La seconde tangente menée du point M à la circonférence O fournit une seconde solution.

Si les points B et C étaient équidistants du centre O, les droites BC, DE, seraient parallèles. La tangente AM serait donc parallèle aux mêmes droites, et le problème admettrait encore deux solutions.

CHAPITRE IV.

MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — Des polygones réguliers.

197. Un polygone est *régulier* lorsqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Parmi les triangles et les quadrilatères, le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

Un polygone est *inscrit* dans un cercle lorsque tous ses sommets appartiennent à la circonférence : on dit alors que le cercle est *circonscrit* au polygone.

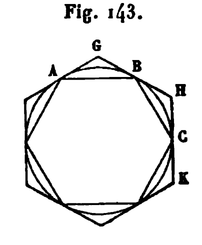
Un polygone est *circonscrit* à un cercle lorsque ses côtés sont tangents à la circonférence : on dit alors que le cercle est *inscrit* dans le polygone.

Tout triangle est *inscriptible* et *circonscriptible* (94, 130).

THÉORÈME.

198. *Si l'on partage une circonférence en un nombre quelconque d'arcs égaux, les cordes de ces arcs forment un polygone régulier inscrit; les tangentes menées par les points de division forment un polygone régulier circonscrit* (*fig.* 143).

Fig. 143.



Supposons qu'on partage la circonférence en n parties égales et qu'on joigne les points de division. Considérons un angle quelconque ABC du polygone formé : les côtés de cet angle interceptant deux divisions, il a pour mesure la moitié de $n-2$ divisions. Il en est de même de tous les autres angles du polygone; ses angles sont donc égaux. Quant à ses côtés, ils sont égaux comme cordes sous-tendant des arcs égaux. On obtient, par conséquent, un polygone régulier.

partagent la circonférence dans le même nombre de parties égales que les points A, B, C, ... Le polygone régulier circonscrit ainsi obtenu a ses côtés parallèles à ceux du polygone régulier inscrit, et les rayons du polygone inscrit prolongés sont les rayons du polygone circonscrit; car, les triangles rectangles MOD, MOE, étant égaux, MO est la bissectrice de l'angle DOE et doit se confondre avec BO, bissectrice du même angle.

Reportons-nous à la *fig.* 145. Si l'on joint le point D aux points A et B, le point E aux points B et C, ..., on forme évidemment un polygone régulier inscrit de $2n$ côtés, si le nombre de côtés du polygone ABC... est n. Le périmètre du nouveau polygone est plus grand que celui du polygone ABC..., puisqu'on a $BE + EC > BC$.

De même, si l'on mène des tangentes à la circonférence par les points B, C, ..., et qu'on les arrête aux tangentes qui forment le polygone circonscrit LMN..., on obtient un polygone régulier circonscrit de $2n$ côtés. Le périmètre de ce nouveau polygone est plus petit que celui du polygone LMN..., puisqu'on a $RS < RM + MS$.

Ainsi, à mesure qu'on double successivement le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence, le périmètre de ce polygone augmente. A mesure qu'on double successivement le nombre des côtés d'un polygone régulier circonscrit à une circonférence, le périmètre de ce polygone diminue.

Remarquons que le triangle rectangle BOI donne

$$BO - OI < BI.$$

La différence entre le rayon et l'apothème d'un polygone régulier est donc toujours plus petite que la moitié du côté de ce polygone. A mesure qu'on double le nombre des côtés du polygone, son côté diminue (94) et tend vers zéro, puisque les sommets du polygone se rapprochent indéfiniment sur la circonférence : par suite, *la différence entre le rayon et l'apothème diminue en tendant aussi vers zéro, à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente.*

THÉORÈME.

202. *Deux polygones réguliers qui ont le même nombre de côtés sont semblables, et le rapport de leurs périmètres est égal à celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes* (*fig.* 146).

Fig. 146.

La valeur de l'angle d'un polygone régulier ne dépend, comme nous l'avons déjà vu, que de son nombre de côtés : les deux polygones considérés ont donc leurs angles égaux.

Leurs côtés sont proportionnels, les rapports $\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}, \ldots,$ étant nécessairement identiques. Ces deux polygones sont donc semblables.

Les périmètres P et P' des deux polygones forment alors un rapport égal au rapport de similitude $\frac{AB}{A'B'}$ ou, ce qui revient au même, $\frac{AF}{A'F'}$, OF et O'F' représentant les apothèmes des deux polygones (102). Mais les deux triangles rectangles AOF, A'O'F', sont évidemment semblables, puisque les rayons AO et A'O' sont bissecteurs des angles A et A' des deux polygones. On a donc

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'},$$

et l'on en conclut

$$\frac{P}{P'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'}.$$

SCOLIE.

203. Supposons une circonférence divisée en n parties égales à a. En joignant les points de division dans leur ordre naturel, on obitient un polygone régulier ordinaire de n côtés (198). Admettons maintenant qu'on joigne ces points de division de p en p à partir de l'un d'eux.

Si p est premier avec n (t. I, *Arithm.*, 113), la circonférence représentée par na et l'arc pa sous-tendu par chacune des cordes successives ont npa pour plus petit multiple commun (t. I, *Arithm.*, 144), et l'on revient au point de départ après avoir parcouru n fois l'arc pa ou p fois la circonférence na. On forme donc ainsi un nouveau polygone

régulier de n côtés. Seulement, ses côtés s'entrecoupent, et on lui donne le nom de *polygone régulier étoilé*.

Si p et n ont un plus grand commun diviseur d, le plus petit multiple commun de la circonférence na et de l'arc pa est $\frac{npa}{d}$, et l'on revient au point de départ après avoir parcouru $\frac{n}{d}$ fois l'arc pa ou $\frac{p}{d}$ fois la circonférence na. On forme donc ainsi un polygone régulier de $\frac{n}{d}$ côtés et non plus de n côtés.

Il résulte de ce qui précède que le nombre des polygones réguliers, convexes ou étoilés, de n côtés, est égal au nombre des nombres premiers et inférieurs à n, c'est-à-dire au nombre des nombres premiers à n renfermés dans la suite $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Mais si l'on remarque (t. I, *Arithm.*, 168) que les nombres premiers et inférieurs à n se répondent deux à deux à égale distance du plus petit et du plus grand de ces nombres, qui sont 1 et $n-1$, c'est-à-dire qu'on obtient le même polygone étoilé en joignant les points de division de p en p (p étant premier à n) qu'en les joignant de $n-p$ en $n-p$, on voit qu'en réalité le nombre des polygones réguliers de n côtés est égal au nombre des nombres premiers à n renfermés dans la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

D'après cela, il n'y a qu'un seul hexagone régulier, puisque, pour $n=6$, la suite à considérer est $1, 2, \frac{5}{2}$, qui ne renferme aucun autre nombre entier que 1 premier à 6. Il y a deux pentagones réguliers, un convexe, un étoilé, puisque, pour $n=5$, la suite à considérer est 1, 2, et que 1 et 2 sont premiers à 5. Il y a de même deux décagones réguliers, un convexe, un étoilé; quatre pentédécagones réguliers, un convexe, trois étoilés, etc.

II. — Problèmes sur les polygones réguliers.

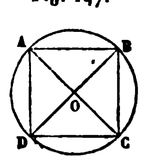
PROBLÈME.

204. *Inscrire un carré dans un cercle donné* (*fig.* 147).

Menons deux diamètres AC, BD, perpendiculaires entre eux, et joignons leurs extrémités A, B, C, D. Le quadrilatère

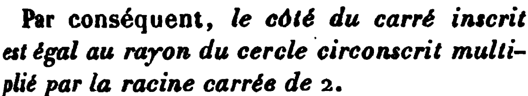
obtenu est un carré, car la circonférence est divisée en quatre parties égales par les angles au centre AOB, BOC, COD, DOA, qui sont droits.

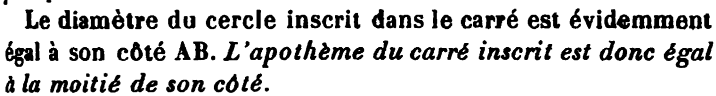
Fig. 147.



Le triangle isocèle rectangle AOB donne

$$AB^2 = 2AO^2, \quad \text{d'où} \quad AB = AO\sqrt{2}.$$


Par conséquent, *le côté du carré inscrit est égal au rayon du cercle circonscrit multiplié par la racine carrée de* 2.


Le diamètre du cercle inscrit dans le carré est évidemment égal à son côté AB. *L'apothème du carré inscrit est donc égal à la moitié de son côté.*

On voit facilement que *le côté du carré circonscrit est égal au diamètre du cercle considéré.*

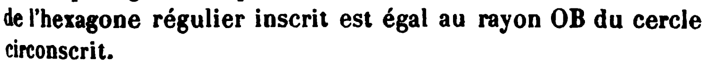
Si l'on divise en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés du carré, les points de division et les sommets du carré partagent la circonférence en huit parties égales. Partant du carré, on peut donc inscrire l'octogone régulier. En continuant de la même manière, on inscrit toute la série des polygones réguliers ayant pour nombre de côtés une puissance entière quelconque de 2, à partir de 2^2.

PROBLÈME.

205. *Inscrire un hexagone régulier et un triangle équilatéral dans un cercle donné* (*fig.* 148).

Supposons que BC représente le côté de l'hexagone régulier. L'angle au centre BOC est égal à $\frac{4^{dr}}{6}$ ou à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Le triangle BOC étant isocèle, chacun des angles B et C est aussi égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Par conséquent, le triangle BOC étant équiangle est équilatéral, et le côté BC de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon OB du cercle circonscrit.

Fig. 148.


Pour inscrire un hexagone régulier, il suffit donc *de porter six fois le rayon sur la circonférence.*

On inscrit le triangle équilatéral, en joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier inscrit.

Si l'on considère le triangle rectangle ACD, on a immédia-

tement

$$AC^2 = AD^2 - CD^2.$$

Mais

$$AD = 2AO \quad \text{et} \quad CD = AO.$$

Il vient donc

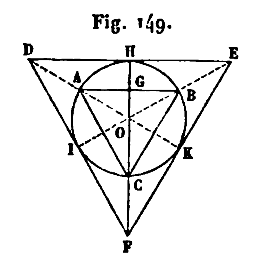
$$AC^2 = 4AO^2 - AO^2 = 3AO^2, \quad \text{d'où} \quad AC = AO\sqrt{3}.$$

Le côté du triangle équilatéral inscrit est donc *égal au rayon du cercle circonscrit multiplié par la racine carrée de* 3.

Le losange ABCO montre que l'apothème du triangle équilatéral est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit. La hauteur de ce triangle est, par suite, égale aux $\frac{3}{2}$ du rayon.

On peut remarquer ici que, lorsqu'un polygone régulier a un nombre de côtés *pair*, comme l'hexagone, chaque rayon AO prolongé donne un diamètre AD; tandis que, lorsque le polygone régulier considéré a un nombre de côtés *impair*, comme le triangle équilatéral, à chaque rayon AO prolongé correspond un apothème.

Fig. 149.



Soit le triangle équilatéral inscrit ABC (*fig.* 149). Menons les apothèmes, prolongés jusqu'à la circonférence, OH, OI, OK. En traçant par les points H, I, K, des tangentes à la circonférence, nous formerons un triangle équilatéral circonscrit dont les côtés seront parallèles à ceux du triangle équilatéral inscrit (201). Les triangles semblables OAB, ODE, donnent alors

$$\frac{AB}{DE} = \frac{OA}{OD} = \frac{OG}{OH} = \frac{1}{2}.$$

Le côté du triangle équilatéral circonscrit est donc *double de celui du triangle équilatéral inscrit.* Il en résulte évidemment que toutes les lignes tracées dans le triangle circonscrit sont doubles des lignes homologues du triangle inscrit. En particulier, la hauteur du triangle équilatéral circonscrit est triple du rayon du cercle inscrit.

Partant du triangle équilatéral et de l'hexagone, on peut inscrire les polygones réguliers de 12, 24, 48, 96, ... côtés, en opérant successivement la bissection des arcs considérés, c'est-à-dire toute la série des polygones réguliers dont le nombre de côtés est exprimé par 3.2^n.

PROBLÈME.

206. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné* [1] (*fig.* 150 et 151).

Divisons la circonférence en dix parties égales. En joignant les points de division dans leur ordre naturel, nous obtiendrons

Fig. 150.

Fig. 151.

le décagone régulier convexe ABCDEFGHIK; en les joignant de trois en trois, nous obtiendrons le décagone régulier étoilé ADGKCFIBEH (*fig.* 151). En effet, pour $n = 10$, la suite à considérer est 1, 2, 3, 4, $\frac{9}{2}$, et cette suite ne renferme que 1 et 3 qui soient premiers à 10 (203). Nous allons chercher à déterminer à la fois les côtés AB et AD des deux décagones.

Remarquons (*fig.* 150) que le rayon BO prolongé passe par le sommet G. L'angle en M a donc pour mesure deux divisions de la circonférence (111). L'angle inscrit ABG a la même mesure (108), ainsi que l'angle au centre BOD. Les deux triangles ABM, MOD sont donc isocèles, et l'on a $AB = AM$, $MD = OD$, d'où

$$AD - AB = OD.$$

De plus, les angles DOA et GMA sont égaux comme ayant tous deux pour mesure trois divisions de la circonférence. Les droites DO et GM ou OM sont donc antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle OAD, et l'on a (183) $AM.AD = \overline{AO}^2$ ou

$$AB.AD = \overline{OD}^2.$$

---

(1) Nous empruntons les démonstrations des n°s 206 et 208 au TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition (1879).

Les deux inconnues AB *et* AD *ne sont* donc autre chose que *les deux solutions qui répondent à la division du rayon en moyenne et extrême rayon* (190), et l'on a

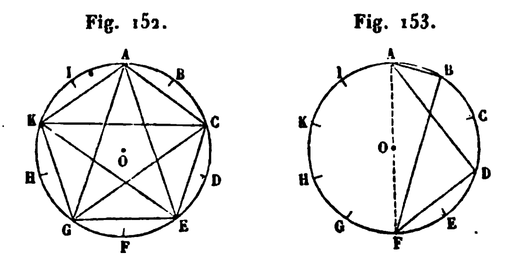
$$AB = OD \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad AD = OD \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

PROBLÈME.

207. *Inscrire un pentagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 152 *et* 153).

La circonférence étant divisée en 10 parties égales, si l'on joint les points de division de deux en deux, on obtient le pentagone régulier convexe ACEGI; si l'on joint ces mêmes points de division de quatre en quatre (203), on obtient le pentagone régulier étoilé AEICG (*fig.* 152).

On calcule facilement les côtés de ces deux pentagones, en



se reportant à la *fig.* 153. Si AB est le côté du décagone régulier convexe, BF est celui du pentagone régulier étoilé (203), et, si AD est le côté du décagone régulier étoilé, DF est celui du pentagone régulier convexe. Les deux triangles rectangles ADF, ABF, donnent donc immédiatement, en remplaçant AD et AB par leurs valeurs (206) et en désignant par R le rayon OA,

$$DF = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$BF = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Partant du pentagone régulier et du décagone régulier convexes, on peut inscrire les polygones réguliers de 20, 40, 80,

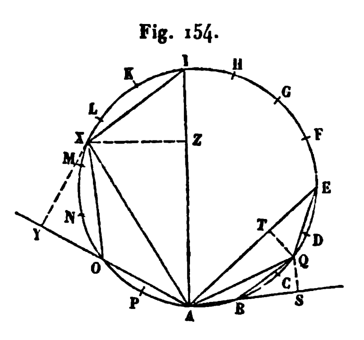
160,... côtés, en opérant successivement la bissection des arcs considérés, c'est-à-dire toute la série des polygones réguliers dont le nombre de côtés est exprimé par 5.2^n.

PROBLÈME.

208. *Inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 154).

Divisons la circonférence en 15 parties égales. En joignant les points de division dans leur ordre naturel, nous obtiendrons le pentédécagone régulier convexe ; en les joignant de 2 en 2, de 4 en 4, de 7 en 7, nous obtiendrons les trois pentédécagones réguliers étoilés. En effet, pour $n=15$, la suite à considérer est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et cette suite renferme, comme nombres premiers à 15, les nombres 1, 2, 4 et 7 (203).

Fig. 154.



Considérons les côtés AB et AE du premier et du troisième pentédécagone. Q étant le milieu de l'arc CD, on a, en prenant la circonférence pour unité,

$$\text{arc}\,AQ = \frac{2.5}{15} = \frac{1}{6},$$

$$\text{arc}\,QB = \text{arc}\,QE = \frac{1.5}{15} = \frac{1}{10}.$$

Donc, pour *construire* AB et AE, il suffit de porter, à partir du point A, une corde AQ égale au côté de l'hexagone ou au rayon (205) ; puis, de part et d'autre du point Q, une corde QB = QE représentant le côté du décagone régulier convexe.

Abaissons du point Q les perpendiculaires QS et QT sur les deux côtés AB et AE. Les deux triangles rectangles QAS et QAT étant égaux (47, 1°), on a

$$AS = AT, \quad QS = QT.$$

Les deux triangles rectangles QBS et QET sont donc eux-mêmes égaux (47, 2°), et il en résulte

$$BS = ET.$$

Par suite,

$$AB = AS - BS \quad \text{et} \quad AE = AT + TE = AS + BS.$$

Pour *calculer* AB et AE, il suffit donc de calculer AS et BS.

Or, l'angle au centre du décagone régulier convexe ayant pour mesure $\frac{1}{10}$ de la circonférence, l'angle inscrit BAQ est la moitié de cet angle au centre, et, comme AQ est égal au rayon, QS est la moitié du côté du décagone régulier convexe. En désignant par R le rayon du cercle donné, on peut donc écrire successivement (206)

$$QS = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$AS = \sqrt{\overline{AQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$BS = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}),$$

$$AB = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$

$$AE = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\right).$$

Considérons maintenant les côtés AO et AI du deuxième et du quatrième pentédécagone. X étant le milieu de l'arc ML, on a

$$\text{arc}\,AX = \frac{4,5}{15} = \frac{3}{10},$$

$$\text{arc}\,XO = \text{arc}\,XI = \frac{2,5}{15} = \frac{1}{6}.$$

Donc, pour *construire* AO et AI, il suffit de porter, à partir du point A, une corde AX égale au côté du décagone régulier étoilé; puis, de part et d'autre du point X, une corde XO = XI représentant le côté de l'hexagone régulier ou le rayon.

Abaissons du point X les perpendiculaires XY et XZ sur les deux côtés AO et AI. Les deux triangles rectangles XAY et XAZ étant égaux, on a

$$AY = AZ, \quad XY = XZ.$$

Les deux triangles rectangles XOY et XIZ sont donc eux-

mêmes égaux, et il en résulte

$$OY = IZ.$$

Par suite,

$$AO = AY - OY \quad \text{et} \quad AI = AZ + ZI = AY + OY.$$

Pour *calculer* AO et AI, il suffit donc de calculer AY et OY.

Or, l'angle au centre du décagone régulier étoilé ayant pour mesure $\frac{3}{10}$ de la circonférence, l'angle inscrit XIZ ou son égal XOY est la moitié de cet angle au centre, et, comme OX est égal au rayon, XY est la moitié du côté du décagone régulier étoilé. On peut donc écrire successivement (206)

$$XY = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1),$$

$$AY = \sqrt{\overline{AX}^2 - \overline{XY}^2} = \frac{R}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}),$$

$$OY = \sqrt{\overline{OX}^2 - \overline{XY}^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$AO = \frac{R}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

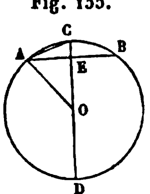
$$AI = \frac{R}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

Partant du pentédécagone régulier convexe, on peut inscrire les polygones réguliers de 30, 60, 120, 240, ... côtés, par la bissection des arcs considérés, c'est-à-dire toute la série des polygones réguliers dont le nombre de côtés est exprimé par $3.5.2^n$.

PROBLÈME.

209. *Le rayon d'un cercle et le côté d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle étant donnés, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés* (*fig.* 155).

Fig. 155.



Soient AB $= a$ le côté donné et R le rayon du cercle. Si nous abaissons sur AB le diamètre perpendiculaire CD, AC représentera le côté cherché, que nous désignerons par a'.

On a immédiatement (167)

$$\overline{AC}^2 = CD.CE,$$

c'est-à-dire

$$a'^2 = 2R(R - OE).$$

Le triangle rectangle AEO donne d'ailleurs

$$OE = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AE}^2},$$

ou bien

$$OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

On a donc, en substituant dans la valeur de a'^2 et en extrayant la racine carrée,

$$(1) \qquad a' = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}.$$

Si l'on prend le rayon pour unité, il vient

$$(1\ bis) \qquad a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Remarquons que OE est l'apothème du polygone régulier inscrit dont le côté est a.

SCOLIE.

210. Si l'on connaît le côté du polygone régulier inscrit de n côtés, on peut, par l'application répétée de la formule (1 *bis*), calculer successivement les côtés et, par suite, les périmètres des polygones réguliers inscrits de $2n, 4n, 8n, \ldots$ côtés. On peut, en même temps, calculer les apothèmes des polygones réguliers inscrits de $n, 2n, 4n, \ldots$ côtés.

Voici les résultats *par défaut* qu'on obtient, pour les demi-périmètres des polygones considérés, à moins d'une unité du cinquième ordre décimal, soit en partant du carré dont le côté dans le cercle de rayon 1 est $\sqrt{2}$, soit en partant de l'hexagone dont le côté est 1 :

Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4............	2,82842	6..............	3,00000
8..............	3,06146	12..............	3,10582
16............	3,12144	24..........	3,13262
32..............	3,13654	48..............	3,13935
64..............	3,14033	96..............	3,14103
128..............	3,14127	192..............	3,14145

PROBLÈME.

211. ***Étant donné le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit semblable*** (*fig.* 156).

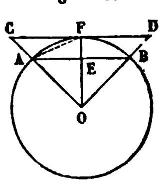


Fig. 156.

Soient AB $= a$ le côté donné et R le rayon du cercle. Si l'on détermine le point de rencontre F de l'apothème OE avec la circonférence, et si l'on mène en ce point la tangente CD limitée aux rayons OA et OB prolongés, on sait (201, 202) que CD est le côté du polygone régulier circonscrit, semblable au polygone régulier inscrit dont le côté est a.

Si l'on pose CD $= x$, les triangles semblables AOE, COF, donnent immédiatement

$$\frac{\text{CF}}{\text{AE}} = \frac{\text{OF}}{\text{OE}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a} = \frac{\text{R}}{\text{OE}}.$$

Mais (209)

$$\text{OE} = \frac{1}{2}\sqrt{4\text{R}^2 - a^2}.$$

Par suite,

$$(2) \qquad x = \frac{2a\text{R}}{\sqrt{4\text{R}^2 - a^2}}.$$

Si l'on prend le rayon pour unité, il vient

$$(2\,bis) \qquad x = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

SCOLIE.

212. La formule (2 *bis*) permet de calculer les demi-périmètres des polygones réguliers circonscrits, en opérant comme nous l'avons indiqué au n° 210. Les résultats ci-après sont obtenus *par excès* à moins d'une unité du cinquième ordre décimal :

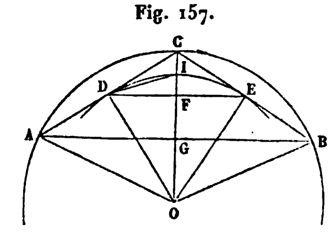
Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4	4,00000	6	3,46411
8	3,31371	12	3,21540
16	3,18260	24	3,15967
32	3,15173	48	3,14609
64	3,14412	96	3,14272
128	3,14223	192	3,14188

PROBLÈME.

213. ***Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier de même périmètre, mais d'un nombre de côtés double*** (*fig.* 157).

Considérons le cercle O circonscrit au polygone régulier donné dont le côté est AB. Si l'on mène le rayon OGC perpendiculaire à AB, on a $OC = r$ et $OG = a$.

Fig. 157.



Traçons les cordes CA et CB, et joignons leurs milieux D et E. La droite DE, parallèle à AB et égale à sa moitié, est le côté du polygone régulier de même périmètre que le polygone donné et d'un nombre de côtés double. D'ailleurs, l'angle DOE, étant évidemment la moitié de l'angle au centre AOB du polygone primitif, est l'angle au centre du second polygone, et il en résulte $OD = r'$ et $OF = a'$.

Cela posé, le point F étant le milieu de CG, il vient

$$OF = OG + \frac{1}{2}(OC - OG) = \frac{1}{2}(OG + OC),$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad a' = \frac{1}{2}(a + r).$$

Le triangle rectangle ODC donne à son tour

$$\overline{OD}^2 = OC.OF,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad r' = \sqrt{r.a'}.$$

SCOLIE.

214. La figure montre immédiatement que OF est plus grand que OG, tandis que OD est moindre que OC. Ainsi, lorsqu'on passe d'un polygone régulier au polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, l'apothème augmente et le rayon diminue : la différence entre le rayon et l'apothème va donc en décroissant. D'ailleurs, on a, dans le triangle AOG, $OA - OG < AG$ ou que $\frac{AB}{2}$; cette différence est donc toujours moindre que la moitié du côté du polygone correspondant. Mais, si, conservant le même périmètre, on double indéfiniment le nombre des côtés, la valeur de chacun d'eux tend vers zéro. Par suite, *la différence entre le rayon et l'apothème a aussi pour limite zéro.*

On peut démontrer que *la différence $r' - a'$ est moindre que le quart de la différence précédente $r - a$.*

En effet, les formules (1) et (2) du n° 213 donnent

$$r' - a' = \sqrt{r\frac{a+r}{2}} - \frac{a+r}{2}$$
$$= \sqrt{\frac{a+r}{2}}\left(\sqrt{r} - \sqrt{\frac{a+r}{2}}\right).$$

En multipliant et en divisant le second membre de cette égalité par la somme $\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}$, il vient

$$r' - a' = \frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}} \cdot \frac{r-a}{2}.$$

Il faut donc simplement vérifier l'inégalité

$$\frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}} < \frac{1}{2},$$

qui est évidente, puisque a est moindre que r. On a bien, par conséquent,

$$r' - a' < \frac{r-a}{4}.$$

III. — Méthode des limites [1].

215. X étant une quantité variable qui se rapproche indéfiniment de la quantité fixe A, de manière que la valeur absolue de la différence X — A puisse devenir et rester plus petite que toute quantité donnée (aussi petite qu'on voudra), on dit que A est la *limite* de X, et l'on écrit

$$\lim X = A.$$

216. *Une quantité variable ne peut tendre vers deux limites inégales.*

Supposons, en effet, qu'une pareille quantité puisse avoir deux limites différentes a et b, dont la différence soit d, et prenons $\delta < \frac{d}{2}$.

Les intervalles compris d'une part entre $a + \delta$ et $a - \delta$ et, d'autre part, entre $b + \delta$ et $b - \delta$, n'ont évidemment rien de commun et sont même séparés par un intervalle égal à $d - 2\delta$. Cela posé, une variable qui aurait pour limite a finirait par tomber entre $a + \delta$ et $a - \delta$, tandis qu'une variable qui aurait pour limite b finirait par tomber entre $b + \delta$ et $b - \delta$. Elle serait donc comprise à la fois dans deux régions complètement distinctes, ce qui est impossible.

217. Considérons une égalité entre des variables tendant vers leurs limites; dans les deux membres de cette égalité, les variables sont liées entre elles et avec des quantités constantes à l'aide d'opérations quelconques.

Si la fonction ainsi constituée est continue (t. I, *Alg. élém.*, n° 310), on peut donner aux variables qu'elle renferme des valeurs assez rapprochées pour que les valeurs correspondantes de la fonction soient elles-mêmes aussi rapprochées qu'on voudra. Les valeurs de ces variables $x, y, z, \ldots$, peuvent donc différer assez peu de leurs limites, $a, b, c, \ldots$, pour que la fonction supposée des premières diffère aussi peu qu'on

---

[1] Nous reviendrons sur la *Théorie des limites* dans *l'Algèbre supérieure* (t. III); nous n'en donnons ici que ce qui est absolument indispensable au point de vue de l'étude de la Géométrie.

voudra de la même fonction des secondes, qui sera alors la limite de la fonction variable.

Par conséquent, *si des variables tendent vers des limites finies, toute fonction de ces variables tendra vers la même fonction de ces limites.*

C'est là une proposition fondamentale, qui résume en réalité la *méthode des limites.*

Nous dirons donc, avec DUHAMEL [1] : « Lorsqu'on veut obtenir une relation entre des quantités qui peuvent être considérées comme limites de quantités variables d'une espèce plus simple, on cherchera d'abord la relation entre ces dernières et les données, et peut-être encore certaines autres variables auxiliaires.

» Si cette relation est obtenue, on en aura une autre en substituant à toutes les variables leurs limites, et l'on aura ainsi une relation entre les quantités proposées. »

En particulier :

La limite d'une somme est égale à la somme des limites de ses parties ;

La limite d'un produit est égale au produit des limites des facteurs [2] ;

La limite d'un quotient est égale au quotient des limites du dividende et du diviseur.

218. Une quantité variable dont la limite est zéro est un *infiniment petit.*

219. *La limite de la somme d'infiniment petits reste la même quand on leur substitue d'autres quantités dont les rapports respectifs avec les quantités considérées ont tous l'unité pour limite.*

Soient les infiniment petits

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n,$$

dont la somme tend vers une limite déterminée quand n croît indéfiniment.

---

(1) *Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement* (IIe Partie, p. 393).

(2) Il est entendu que le nombre des parties de la somme ou des facteurs du produit est un nombre fini.

Soient d'autres infiniment petits

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n,$$

tels que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

aient tous l'unité pour limite.

Si l'on ajoute terme à terme tous ces rapports pris dans leur valeur absolue, le rapport résultant est compris entre le plus petit et le plus grand des rapports proposés (t. I, *Alg. élém.*, n° 66); il a donc aussi pour limite l'unité, et les deux sommes d'infiniment petits ont par conséquent la même limite.

Il en résulte que, si l'une des sommes est constante, l'autre somme a cette constante pour limite.

220. *La limite du rapport de deux infiniment petits reste la même quand on leur substitue d'autres quantités dont les rapports respectifs avec les infiniment petits proposés ont l'unité pour limites.*

Soient les deux couples d'infiniment petits α et β, α' et β', tels que les rapports $\frac{\alpha'}{\alpha}$ et $\frac{\beta'}{\beta}$ aient l'unité pour limites. Il en sera alors de même nécessairement des rapports inverses $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$.

Cela posé, on a identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \frac{\beta'}{\beta} \frac{\alpha}{\alpha'},$$

ou, en passant à la limite (217),

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \lim \frac{\beta'}{\beta} \lim \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Par hypothèse, les deux dernières limites sont égales à l'unité; il reste donc simplement

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

IV. — Mesure de la circonférence.

221. Deux lignes ont la même *longueur* ou sont *égales*, lorsqu'elles peuvent coïncider (7).

Cette définition peut recevoir immédiatement son application lorsqu'il s'agit de *lignes droites limitées*, puisqu'on peut toujours vérifier si leur coïncidence est possible ou les *mesurer* en les comparant directement à l'unité de longueur (11).

Mais il n'en est plus de même pour les autres lignes, qui ne peuvent coïncider que dans des cas très particuliers, par exemple si l'on considère des arcs de cercle dont les rayons soient égaux.

Puisque la mesure directe de la *longueur* n'est possible que pour la ligne droite, c'est à elle qu'il faut rapporter à ce point de vue toutes les autres lignes. Seulement, d'une manière générale, une droite et un arc de courbe ne peuvent être *égaux*, puisqu'on ne peut pas les faire coïncider; ils ne peuvent être qu'*équivalents*, s'ils renferment le même nombre d'unités de longueur.

Or, pour constater cette équivalence, il faut nécessairement indiquer ce qu'on entend par la *longueur d'une courbe*.

On adopte la définition suivante : *La longueur d'une courbe entre deux points est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un contour polygonal inscrit dans la courbe entre ces deux points, lorsque les côtés de ce contour tendent indéfiniment vers zéro.*

222. Rigoureusement, il faut prouver que la limite indiquée existe et demeure indépendante de la loi d'inscription choisie, c'est-à-dire de la manière dont on fait tendre vers zéro les côtés du contour polygonal auxiliaire.

Nous supposons l'arc de courbe proposé *convexe* dans toute son étendue; les contours polygonaux inscrits rempliront alors la même condition. S'il n'en était pas ainsi, on décomposerait l'arc donné en plusieurs arcs convexes, à chacun desquels on appliquerait le raisonnement que nous allons présenter [1].

---

[1] *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition, 1879.

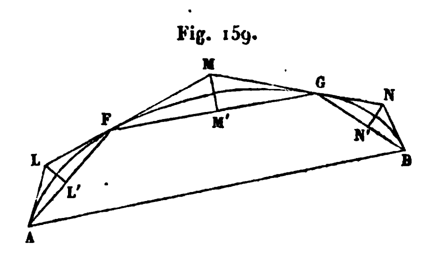
223. Soit donc l'arc de courbe quelconque AB (*fig.* 158). Adoptons la loi d'inscription suivante. Prenons sur la courbe le point C, qui est également distant des points A et B; puis, les points D et E, qui sont respectivement à égale distance des points A et C et des points C et B, et ainsi de suite indéfiniment. Il est clair que le nombre des côtés du contour polygonal inscrit de la sorte ira constamment en doublant et croîtra sans limite; en même temps, la grandeur de ces côtés tendra vers zéro, puisque les points de division se rapprocheront indéfiniment sur la courbe.

Fig. 158.

Chaque nouveau périmètre inscrit est plus grand que le précédent (35), mais reste inférieur à une ligne polygonale convexe terminée aux mêmes extrémités et enveloppant la courbe (37). Il en résulte que les périmètres inscrits successifs tendent vers une certaine limite, car une grandeur variable qui croît constamment, en demeurant cependant au-dessous d'une valeur fixe déterminée, tend nécessairement vers une limite connue ou inconnue.

Soit maintenant (*fig.* 159) le contour polygonal AFGB, répondant à une autre loi d'inscription, en vertu de laquelle ses côtés doivent toujours tendre vers zéro.

Fig. 159.



En menant des tangentes à la courbe par les différents

sommets A, F, G, B, nous formerons un contour polygonal circonscrit correspondant ALMNB. Il est facile de voir que le périmètre de ce contour circonscrit tend vers la même limite que le périmètre du contour inscrit, quelle que soit d'ailleurs cette limite.

En effet, projetons les sommets L, M, N, en L′, M′, N′, sur les cordes AF, FG, GB, et comparons, par exemple, les longueurs AL et AL′. Quand AF tend vers zéro, cette corde se rapproche indéfiniment de la tangente AL, de sorte que, dans le triangle rectangle AL′L, l'angle aigu A tend vers zéro et le rapport $\frac{AL}{AL'}$ vers l'unité. Il en est de même des autres rapports $\frac{LF}{L'F}, \frac{FM}{FM'}, \ldots, \frac{NB}{N'B}$.

Il en résulte immédiatement (219) que la somme des numérateurs de ces rapports a la même limite que la somme de leurs dénominateurs, c'est-à-dire que le périmètre polygonal circonscrit a la même limite que le périmètre polygonal inscrit, lorsque leurs côtés tendent indéfiniment vers zéro, quelle que soit la loi d'inscription adoptée pour le périmètre inscrit.

Cela posé, soit L la limite commune des deux périmètres formés d'après la première loi d'inscription. Désignons par p et par P les périmètres correspondants de deux contours polygonaux inscrit et circonscrit appartenant à une autre loi quelconque d'inscription. Il faut prouver que leur limite commune est aussi égale à L.

En effet, les côtés du contour p tendant vers zéro, la différence $P - p$ pourra, d'après ce qui précède, être rendue moindre qu'une quantité fixe β aussi petite qu'on voudra. D'autre part, P, étant supérieur à l'un quelconque des contours inscrits (37), ne peut être qu'égal ou supérieur à la première limite L. Puisque $P - p$ est $< \beta$, on a donc, *a fortiori*,

$$p + \beta > L \quad \text{ou} \quad p > L - \beta.$$

D'ailleurs, p, étant moindre que l'un quelconque des contours circonscrits, est au plus égal à la limite L de celui considéré en premier lieu, et l'on peut écrire

$$p \leqq L;$$

p étant ainsi compris entre L et $L - \beta$, et β tendant indéfini-

ment vers zéro, la limite de p (comme celle de P) est encore égale à L.

224. La démonstration qu'on vient de développer entraîne d'importantes propositions qu'il convient d'énoncer ici.

La corde AB (*fig.* 159), étant moindre que tous les contours polygonaux inscrits (36), est moindre que leur limite, c'est-à-dire que l'arc AB quel qu'il soit. Donc, *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

225. Si l'on considère un arc convexe AB et un autre arc quelconque AIB, terminé aux mêmes extrémités et enveloppant le premier, on peut inscrire dans l'arc AB un contour polygonal p et dans l'arc AIB un contour polygonal p' n'ayant aucun point commun avec l'arc AB. On aura alors (37) $p' > p$ et, par suite, en passant à la limite (223), arc AIB $>$ arc AB.

Donc, *tout arc convexe est moindre que tout arc enveloppant terminé aux mêmes extrémités.*

On prouverait de même que *toute ligne convexe est moindre que toute ligne enveloppante.*

226. Enfin, en se reportant à la *fig.* 159, on a, d'après ce qui précède,

$$\text{corde AF} < \text{arc AF} < \text{AL} + \text{LF}.$$

Il en résulte, en divisant par corde AF $=$ AL$'$ $+$ L$'$F,

$$1 < \frac{\text{arc AF}}{\text{corde AF}} < \frac{\text{AL} + \text{LF}}{\text{AL}' + \text{L}'\text{F}}.$$

Mais le dernier rapport a pour limite l'unité quand l'arc AF tend vers zéro, puisqu'il est formé par l'addition terme à terme de deux rapports qui remplissent la même condition (219). Donc, *la limite d'un arc de courbe quelconque à sa corde, quand cet arc tend vers zéro, est égale à l'unité.*

THÉORÈME.

227. *Deux circonférences quelconques sont proportionnelles à leurs rayons ou à leurs diamètres.*

Soient C et C$'$ les longueurs des deux circonférences proposées, qui ont pour rayons R et R$'$, pour diamètres D et D$'$.

Inscrivons respectivement dans ces deux circonférences

deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, dont les périmètres soient P et P'. Ces polygones seront semblables, et l'on aura (202)

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre de côtés des deux polygones inscrits, leurs côtés respectifs tendront vers zéro, et, la même relation subsistant toujours, on aura, en passant à la limite (221),

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{D}{D'}.$$

COROLLAIRES.

228. La proportion précédente peut s'écrire

$$\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}.$$

Donc, *le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.*

Ce rapport, qui est la longueur de la circonférence qui a pour diamètre l'unité, est toujours représenté par π.

Le nombre π est incommensurable, mais on peut, comme nous le montrerons, le calculer avec une approximation quelconque. Nous donnons ci-dessous sa valeur, celle de son inverse et celle de son logarithme décimal, à moins d'une unité du quinzième ordre par défaut :

$$\pi = 3,14159\,26535\,89793\ldots,$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830\,98861\,83790\ldots,$$

$$\log\pi = 0,49714\,98726\,94133\ldots.$$

229. De la relation

$$\frac{C}{D} = \frac{C}{2R} = \pi,$$

on déduit

$$C = 2\pi R, \quad R = \frac{C}{2\pi}.$$

Ces formules permettent, quand on connaît π, de *calculer la longueur d'une circonférence de rayon donné* et *le rayon d'une circonférence de longueur donnée.*

230. Dans une circonférence de rayon R, la longueur de l'arc de 1° est égale (**107**) à

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

Donc, dans cette circonférence, la longueur l d'un arc de n degrés est donnée par la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Cette relation, qui sert à calculer l'une des trois quantités l, R, n, quand les deux autres sont données, est d'un usage continuel dans les applications.

THÉORÈME.

231. *Deux arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons.*

On entend par *arcs semblables* des arcs qui répondent à des angles au centre égaux dans des cercles de rayons différents. Ces arcs comprennent alors le même nombre de degrés sur leurs circonférences respectives (**107**).

Soient l et l' les longueurs des deux arcs semblables considérés sur les circonférences de rayons R et R', et soit n leur nombre de degrés commun. On a (**230**)

$$l = \frac{\pi R n}{180}, \quad l' = \frac{\pi R' n}{180},$$

d'où

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

SCOLIE.

232. La proportion précédente peut s'écrire

$$\frac{l}{R} = \frac{l'}{R'}.$$

Par suite, lorsqu'un angle est donné, la longueur de l'arc qui lui sert de mesure (**106**) change avec le rayon choisi, mais le rapport de cet arc au rayon correspondant demeure invariable. On peut donc adopter ce rapport comme mesure α de

l'angle considéré et poser

$$\alpha = \frac{l}{R} \quad \text{ou} \quad l = \alpha R.$$

Dans ce système, *l'angle est numériquement égal au rapport de l'arc qu'il intercepte sur une circonférence déterminée dont son sommet est le centre au rayon de cette circonférence, et l'arc à son tour est égal au produit de l'angle par le rayon.*

On a $\alpha = 1$ pour $l = R$. Par conséquent, l'*unité angulaire* est alors représentée par l'angle qui intercepte sur une circonférence quelconque un arc égal au rayon de cette circonférence. On obtient le nombre de degrés de cet arc en faisant $l = R$ dans la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

du n° **230**. Il vient alors

$$n = \frac{180}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',80 \ldots .$$

Si l'on prend de plus le rayon choisi pour *unité de longueur*, au lieu de la laisser arbitraire, on a simplement

$$\alpha = l.$$

L'angle est alors mesuré par l'arc qu'il intercepte sur la circonférence de rayon 1, égale à 2π, son sommet étant au centre de cette circonférence. Dans ce cas, l'angle droit est représenté par $\frac{\pi}{2} = 1,5707963 \ldots$, l'angle de 45° par $\frac{\pi}{4} = 0,7853981 \ldots$, etc.

Quand un angle est mesuré ainsi par un nombre abstrait A, son nombre de degrés se déduit de la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

où l'on doit faire $l = A$ et $R = 1$.

On a donc

$$n = \frac{180 A}{\pi}.$$

V. — Calcul de π.

233. Il s'agit surtout ici de démontrer la possibilité de calculer π avec une approximation quelconque. La solution complète et pratique de cette question appartient aux Mathématiques supérieures. Nous y reviendrons plus loin (*voir* t. III, *Alg. sup.*).

Il résulte de la formule (229)

$$\pi = \frac{\text{circ.R}}{2R}$$

que, pour trouver π, on peut :

1° *Se donner la longueur d'une circonférence et calculer son rayon* (c'est la *méthode des isopérimètres*);

2° *Se donner le rayon d'une circonférence et calculer sa longueur* (c'est la *méthode des périmètres*).

234. Méthode des isopérimètres. — Cette méthode a été publiée à Nancy, en 1813, par le géomètre Schwab. Elle conduit à des calculs qui sont, *directement*, plus simples que ceux que la méthode des périmètres exige.

Si nous prenons 2 comme longueur de la circonférence choisie, on a

$$\pi = \frac{2}{2R} = \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad R = \frac{1}{\pi}.$$

Le rayon de la circonférence égale à 2 représente donc l'inverse du nombre π.

Il en résulte que l'apothème et le rayon de tout polygone régulier de périmètre égal à 2 sont des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, l'une par défaut, l'autre par excès; car, la circonférence inscrite dans ce polygone et la circonférence qui lui est circonscrite étant alors, l'une moindre, l'autre plus grande que son périmètre 2 (221, 223), les rayons de ces circonférences comprennent nécessairement le rayon R de la circonférence égale à 2 (227).

Cela posé, prenons pour point de départ le carré de périmètre égal à 2 ou de côté $\frac{1}{2}$. Nous aurons, en désignant son

apothème par a_1 et son rayon par r_1 (204),

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Nous pourrons donc, à l'aide des formules du n° 213, calculer successivement les apothèmes et les rayons a_2, r_2, a_3, r_3, a_4, r_4, ... des polygones réguliers isopérimètres de 8, 16, 32, ... côtés.

Nous aurons

$$a_2 = \frac{a_1 + r_1}{2}, \quad r_2 = \sqrt{r_1 a_2}, \quad a_3 = \frac{a_2 + r_2}{2}, \quad r_3 = \sqrt{r_2 a_3}, \quad \ldots$$

On voit que, dans la suite

$$a_1, \; r_1, \; a_2, \; r_2, \; a_3, \; r_3, \; \ldots, \; a_n, \; r_n, \; \ldots,$$

chaque terme, à partir du troisième, est alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne proportionnelle des deux termes qui le précèdent. De plus, les apothèmes ou les termes de rang impair a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... vont en croissant tout en restant inférieurs à $\frac{1}{\pi}$, tandis que les rayons ou les termes de rang pair r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... vont en décroissant (214), tout en restant supérieurs à $\frac{1}{\pi}$. D'ailleurs, comme on a (214)

$$r_1 - a_1 < \frac{r-a}{4},$$

on a aussi

$$r_2 - a_2 < \frac{r_1 - a_1}{4} \quad \text{ou} \quad r_2 - a_2 < \frac{r-a}{4^2},$$

$$r_3 - a_3 < \frac{r_2 - a_2}{4} \quad \text{ou} \quad r_3 - a_3 < \frac{r-a}{4^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$r_n - a_n < \frac{r_{n-1} - a_{n-1}}{4} \quad \text{ou} \quad r_n - a_n < \frac{r-a}{4^n}.$$

Par conséquent, en prenant n assez grand, on peut rendre la différence $r_n - a_n$ de deux termes consécutifs, assez éloignés dans la suite, moindre que toute quantité donnée.

Les termes de cette suite, alternativement inférieurs et supérieurs à $\frac{1}{\pi}$, ont donc ce nombre pour limite (215).

Si l'on remarque enfin que $a_1 = \frac{1}{4}$ est la moyenne arithmétique entre 0 et $\frac{1}{2}$ et que $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est la moyenne proportionnelle entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, on peut énoncer ce théorème, qui résume la méthode :

La suite des nombres obtenus en partant de 0 *et* $\frac{1}{2}$, *et en prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne proportionnelle des deux précédents, tend vers une limite égale au nombre* $\frac{1}{\pi}$, *inverse de* π.

Si l'on prolonge le calcul des moyennes successives jusqu'à ce que deux termes consécutifs présentent $m+1$ décimales communes, ces décimales appartiendront nécessairement à la valeur de $\frac{1}{\pi}$, et, en divisant 1 par le nombre trouvé, on connaîtra π avec m décimales exactes ou à moins d'une unité du $m^{\text{ième}}$ ordre décimal.

En effet, si l'on désigne par e et par e' les erreurs correspondantes de $\frac{1}{\pi}$ et de π, on a

$$e' = \frac{1}{\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\frac{1}{\pi}+e} = \frac{e}{\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}+e\right)}$$

ou

$$e' < \pi^2 e,$$

c'est-à-dire

$$e' < 10\, e.$$

En prenant les valeurs des apothèmes et des rayons avec sept décimales exactes et en s'arrêtant au polygone de 128 côtés, on forme le Tableau suivant :

Nombre des côtés.	Apothèmes.	Rayons.
4..........	$a_1 = 0,2500000$	$r_1 = 0,3535534$
8..........	$a_2 = 0,3017767$	$r_2 = 0,3266407$
16..........	$a_3 = 0,3142087$	$r_3 = 0,3203645$
32..........	$a_4 = 0,3172866$	$r_4 = 0,3188218$
64..........	$a_5 = 0,3180542$	$r_5 = 0,3184377$
128..........	$a_6 = 0,3182459$	$r_6 = 0,3183418$

La valeur de $\frac{1}{\pi}$ est donc égale à 0,318 à un millième près; elle est même égale à 0,3183 à un dix-millième près, car la différence $r_6 - a_6 = 0,0000959$. En divisant l'unité par 0,3183, on trouve $\pi = 3,142$ à un millième près ([1]).

235. Méthode des périmètres. — Si nous considérons la circonférence de rayon 1, sa longueur est le double du nombre π. Il faut donc trouver l'expression de cette longueur et la diviser ensuite par 2.

Inscrivons dans la circonférence proposée les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32, ... côtés, et calculons leurs périmètres en faisant usage des formules du n° 209.

Si nous appelons $c_1, c_2, c_3, \ldots$ les côtés des polygones réguliers successifs et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ leurs apothèmes, nous aurons (204)

$$2a_1 = \sqrt{2}, \qquad c_1 = \sqrt{2},$$

$$2a_2 = 2\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{4}} = \sqrt{4 - c_1^2}, \qquad c_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_1^2}} = \sqrt{2 - 2a_2},$$

$$2a_3 = 2\sqrt{1 - \frac{c_2^2}{4}} = \sqrt{4 - c_2^2}, \qquad c_3 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_2^2}} = \sqrt{2 - 2a_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_n = 2\sqrt{1 - \frac{c_{n-1}^2}{4}} = \sqrt{4 - c_{n-1}^2}, \qquad c_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_{n-1}^2}} = \sqrt{2 - 2a_n}.$$

Remarquons que l'on peut borner le calcul à la recherche des diamètres inscrits $2a_1, 2a_2, 2a_3, \ldots, 2a_n$ et du dernier côté c_n. En effet, si, dans l'expression de $2a_n$, on remplace c_{n-1} par sa valeur $\sqrt{2 - 2a_{n-1}}$, on trouve

$$2a_n = \sqrt{2 + 2a_{n-1}}.$$

Chaque diamètre inscrit peut donc être calculé à l'aide du précédent.

Admettons qu'on s'arrête au polygone régulier de 256 côtés, dont le côté est représenté par c_7.

On pourra former le Tableau suivant :

$$2a_1 = 1,41421352,$$
$$2a_2 = 1,84775905,$$
$$2a_3 = 1,96157055,$$
$$2a_4 = 1,99036945,$$
$$2a_5 = 1,99759091,$$
$$2a_6 = 1,99939764,$$
$$2a_7 = 1,99984940.$$

---

(1) On peut abréger beaucoup les calculs, eu égard au degré d'approximation obtenu, en adoptant la marche indiquée dans le Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition (1879), p. 192 et suiv.

De la dernière valeur, on déduira

$$c_7 = \sqrt{2 - 2a_7} = 0,02454302.$$

En multipliant c_7 par 256, on aura, pour le périmètre du polygone régulier inscrit de 256 côtés,

$$p = 6,28301.$$

On en déduira, pour le périmètre du polygone circonscrit semblable (**202**),

$$\frac{P}{p} = \frac{1}{a_7}, \quad \text{d'où} \quad P = 6,28349.$$

Les théories exposées en Arithmétique (*voir* t. I, p. 189 et suiv.) prouvent, en effet, qu'on ne peut pas compter sur plus de cinq décimales exactes dans le calcul des périmètres p et P.

La circonférence de rayon 1 étant comprise entre p et P (**221**, **223**), toutes les décimales communes aux expressions des deux périmètres appartiennent à l'expression de cette circonférence. On a donc, pour sa longueur, 6,283 à un demi-millième près, et, en divisant ce nombre par 2, on trouve $\pi = 3,1415$ à un quart de millième près. Ici, le chiffre des dix-millièmes se trouve lui-même exact.

236. Les dernières formules indiquées conduisent à une expression remarquable de π.

De $2a_1 = \sqrt{2}$ et $2a_n = \sqrt{2 + 2a_{n-1}}$ on déduit successivement

$$2a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad 2a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \ldots,$$

$$2a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}},$$

le nombre des radicaux du second membre dans la dernière égalité étant égal à n.

On a ensuite

$$c_n = \sqrt{2 - 2a_n},$$

c'est-à-dire

$$c_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}},$$

le nombre des radicaux du second membre étant $n+1$.

Mais, puisqu'on part du carré, c_n répond à un nombre de côtés représenté par 2^{n+1}. On a donc, pour le périmètre du dernier polygone régulier inscrit dans la circonférence de rayon 1,

$$p = 2^{n+1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}},$$

ou, en divisant par 2 et en faisant tendre n vers l'infini,

$$\pi = \lim 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}},$$

le nombre des radicaux du second membre étant $n+1$.

237. La méthode des périmètres a été suivie par Archimède, l'illustre géomètre de Syracuse, qui, le premier (250 avant J.-C.), a trouvé une expression approchée du nombre π.

En partant de l'hexagone et en s'arrêtant aux deux polygones réguliers inscrit et circonscrit de 96 côtés, Archimède a montré que π était compris entre $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$. Cette dernière valeur, qui surpasse π de moins de 2 millièmes, est très souvent employée dans la pratique.

Adrien Métius a découvert la valeur aussi par excès $\frac{355}{113}$, qui est approchée à moins d'un demi-millionième et qui est facile à retenir. Pour la retrouver, on écrit deux fois de suite les trois premiers nombres impairs. On a ainsi 113355 : les trois premiers chiffres composent le dénominateur de l'expression, et les trois derniers son numérateur.

LIVRE DEUXIÈME.

LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉTERMINATION DES AIRES.

I. — Aires polygonales.

238. Après avoir étudié, au point de vue élémentaire, les propriétés des deux lignes planes les plus simples, nous devons considérer de même les surfaces planes *limitées* dont on fait l'usage le plus fréquent.

239. Un contour fermé de figure quelconque, tracé sur un plan, détermine une surface plane limitée.

Deux surfaces planes limitées sont *égales* (7), lorsqu'on peut les placer exactement l'une sur l'autre, c'est-à-dire les faire *coïncider*.

Ajouter plusieurs surfaces planes limitées, c'est les disposer les unes à la suite des autres sur le même plan, dans un ordre d'ailleurs quelconque, de manière qu'elles n'aient aucune partie intérieure commune et qu'elles ne se relient que par certaines portions de leurs contours.

Si une surface A est ainsi la *somme* de deux surfaces B et C, la surface C, à son tour, est la *différence* des deux surfaces A et B.

240. *Mesurer* une surface plane limitée, c'est trouver son rapport à une autre surface plane limitée prise pour *unité*. Le résultat de cette mesure s'appelle l'*aire* de la surface proposée.

Il y a donc la même différence entre les mots *surface* et *aire* qu'entre les mots *ligne* et *longueur* : on les confond d'ailleurs très souvent dans le langage ordinaire.

Deux surfaces planes limitées peuvent n'être pas *superposables* et avoir cependant des aires égales. On dit alors que ces deux surfaces sont *équivalentes* (7).

Par exemple, si l'on ajoute trois surfaces planes quelconques A, B, C, d'abord dans l'ordre ABC, puis dans l'ordre ACB, puis enfin dans l'ordre CAB, les surfaces *sommes* obtenues ne sont pas en général superposables, mais elles renferment évidemment le même nombre d'unités superficielles, et sont équivalentes.

Si, à des figures planes de surfaces équivalentes, on ajoute ou l'on retranche d'autres figures de surfaces équivalentes, il est clair que les sommes ou les différences ainsi formées sont encore équivalentes. De même, si l'on divise deux figures équivalentes en un même nombre de parties équivalentes, les parties de la première sont équivalentes à celles de la seconde.

241. Le problème de la mesure des surfaces planes limitées ou de la détermination des aires correspondantes présente un caractère particulier, à cause de la difficulté de porter ou d'appliquer successivement sur une surface plane quelconque la surface choisie pour unité. On ne peut donc résoudre ce problème *directement* que dans un très petit nombre de cas. Mais, une fois ces solutions obtenues, on peut en déduire, par des considérations d'équivalence, l'expression des aires de toutes les surfaces planes limitées par des lignes droites.

C'est le *rectangle* qui nous servira de point de départ.

Nous indiquerons d'abord les définitions suivantes.

242. On prend pour *base* d'un triangle le côté que l'on veut : la *hauteur* du triangle est alors la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.

Un côté quelconque d'un parallélogramme étant pris pour *base*, la *hauteur* de ce parallélogramme est la distance constante qui existe entre la base et le côté opposé, égal et parallèle.

D'après cela, les deux côtés adjacents d'un rectangle constituent indifféremment sa *base* et sa *hauteur*, ou encore les

dimensions de la figure. Mais cette dernière dénomination s'applique *exclusivement* aux côtés du rectangle.

Les deux côtés parallèles d'un trapèze sont ses *bases;* sa *hauteur* est la distance constante entre ses deux bases.

243. *L'unité de surface est,* en général, *le carré construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre carré.*

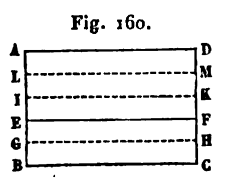
Par conséquent, chercher l'aire d'une figure plane, c'est chercher combien sa superficie renferme de mètres carrés et de subdivisions du mètre carré.

THÉORÈME.

244. *Le rapport des aires de deux rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs* (*fig.* 160).

L'aire d'un rectangle dépend évidemment de sa base et de sa hauteur. Nous allons chercher quelle influence la variation de la hauteur peut avoir sur la variation de l'aire, en supposant en premier lieu la base constante.

Fig. 160.



Deux rectangles de même base et de même hauteur sont égaux, puisqu'ils peuvent coïncider.

Cela posé, soient deux rectangles ayant une même base BC et des hauteurs différentes BA et BE. On peut toujours les supposer placés l'un dans l'autre, comme l'indique la figure. Admettons l'existence d'une commune mesure entre les deux hauteurs BA et BE. Si cette commune mesure est contenue cinq fois dans BA et deux fois dans BE, on aura

$$\frac{BA}{BE} = \frac{5}{2}.$$

Par tous les points de division G, I, L, menons des parallèles à la base BC. Nous partagerons le rectangle ABCD en cinq rectangles partiels et le rectangle BCFE en deux rectangles partiels : tous ces rectangles partiels seront égaux entre eux comme ayant même base et même hauteur. On pourra prendre l'un de ces rectangles partiels comme commune mesure entre les deux rectangles proposés, et l'on aura

$$\frac{ABCD}{BCFE} = \frac{5}{2}.$$

Le rapport des deux rectangles de même base est donc égal à celui de leurs hauteurs. Et comme on peut prendre, au contraire, pour base du premier rectangle le côté BA et pour base du second le côté BE, de sorte qu'ils ont alors BC pour hauteur commune, on peut dire aussi que *le rapport des aires de deux rectangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.*

Si la commune mesure supposée entre les hauteurs BA et BE n'existait pas, on se reporterait aux indications déjà données à ce sujet (105).

Il résulte *immédiatement* de ce qui précède, d'après la théorie des grandeurs proportionnelles (t. I, *Arithm.*, 411), que *les aires de deux rectangles quelconques sont entre elles comme les produits de leurs deux dimensions.*

THÉORÈME.

245. *Lorsqu'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur, l'aire du rectangle a pour mesure le produit des mesures de ses deux dimensions.*

Désignons par R et R' les aires de deux rectangles quelconques ayant pour dimensions, le premier B et H, le second B' et H'. Nous pourrons écrire (244)

$$\frac{R}{R'} = \frac{BH}{B'H'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'}.$$

Si R' est alors l'unité d'aire ou le carré construit sur l'unité de longueur (243), on a $R' = 1^{Mq}$, $B' = H' = 1^{M}$, et l'égalité précédente devient

$$\frac{R}{1^{Mq}} = \frac{B}{1^{M}} \cdot \frac{H}{1^{M}}.$$

Mais $\frac{R}{1^{Mq}}$, rapport de R à son unité, est la mesure de l'aire du premier rectangle; de même $\frac{B}{1^{M}}$ et $\frac{H}{1^{M}}$ représentent les mesures des deux dimensions de ce rectangle. Le même nombre abstrait correspond donc à la mesure du rectangle proposé, exprimée en mètres carrés, et au produit des mesures de la hauteur et de la base du rectangle, exprimées en mètres.

C'est ce qu'on énonce d'une manière rapide, mais inexacte, en disant : *Un rectangle a pour mesure le produit de sa base*

par sa hauteur. Cette abréviation n'a d'ailleurs aucun inconvénient, lorsqu'on a bien saisi les explications précédentes.

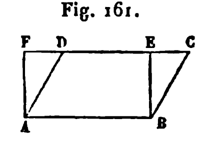
On voit que *l'aire d'un carré est représentée par la seconde puissance du nombre qui mesure son côté.* C'est de là que vient le nom de *carré,* donné en Arithmétique à la seconde puissance d'un nombre.

THÉORÈME.

246. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit des mesures de sa base et de sa hauteur* (*fig.* 161).

Soit le parallélogramme ABCD. Par les extrémités de la base AB, menons à AB et à sa parallèle CD les perpendiculaires AF et BE. On forme ainsi un rectangle ABEF qui a même base AB et même hauteur AF que le parallélogramme proposé. Ce rectangle est *équivalent* au parallélogramme donné.

Fig. 161.



En effet, ces deux figures ont une partie commune ABED et ne diffèrent que par les triangles ADF, BCE; si l'on démontre que ces triangles sont égaux, on aura prouvé l'équivalence des deux figures. Or les triangles rectangles ADF, BCE, sont égaux, parce que leurs hypoténuses AD et BC sont égales, comme parallèles comprises entre parallèles, et que leurs côtés AF et BE sont égaux pour la même raison.

Mais le rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (245); telle sera donc aussi la mesure du parallélogramme.

COROLLAIRE.

247. Soient deux parallélogrammes P, P'; désignons leurs bases par B, B', leurs hauteurs par H, H'. On aura

$$P = BH, \quad P' = B'H'.$$

Il en résulte

$$\frac{P}{P'} = \frac{BH}{B'H'}.$$

Par conséquent, *deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents; deux parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leurs bases par leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même*

base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

THÉORÈME.

248. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit des mesures de sa base et de sa hauteur* (*fig.* 162).

Soit le triangle ABC. Par le point A, menons AD parallèle à BC, et par le point C, CD parallèle à AB. On forme ainsi le parallélogramme ABCD. Le triangle ABC est évidemment la moitié de ce parallélogramme, qui a même base et même hauteur que lui, puisque les deux triangles ABC et ACD sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Fig. 162.

A D B E C

Le parallélogramme ayant pour mesure le produit des mesures de sa base BC et de sa hauteur AE (246), le triangle a pour mesure la moitié de ce produit.

COROLLAIRES.

249. Soient T et T′ deux triangles quelconques; désignons leurs bases par B et B′, leurs hauteurs par H et H′. On aura

$$T = \frac{BH}{2}, \quad T' = \frac{B'H'}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{T}{T'} = \frac{BH}{B'H'}.$$

Par conséquent, *deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents; deux triangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leurs bases par leurs hauteurs; le rapport de deux triangles de même base est égal à celui de leurs hauteurs; le rapport de deux triangles de même hauteur est égal à celui de leurs bases.*

250. On peut exprimer l'*aire d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.*

Désignons ce côté par a. La hauteur du triangle est évidemment égale à $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$ ou à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; par suite, son aire a

pour expression

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

251. Si l'on désigne respectivement par S, a et h, les nombres qui mesurent l'aire, la base et la hauteur d'un triangle, on a

$$S = \frac{ah}{2}.$$

Mais, la hauteur qui correspond au côté a ayant pour expression (193, 1°)

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

il vient, en substituant,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dans cette formule, qui fait connaître l'*aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés*, p représente le demi-périmètre $\frac{a+b+c}{2}$ du triangle.

252. Désignons par a, b, c, les trois côtés d'un triangle quelconque ABC, le côté a correspondant au sommet A, le côté b au sommet B, le côté c au sommet C. En joignant le centre O du cercle inscrit dans le triangle (*fig.* 93) à ses trois sommets, on décompose ce triangle en trois triangles partiels dont les bases sont les côtés a, b, c, et dont la hauteur commune est le rayon r du cercle inscrit. On peut donc exprimer l'aire du triangle ABC par la somme

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \quad \text{ou} \quad r\left(\frac{a+b+c}{2}\right).$$

En désignant par $2p$ le périmètre $a+b+c$ du triangle et en représentant son aire par S, on a donc la formule générale

$$S = pr, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{S}{p}.$$

253. Nous avons vu (179) que le produit de deux côtés a et b d'un triangle est égal à la hauteur h correspondant au troisième côté c, multipliée par le diamètre $2R$ du cercle cir-

conscrit au triangle. On a donc

$$ab = h.2R.$$

En multipliant par c les deux membres de cette égalité, il vient

$$abc = hc.2R.$$

Mais hc représente le double $2S$ de l'aire du triangle. On a donc $abc = 4SR$. Il en résulte la formule générale

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{abc}{4S} \quad (194).$$

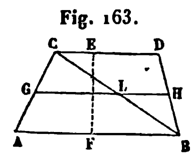
Les résultats trouvés aux nos 251 et 252 permettent de calculer les *rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle en fonction de ses côtés.*

THÉORÈME.

254. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit des mesures de la demi-somme de ses bases et de sa hauteur* (*fig.* 163).

Partageons le trapèze donné en deux triangles par la diagonale BC. Le triangle ACB a pour mesure (248) $\frac{AB \times EF}{2}$, le triangle BCD a pour mesure $\frac{CD \times EF}{2}$. Le trapèze ABCD, qui est la somme de ces deux triangles, a donc pour mesure la somme de ces deux mesures, c'est-à-dire, en mettant la hauteur commune EF en facteur,

Fig. 163.



$$\frac{AB + CD}{2} \times EF.$$

SCOLIE.

255. Si l'on représente par S, B, b, H, les nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un trapèze, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$S = \frac{B + b}{2} H.$$

256. Si par le point G, milieu de AC, on mène GH parallèle aux deux bases, on sait (85) que cette droite passe par le

milieu H de BD et représente la demi-somme des bases du trapèze. On peut donc dire encore que *l'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles.*

PROBLÈME.

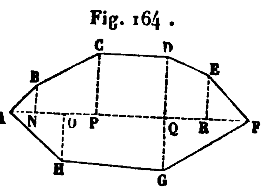
257. *Mesurer l'aire d'un polygone quelconque.*

Pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque, on peut le décomposer en triangles, soit en menant toutes les diagonales qui aboutissent à un même sommet, soit en choisissant un point dans son plan et en le joignant à tous ses sommets. On calcule alors l'aire de chaque triangle formé, on fait la somme arithmétique ou algébrique des résultats obtenus, et on a la mesure demandée.

Lorsque le polygone est tracé sur le terrain, on suit ordinairement une autre méthode (*fig.* 164).

On mène la plus grande diagonale AF du polygone proposé, et l'on abaisse, des sommets extérieurs sur cette diagonale, les perpendiculaires BN, CP, DQ, ER, HO, GQ. Ces perpendiculaires partagent la figure en triangles et trapèzes rectangles. En mesurant les différents segments déterminés sur AF et les perpendiculaires abaissées sur cette droite, on a tous les éléments nécessaires pour calculer les aires des différentes parties du polygone, et par suite l'aire de ce polygone lui-même.

Fig. 164.



Lorsque le polygone proposé est tracé sur le papier, on peut le transformer en un triangle équivalent dont on cherche ensuite la mesure. C'est ce que nous montrerons plus loin (276).

II. — Aires circulaires.

THÉORÈME.

258. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème* (*fig.* 165).

Soit O le centre du polygone régulier ABCDEF; joignons-le à tous les sommets du polygone; nous le partagerons ainsi en autant de triangles qu'il a de côtés, et tous ces triangles seront égaux entre eux. Considérons en particulier le triangle AOB;

si AB est sa base, l'apothème OG du polygone sera sa hauteur, et la mesure de l'aire du triangle sera égale à $\frac{AB \times OG}{2}$.

Fig. 165.

Si le polygone proposé a n côtés, il faudra multiplier la mesure précédente par n pour avoir l'aire du polygone : cette aire S aura donc pour expression $\frac{n AB \times OG}{2}$ ou $\frac{P \times a}{2}$, en désignant par P le périmètre du polygone et par a son apothème.

THÉORÈME.

259. *L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de sa circonférence par son rayon.*

La circonférence étant la limite des périmètres des polygones réguliers qui y sont inscrits et dont on double indéfiniment le nombre des côtés (**221**, **222**), le cercle est en même temps la limite des aires de ces polygones. De plus, le rayon de la circonférence est la limite des apothèmes de ces mêmes polygones (**201**), puisque la longueur de leur côté tend vers zéro.

Cela posé, soient S, P, a, l'aire, le périmètre et l'apothème de l'un quelconque des polygones considérés : on a constamment entre ces variables la relation

$$S = \frac{P \times a}{2} \quad (\mathbf{258}).$$

Donc, elle aura aussi lieu entre les limites des deux membres de l'égalité posée (**217**). On a, par conséquent, en désignant par R le rayon du cercle,

$$\text{cercle}\, R = \frac{\text{circ}\, R \times R}{2}.$$

Nous avons d'ailleurs trouvé (**229**)

$$\text{circ}\, R = 2\pi R,$$

et il vient, en substituant,

$$\text{cercle}\, R = \pi R^2.$$

Ainsi, *pour calculer l'aire d'un cercle, il faut multiplier le carré de son rayon par le nombre constant* π.

De la formule précédente, on déduit

$$R = \sqrt{\frac{\text{cercle}\,R}{\pi}}.$$

Donc, *pour calculer le rayon d'un cercle d'aire donnée, il faut diviser par π le nombre qui exprime cette aire et extraire la racine carrée du résultat.*

Si l'on élimine R entre les relations

$$\text{cercle}\,R = \frac{\text{circ}\,R \times R}{2} \quad \text{et} \quad \text{circ}\,R = 2\pi R,$$

on trouve

$$\text{cercle}\,R = \frac{(\text{circ}\,R)^2}{4\pi},$$

formule qui permet de calculer directement l'aire du cercle en fonction de la longueur de sa circonférence, et réciproquement.

THÉORÈME.

260. *L'aire d'un secteur a pour mesure la moitié du produit de l'arc qui lui sert de base par le rayon du cercle dont le secteur fait partie* (*fig.* 166).

Un *secteur* AOB est la portion de cercle comprise entre deux rayons OA et OB; l'arc AB qui correspond aux extrémités de ces rayons est la *base* du secteur.

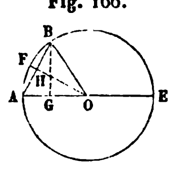


Fig. 166.

Si l'on inscrit dans la base du secteur une ligne brisée *régulière* (197), la portion de plan comprise entre cette ligne brisée et les rayons qui limitent le secteur circulaire constitue un secteur polygonal régulier inscrit dans ce secteur circulaire et qui a pour base la ligne brisée régulière.

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée régulière inscrite, elle a pour limite l'arc AB (221, 222). L'aire du secteur circulaire est donc la limite des aires des secteurs polygonaux réguliers inscrits, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leur base.

Cela posé, désignons par R le rayon du cercle, par S l'aire du secteur AOB, par l la longueur de sa base; soient de même s l'aire d'un secteur polygonal régulier inscrit, p le périmètre de

sa base et a l'apothème de cette base. En raisonnant comm au n° 258, on trouve immédiatement

$$s=\frac{pa}{2}.$$

Cette relation, ayant constamment lieu entre les quantité variables considérées, a aussi lieu entre leurs limites (217 et l'on obtient la formule

$$S=\frac{lR}{2},$$

qui justifie l'énoncé.

COROLLAIRE.

261. Si n est le nombre de degrés de l'arc AB, on a (230

$$l=\frac{\pi R n}{180},$$

et l'expression de l'aire du secteur AOB devient

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Cette formule est facile à retenir. $\frac{\pi R^2}{360}$ représente l'aire du secteur de 1°, c'est-à-dire de celui qui a pour base l'arc de 1° $\frac{\pi R^2 n}{360}$ représente donc l'aire du secteur qui a pour base l'ar de n degrés.

SCOLIE.

262. *L'aire d'un segment circulaire a pour mesure la moiti du produit du rayon par l'excès de l'arc du segment sur l moitié de la corde qui sous-tend l'arc double (fig. 166).*

Nous avons déjà défini le segment circulaire (110).

Cherchons l'aire du segment AFB : il est la différence du secteur correspondant AOB et du triangle isoscèle AOB.

Si l'arc AB correspond à un polygone régulier dont on sache calculer le côté AB et l'apothème OH, on a immédiatement

$$\text{sect}AOB=\frac{\text{arc}AB\times OA}{2},\quad \text{tr}AOB=\frac{AB\times OH}{2},$$

d'où

$$\text{segm}AFB=\frac{\text{arc}AB.OA-AB.OH}{2}.$$

Si l'arc AB est quelconque, on écrit

$$\text{tr AOB} = \frac{\text{OA} \times \text{BG}}{2},$$

BG étant la perpendiculaire abaissée du sommet B sur OA, et il vient

$$\text{segm AFB} = \frac{\text{OA}(\text{arc AB} - \text{BG})}{2},$$

ce qui justifie l'énoncé.

La *Trigonométrie* (*voir* plus loin) permet, dans tous les cas, de calculer la perpendiculaire BG, quand on connaît le nombre de degrés n de l'arc AB.

Remarquons, en terminant, que, lorsqu'on a à calculer des formules où il entre des nombres complexes de degrés, minutes et secondes, le mieux est, en général, de convertir les minutes et les secondes en parties décimales de degré (t. I, *Arithm.*, 377).

III. — Aire approchée d'une figure plane terminée par une courbe quelconque.

FORMULE DE SIMPSON.

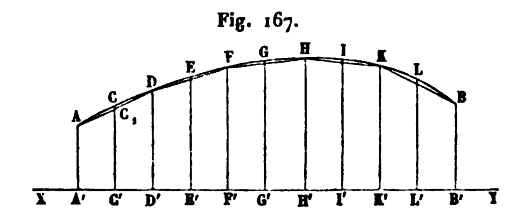
263. B et B′ désignant les bases d'un trapèze, B″ la parallèle équidistante de ces bases et h la demi-hauteur, on peut exprimer l'aire du trapèze par la formule

$$(1) \qquad \frac{h}{3}(B + B' + 4B''),$$

qui se réduit en effet à la formule connue $h(B + B')$, lorsqu'on y remplace B″ par sa valeur $\frac{1}{2}(B + B')$.

Cela posé, soit à évaluer approximativement l'aire comprise entre un arc de courbe quelconque AB, une droite fixe XY et les perpendiculaires

Fig. 167.



AA′, BB′, abaissées sur cette droite des extrémités de l'arc AB (*fig.* 167).

Supposons d'abord que l'arc AB soit, dans toute son étendue, concave

vers la droite XY. Divisons la base A'B' en un nombre *pair* de parties égales, en dix par exemple, et, par les points de division C', D', E', F', G', H', I', K', L', élevons des perpendiculaires à XY. Désignons respectivement par y_1, y_2, y_3, ..., y_{11}, les perpendiculaires ou ordonnées AA', CC', DD',..., BB', et par h la distance constante de deux ordonnées consécutives. C_1 étant le point où la corde AD coupe CC', on a, pour l'aire du trapèze rectiligne ADD'A',

$$\frac{h}{3}(AA' + DD' + 4C_1C');$$

mais ce trapèze est moindre que le trapèze curviligne ACDD'A'; on est ainsi conduit à remplacer C_1C' par CC', et à prendre pour valeur approchée de l'aire du trapèze curviligne ACDD'A' l'expression

$$\frac{h}{3}(y_1 + y_3 + 4y_2).$$

En prenant de même

$$\frac{h}{3}(y_3 + y_5 + 4y_4), \quad \frac{h}{3}(y_5 + y_7 + 4y_6),$$

$$\frac{h}{3}(y_7 + y_9 + 4y_8), \quad \frac{h}{3}(y_9 + y_{11} + 4y_{10})$$

pour expressions des aires des trapèzes curvilignes DFF'D', FHH'F', HKK'H', KBB'K', et faisant la somme, on obtient pour valeur approchée de l'aire demandée

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})].$$

On retient aisément cette formule, attribuée à Simpson, en la mettant sous la forme

$$(2) \qquad S = \frac{h}{3}(E + 2I + 4P),$$

dans laquelle E désigne la somme des deux ordonnées extrêmes, I la somme des autres ordonnées de rang impair, et P la somme de toutes les ordonnées de rang pair.

FORMULE DE PONCELET.

264. La base A'B' doit ici encore être partagée en un nombre *pair* de parties égales, dix par exemple (*fig.* 168). Nous désignerons les onze ordonnées correspondantes par $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{10}, y_{11}$. Par les extrémités de toutes les ordonnées *de rang pair* $y_2, y_4, \ldots, y_{10}$, menons des tangentes à la courbe AB et terminons ces tangentes aux deux ordonnées voisines. Nous formerons ainsi une série de trapèzes dont la somme, évidemment

supérieure à l'aire cherchée dans le cas de la figure, sera une limite supérieure du résultat demandé.

En appelant h l'intervalle constant entre deux ordonnées consécutives, on a

$$\text{trapèze } AD' = 2h.y_2,$$
$$\text{trapèze } DF' = 2h.y_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\text{trapèze } KB' = 2h.y_{10}.$$

En désignant par S la somme de ces trapèzes, il vient

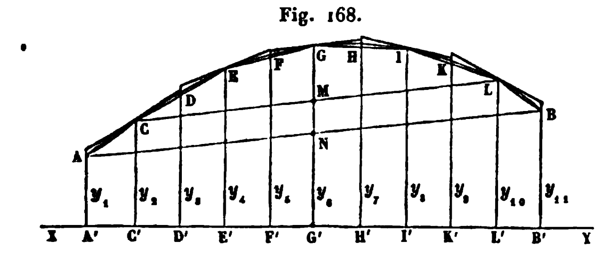
$$S = 2h(y_2 + y_4 + \ldots + y_{10});$$

la parenthèse renferme toutes les ordonnées de rang pair. En désignant leur somme par P, on a donc

$$S = 2h.P.$$

Menons les cordes AC et BL, qui correspondent aux divisions extrêmes; puis, dans l'intervalle, les cordes CE, EG, GI, IL, qui correspondent

Fig. 168.



chacune à deux divisions. Nous formerons une nouvelle série de trapèzes dont la somme sera une limite inférieure du résultat demandé. On a

$$\text{trapèze } AC' = h\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$
$$\text{trapèze } CE' = 2h\left(\frac{y_2 + y_4}{2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\text{trapèze } IL' = 2h\left(\frac{y_8 + y_{10}}{2}\right),$$
$$\text{trapèze } LB' = h\left(\frac{y_{10} + y_{11}}{2}\right).$$

En désignant par s la somme de ces trapèzes, il vient

$$s = h\left[\frac{y_1 + y_{11}}{2} + \frac{3}{2}(y_2 + y_{10}) + 2(y_4 + y_6 + y_8)\right],$$

ou bien, en ajoutant et en retranchant dans la parenthèse $\frac{y_2+y_{10}}{2}$,

$$s = h\left(\frac{y_1+y_{11}}{2} - \frac{y_2+y_{10}}{2} + 2\text{P}\right).$$

A étant l'aire cherchée, on a

$$s < \text{A} < \text{S}.$$

Mais la moyenne $\frac{\text{S}+s}{2}$ tombe aussi entre s et S. On peut donc, sauf une erreur que nous estimerons, prendre

$$\text{A} = \frac{\text{S}+s}{2} = h\left(2\text{P} + \frac{\text{E}-\text{E}'}{4}\right);$$

dans cette formule, P désigne, comme nous l'avons dit, la somme de toutes les ordonnées de rang pair, E est la somme des deux ordonnées extrêmes, E′ est la somme des deux ordonnées voisines des deux extrêmes.

L'avantage de cette formule, quand le nombre des divisions est grand, c'est qu'il n'y entre que les ordonnées de rang pair et les deux ordonnées extrêmes, ce qui dispense de calculer les ordonnées intermédiaires de rang impair.

Il reste à indiquer une limite supérieure de l'erreur commise en employant la formule. Comme A tombe entre S et $\frac{\text{S}+s}{2}$ ou entre $\frac{\text{S}+s}{2}$ et s, l'erreur que l'on fait en substituant $\frac{\text{S}+s}{2}$ à A est moindre que $\text{S} - \frac{\text{S}+s}{2}$ ou que $\frac{\text{S}+s}{2} - s$, c'est-à-dire que

$$\frac{\text{S}-s}{2} = h\left(\frac{\text{E}-\text{E}'}{4}\right) = \frac{h}{2}\left(\frac{\text{E}}{2} - \frac{\text{E}'}{2}\right).$$

Menons sur la figure les droites AB et CL; ces deux droites coupent l'ordonnée du milieu GG′ en deux points M et N, et l'on a

$$\frac{y_2+y_{10}}{2} = \text{MG}', \quad \frac{y_1+y_{11}}{2} = \text{NG}',$$

c'est-à-dire

$$\frac{\text{E}}{2} - \frac{\text{E}'}{2} = \text{MN}.$$

La limite supérieure de l'erreur commise s'exprime donc géométriquement par le produit

$$\frac{h}{2}\cdot\text{MN}.$$

On peut donc, après avoir tracé la courbe, mener provisoirement les deux premières et les deux dernières ordonnées, ainsi que celle du milieu, en donnant à h une certaine valeur; puis, avant tout calcul, vérifier, en

mesurant MN, si l'approximation demandée est bien obtenue, c'est-à-dire si la valeur choisie pour h est convenable.

Si, dans ce qui précède, l'arc AB était convexe vers la droite XY dans toute son étendue, une marche analogue conduirait aux mêmes formules. Si cet arc était en partie concave et en partie convexe, en menant une perpendiculaire à XY par le point d'inflexion, on mesurerait, d'après les règles trouvées, les aires situées de part et d'autre de cette perpendiculaire et l'on en ferait la somme.

CHAPITRE II.

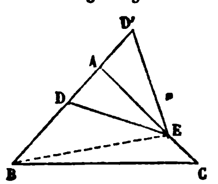
COMPARAISON DES AIRES.

I. — Rapports des aires semblables.

THÉORÈME.

265. *Les aires de deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont proportionnelles aux produits des côtés qui comprennent cet angle* (*fig.* 169).

Fig. 169.



Soient deux triangles ayant un angle égal. On pourra les disposer de manière que cet angle leur soit commun, c'est-à-dire les placer l'un dans l'autre comme les triangles ABC, ADE.

Formons alors le triangle ABE en menant la droite BE. Si l'on prend B comme sommet commun des deux triangles ABC, ABE, on voit que ces deux triangles ont leurs bases AC, AE, sur une même ligne droite; ils ont donc même hauteur et sont entre eux comme leurs bases (249). On a donc

$$(1) \qquad \frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

Si l'on prend E comme sommet commun des deux triangles ABE, ADE, ces deux triangles ont aussi même hauteur par rapport à leurs bases AB, AD, et l'on peut écrire

$$(2) \qquad \frac{ABE}{ADE} = \frac{AB}{AD}.$$

Si l'on multiplie terme à terme les égalités (1) et (2), le fac-

teur commun ABE disparaît, et il reste

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB.AC}{AD.AE}.$$

La démonstration précédente s'applique identiquement aux deux triangles ABC, AD′E, qui ont un angle supplémentaire.

THÉORÈME.

266. *Les aires de deux triangles semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues* (*fig.* 170).

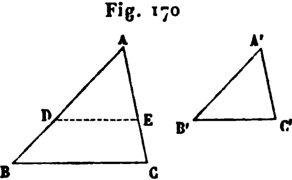


Fig. 170

Soient les deux triangles semblables ABC, A′B′C′. Si l'on porte le second sur le premier de manière à faire coïncider les angles égaux A et A′, le triangle A′B′C′ deviendra le triangle ADE, et l'on aura

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Cela posé, les deux triangles ABC, ADE, ayant un angle égal, on a (265)

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB.AC}{AD.AE} = \frac{AB}{AD}.\frac{AC}{AE} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

COROLLAIRES.

267. *Les aires de deux polygones semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues* (*fig.* 171).

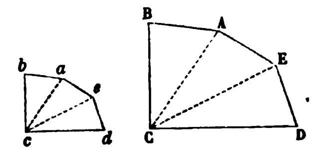


Fig. 171.

Décomposons les deux polygones proposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, en menant les diagonales qui correspondent aux sommets homologues C et *c*. Ces triangles étant

semblables, on a

$$\frac{BCA}{bca}=\frac{BA^2}{ba^2},\quad \frac{ACE}{ace}=\frac{AE^2}{ae^2},\quad \frac{ECD}{ecd}=\frac{ED^2}{ed^2}.$$

La similitude des polygones donne d'ailleurs

$$\frac{BA}{ba}=\frac{AE}{ae}=\frac{ED}{ed}\quad\text{ou}\quad\frac{BA^2}{ba^2}=\frac{AE^2}{ae^2}=\frac{ED^2}{ed^2},$$

et l'on en déduit

$$\frac{BCA}{bca}=\frac{ACE}{ace}=\frac{ECD}{ecd}.$$

En appliquant alors un théorème connu (t. I, *Alg. élém.*, 63), il vient

$$\frac{BCA+ACE+ECD}{bca+ace+ecd}=\frac{BCA}{bca}=\frac{BA^2}{ba^2}\quad\text{ou}\quad\frac{CBAED}{cbaed}=\frac{BA^2}{ba^2}.$$

268. Si l'on désigne par S et s les aires des deux polygones, par A et a deux de leurs côtés homologues, on a

$$\frac{S}{s}=\frac{A^2}{a^2},\quad\text{d'où}\quad\frac{A}{a}=\sqrt{\frac{S}{s}}.$$

Par conséquent, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polygone dans un rapport donné, l'*échelle* à employer pour amplifier ou réduire les côtés de ce polygone est égale à la racine carrée du rapport des aires des deux polygones, c'est-à-dire à la racine carrée du rapport donné.

THÉORÈME.

269. *Le rapport des aires de deux polygones réguliers semblables est égal à celui des carrés de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

Désignons par S et s les aires des deux polygones, par P et p leurs périmètres, par R et r leurs rayons, par A et a leurs apothèmes. On a

$$S=\frac{P.A}{2}\quad\text{et}\quad s=\frac{p.a}{2}\quad(256),$$

d'où

$$\frac{S}{s}=\frac{P.A}{p.a}=\frac{P}{p}\times\frac{A}{a}.$$

Nous savons d'ailleurs (202) que

$$\frac{P}{p}=\frac{A}{a}=\frac{R}{r}.$$

Si l'on remplace $\frac{P}{p}$ par le rapport égal $\frac{A}{a}$, il vient

$$\frac{S}{s}=\frac{A}{a}\times\frac{A}{a}=\frac{A^2}{a^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

THÉORÈME.

270. *Deux cercles sont proportionnels aux carrés de leurs rayons.*

Soient deux cercles quelconques dont les rayons sont R et R'. On a (258)

$$\text{cercle}\,R=\pi R^2,\quad \text{cercle}\,R'=\pi R'^2,$$

d'où

$$\frac{\text{cercle}\,R}{\text{cercle}\,R'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

SCOLIE.

271. *Les aires de deux secteurs semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

On entend par secteurs *semblables* ceux qui ont pour bases des arcs semblables, c'est-à-dire d'un même nombre de degrés.

Désignons les aires de ces secteurs par S et S', par R et R' leurs rayons, par n le nombre de degrés de leurs bases. Nous aurons (262)

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360},\quad S'=\frac{\pi R'^2 n}{360},\quad \text{d'où}\quad \frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

Les aires de deux segments semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

On entend par segments *semblables* ceux qui correspondent à des secteurs semblables. Désignons par S et T les aires du secteur et du triangle dont le premier segment est la différence, par S' et T' les aires du secteur et du triangle dont le second segment est la différence. Les deux secteurs et les deux triangles étant semblables, on a, en appelant R et R' les rayons

des cercles dont font partie les deux segments,

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}, \quad \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} \quad \text{et} \quad \frac{S-T}{S'-T'} = \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

En général, *les aires de deux surfaces semblables quelconques sont proportionnelles aux carrés de deux lignes homologues tracées d'une manière quelconque dans les deux surfaces.*

THÉORÈME.

272. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit* (*fig.* 172).

Soit le triangle ABC rectangle en A ; soient les carrés ABDE, ACFG, BCHK, construits sur ses trois côtés. L'angle en A étant droit, le côté AE du carré ABDE sera le prolongement du côté CA du triangle, et le côté AG du carré ACFG sera le prolongement du côté BA.

Fig. 172.

Cela posé, abaissons sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AL, et prolongeons-la jusqu'en I, où elle coupe le côté KH ; menons les droites AK et DC. Le triangle ABK a même base BK que le rectangle BKIL, et il a aussi même hauteur, puisque son sommet A se trouve sur la droite IL : le triangle ABK équivaut donc (245, 248) à la moitié du rectangle BKIL. De même, le triangle BCD équivaut à la moitié du carré ABDE, car il a même base BD et même hauteur, puisque son sommet C se trouve sur la droite EA. D'ailleurs, les deux triangles ABK et BCD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle ABK égal à l'angle CBD, comme formés tous deux d'un angle droit et de l'angle ABC du triangle donné ; le côté BK égal au côté BC comme côtés d'un même carré ; le côté AB égal au côté BD pour la même raison. De l'égalité des deux triangles ABK et BCD, on conclut l'équivalence du rectangle BKIL et du carré ABDE.

On démontrerait d'une manière analogue, en menant les droites AH et BF, l'équivalence du rectangle CLIH et du carré ACFG.

Le carré BCHK, somme des deux rectangles BKIL et CLIH, est donc équivalent à la somme des deux carrés ABDE et ACFG.

COROLLAIRES.

273. Deux rectangles de même hauteur étant entre eux comme leurs bases, on a

$$\frac{BKIL}{BCHK}=\frac{BL}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{CLIH}{BCHK}=\frac{CL}{BC};$$

d'où, en remplaçant les rectangles par les carrés équivalents,

$$\frac{ABDE}{BL}=\frac{ACFG}{CL}=\frac{BCHK}{BC}.$$

Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle sont donc *respectivement proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse elle-même.*

274. Si l'on construit sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC trois polygones semblables P, Q, R, on a (267)

$$\frac{P}{AB^2}=\frac{Q}{AC^2}=\frac{R}{BC^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{P+Q}{AB^2+AC^2}=\frac{R}{BC^2},$$

c'est-à-dire (168)

$$R=P+Q.$$

SCOLIE.

275. On pourrait déduire le théorème précédent du théorème du n° 168; car, puisque l'aire du carré construit sur une droite a pour mesure le carré du nombre abstrait qui mesure la longueur de cette droite, on voit que le théorème rappelé exprime que la mesure du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des mesures des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et par suite que le premier carré équivaut à la somme des deux autres. Inversement, on passerait du point de vue *concret* au point de vue *abstrait*, c'est-à-dire du

n° 272 au n° 168, en remplaçant les aires des carrés par leurs mesures respectives.

La même remarque s'applique aux diverses relations numériques que nous avons démontrées dans le § III du Chapitre III du premier Livre, entre les divers éléments d'un triangle, rapportés à une unité commune. De ces relations résultent immédiatement autant de théorèmes sur les aires; et l'on pourrait inversement donner des démonstrations directes de ces derniers théorèmes, comme l'a fait EUCLIDE, et en déduire ensuite les relations numériques correspondantes.

II. — Problèmes relatifs aux aires.

PROBLÈME.

276. *Construire un triangle équivalent à un polygone donné* (*fig.* 173, 174).

Soit, par exemple, le pentagone convexe ABCDE (*fig.* 173). En menant la diagonale EC, on détache de ce pentagone le triangle ECD. Si par le sommet D on mène alors une parallèle DF à la diagonale EC, tous les triangles qui ont EC pour base

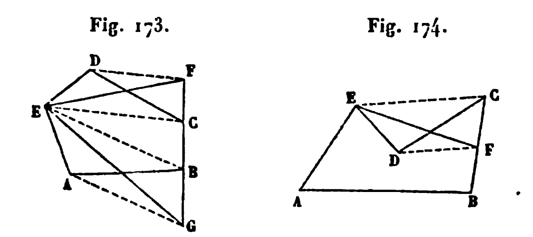


Fig. 173. Fig. 174.

et leurs sommets sur DF sont équivalents au triangle ECD (249) et forment avec le quadrilatère ECBA un polygone équivalent au pentagone proposé. Or, pour que le nouveau polygone ABCFE ait un sommet de moins, il suffit de choisir parmi tous ces triangles celui dont le sommet est en F, à la rencontre de la parallèle DF et du côté BC prolongé.

La construction indiquée permettant de *transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent, mais ayant un côté de moins*, on arrive toujours, en la répétant, à un triangle équivalent au polygone proposé.

Dans la *fig.* 173, en menant par le sommet A, jusqu'à la ren-

contre de FB prolongé, la parallèle AG à la diagonale EB, on passe du quadrilatère EABF au triangle équivalent FEG. Ce triangle est donc équivalent au pentagone primitif.

Lorsque le polygone considéré n'est pas convexe (*fig.* 174), la construction reste la même. Le pentagone concave ABCDE, augmenté du triangle EDC, équivaut au quadrilatère ABCE; et ce quadrilatère, diminué du triangle EFC, qui est équivalent au triangle EDC, donne le quadrilatère ABFE équivalent au pentagone proposé.

Comme nous l'avons dit (257), le problème précédent fournit un nouveau moyen pour évaluer l'aire d'un polygone; on peut, en effet, transformer le polygone considéré en un triangle équivalent, puis calculer l'aire de ce triangle.

PROBLÈME.

277. *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*

Construire un carré équivalent à une figure donnée, c'est opérer la *quadrature* de cette figure.

Supposons d'abord qu'on veuille construire un carré équivalent à un triangle donné. Soient X le côté de ce carré, B et H la base et la hauteur du triangle proposé. On devra avoir (245, 248)

$$X^2 = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2}H.$$

Le côté du carré cherché sera donc une moyenne proportionnelle à la moitié de la base du triangle et à sa hauteur.

S'il s'agit d'un parallélogramme, d'un trapèze, d'un polygone régulier et, en général, d'un polygone dont l'aire soit exprimée par le produit de deux lignes, il suffit de chercher la moyenne proportionnelle à ces deux lignes. On obtient ainsi le côté du carré équivalent.

Dans tout autre cas, on transforme le polygone donné en un triangle équivalent (276), et l'on cherche le carré équivalent à ce triangle, comme on vient de le dire.

PROBLÈME.

278. *Trouver deux droites proportionnelles aux aires de deux polygones donnés.*

On pourra toujours remplacer les polygones considérés par

les carrés équivalents (277). Soient a et a' les côtés de ces carrés, x et y les droites cherchées. On devra avoir

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

On peut choisir arbitrairement l'une des deux droites cherchées, y par exemple, et poser $y=a'$. Il vient alors

$$\frac{x}{a'}=\frac{a^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{a^2}{a'}.$$

x sera donc, dans cette hypothèse, une troisième proportionnelle (186) aux côtés a' et a, et le rapport de cette troisième proportionnelle à a' sera le même que celui des polygones donnés.

PROBLÈME.

279. *Construire un polygone équivalent à un polygone* P *et semblable à un polygone* Q.

Il s'agit ici de transformer un polygone donné P en un autre polygone X équivalent au polygone P, mais semblable à un second polygone donné Q.

Soient q un côté quelconque du polygone Q, et x le côté homologue du polygone X. On devra avoir (267)

$$\frac{Q}{X}=\frac{q^2}{x^2},$$

ou, puisque le polygone X doit être équivalent au polygone P,

$$\frac{Q}{P}=\frac{q^2}{x^2}.$$

Remplaçons les polygones Q et P par les carrés équivalents a^2 et b^2 (277). Il viendra

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{q^2}{x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b}=\frac{q}{x}.$$

Le côté x est donc une quatrième proportionnelle aux trois droites a, b, q (186), et il restera à construire sur ce côté, homologue du côté q, un polygone semblable au polygone Q (191).

PROBLÈME.

280. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence.*

S'il s'agit de deux carrés dont les côtés soient a et b ($a > b$), le côté x du carré égal à leur somme sera l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et b; le côté y du carré égal à leur différence sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (272).

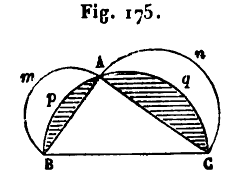
S'il s'agit de deux polygones semblables A et B (A > B), dont deux côtés homologues quelconques soient a et b, le côté homologue x du polygone semblable $X = A + B$ sera l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur a et b comme côtés de l'angle droit; le côté homologue y du polygone semblable $Y = A - B$ sera le second côté de l'angle droit du triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (274).

Dans le cas de deux cercles ayant R et R' pour rayons, il suffit de remplacer dans l'alinéa précédent a et b par R et R' pour trouver les rayons x et y des cercles égaux respectivement à la somme ou à la différence des deux cercles donnés.

SCOLIE.

281. Il résulte de ce qu'on vient de dire que, si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC (*fig.* 175) comme diamètres, on décrit des demi-cercles, le demi-cercle décrit sur l'hypoténuse sera équivalent à la somme des demi-cercles décrits sur les côtés de l'angle droit. En enlevant de part et d'autre les parties communes ApB, AqC, qui sont ombrées sur la figure, on voit que la somme des deux *lunules* AmBpA, AnCqA, est équivalente à l'aire du triangle rectangle ABC. Cette proposition est attribuée à Hippocrate.

Fig. 175.



PROBLÈME.

282. *Construire un polygone semblable à un polygone donné et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans le rapport de deux droites données* M *et* N (*fig.* 176).

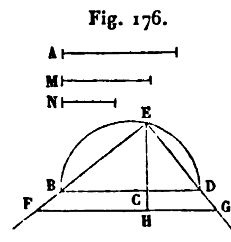
Supposons d'abord que le polygone donné soit un carré, et soit A son côté. Si X est le côté du carré cherché, on devra avoir (267)

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

La question est donc de construire un triangle rectangle tel que le rapport des segments déterminés sur l'hypoténuse par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit soit égal à $\frac{M}{N}$ (273) et que le côté adjacent au segment qui correspond à N soit égal à A.

Or, en portant sur une droite indéfinie BC = M, CD = N, en décrivant une demi-circonférence sur BD comme diamètre et en menant à BD la perpendiculaire CE jusqu'à la rencontre de cette demi-circonférence, on obtiendra un triangle rectangle BED dans lequel les segments de l'hypoténuse présenteront le rapport demandé. Il en sera de même (152) pour tous les triangles rectangles semblables qu'on formera en menant entre les côtés de l'angle droit BED, prolongés ou non, une parallèle à l'hypoténuse BD. Parmi tous ces triangles, celui dont le côté, dirigé suivant ED, est égal à A, répond à la question.

Fig. 176.



On portera donc sur ED la longueur EG = A; par le point G on mènera à BD la parallèle GF jusqu'à la rencontre de EB, et FE représentera le côté du carré cherché. On a, en effet,

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EG}^2} = \frac{FH}{HG} = \frac{BC}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{EF}^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

Soit maintenant un polygone quelconque P; désignons par p l'un de ses côtés et par x le côté homologue du polygone

cherché X. On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{X}{P}=\frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{X}{P}=\frac{x^2}{p^2},$$

d'où

$$\frac{x^2}{p^2}=\frac{M}{N}.$$

Le problème se trouve donc ramené à trouver le côté d'un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de deux droites données, question que nous venons de résoudre. Quand on aura obtenu le côté x homologue de p, il restera à construire sur ce côté un polygone semblable au polygone P.

Dans le cas de deux cercles, en désignant par x et r leurs rayons, on devra avoir

$$\frac{\pi x^2}{\pi r^2}=\frac{M}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{r^2}=\frac{M}{N}.$$

C'est encore le même problème.

SCOLIE.

283. Si le rapport $\frac{M}{N}$ était donné numériquement et égal par exemple à $\frac{5}{7}$, on choisirait une certaine longueur pour unité, et l'on rentrerait dans le cas précédent en prenant les droites BC et CD égales à cinq fois et à sept fois cette longueur.

284. La recherche d'une échelle de réduction (192) revient au fond à ce qui précède. Supposons que l'aire du plan doive être la millionième partie de l'aire du terrain. On aura, pour le rapport des carrés des lignes homologues du plan et du terrain,

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{1000000},$$

d'où

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{1000}.$$

Chaque ligne du plan devra donc être la millième partie de la ligne qui lui correspond sur le terrain : en d'autres termes, 1^{M} doit y être représenté par $0^{M},001$. Telle est l'échelle à adopter.

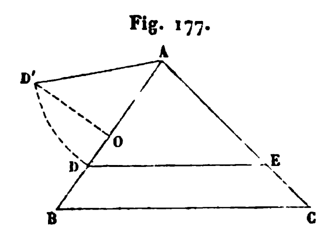
III. — Exercices et questions complémentaires.

PROBLÈME.

285. *Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une droite parallèle à sa base* (*fig.* 177).

ABC étant le triangle donné, admettons que la droite DE réponde à la

Fig. 177.



question. Le point D suffit pour déterminer cette droite, puisqu'elle doit être parallèle à BC.

Cela posé, le triangle ADE, semblable à ABC, devant être équivalent à sa moitié, on a (266)

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad 2\,AD^2 = AB^2.$$

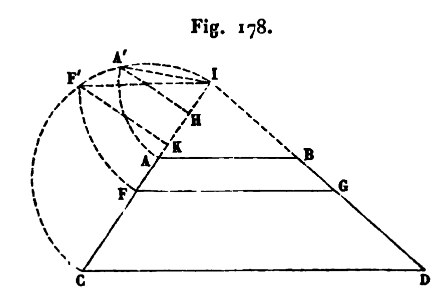
AB est donc (169) la diagonale du carré dont le côté inconnu est AD. On en déduit immédiatement la construction suivante.

Par le point O, milieu de AB, on élève sur cette droite la perpendiculaire OD' = OA; on rabat AD' en AD sur AB, et le point D est le point cherché.

PROBLÈME.

286. *Diviser un trapèze en parties proportionnelles à deux droites ou à deux nombres donnés par une parallèle aux bases* (*fig.* 178).

Fig. 178.



ABCD étant le trapèze donné, admettons que la droite FG réponde à la question. Le point F suffit pour déterminer cette droite, puisqu'elle

doit être parallèle à AB et à CD. Les deux droites ou les deux nombres donnés étant représentés par M et N, on doit avoir

$$\frac{\text{AFGB}}{\text{FCDG}} = \frac{\text{M}}{\text{N}}.$$

Cela posé, prolongeons les deux côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur rencontre au point I.

Les trois triangles semblables (146) de la figure donnent (266)

$$\frac{\text{IAB}}{\overline{\text{IA}}^2} = \frac{\text{IFG}}{\overline{\text{IF}}^2} = \frac{\text{ICD}}{\overline{\text{IC}}^2}.$$

On en déduit (t. I, *Alg. élém.*, 63)

$$\frac{\text{IFG} - \text{IAB}}{\overline{\text{IF}}^2 - \overline{\text{IA}}^2} = \frac{\text{ICD} - \text{IFG}}{\overline{\text{IC}}^2 - \overline{\text{IF}}^2},$$

c'est-à-dire, en échangeant les moyens,

(1) $$\frac{\text{AFGB}}{\text{FCDG}} = \frac{\overline{\text{IF}}^2 - \overline{\text{IA}}^2}{\overline{\text{IC}}^2 - \overline{\text{IF}}^2} = \frac{\text{M}}{\text{N}}.$$

Décrivons alors, sur IC comme diamètre, une demi-circonférence. Si l'on suppose dans cette demi-circonférence les cordes IA′ et IF′ respectivement égales à IA et à IF, et qu'on projette les points A′ et F′ en H et en K sur le diamètre IC, on a (273)

$$\frac{\overline{\text{IA}'}^2 \text{ ou } \overline{\text{IA}}^2}{\text{IH}} = \frac{\overline{\text{IC}}^2}{\text{IC}}, \quad \frac{\overline{\text{IF}'}^2 \text{ ou } \overline{\text{IF}}^2}{\text{IK}} = \frac{\overline{\text{IC}}^2}{\text{IC}}.$$

Il en résulte évidemment

$$\overline{\text{IF}}^2 - \overline{\text{IA}}^2 = \text{IC}(\text{IK} - \text{IH}) = \text{IC}.\text{KH},$$

$$\overline{\text{IC}}^2 - \overline{\text{IF}}^2 = \text{IC}(\text{IC} - \text{IK}) = \text{IC}.\text{KC},$$

et, par suite, d'après l'égalité (1),

$$\frac{\text{KH}}{\text{KC}} = \frac{\text{M}}{\text{N}}.$$

On n'a donc qu'à trouver le point K qui divise la distance connue HC proportionnellement aux nombres donnés M et N (185). Le point K fait connaître le point F′, qui, à son tour, détermine le point F.

Si l'on veut diviser le trapèze donné en deux parties équivalentes, il faut faire M = N, et le point K est le milieu de HC.

PROBLÈME.

287. *Étant donnés un point et un angle, mener par le point une droite qui limite avec les côtés de l'angle un triangle d'aire donnée* (*fig.* 179).

Soient le point M et l'angle XOY. Admettons que la droite AMB réponde à la question. Le point A suffit pour la déterminer, puisqu'elle

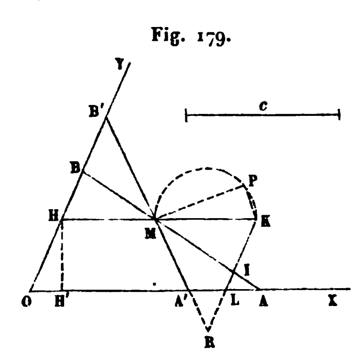


Fig. 179.

doit passer par le point M. Représentons l'aire imposée au triangle cherché AOB par un carré de côté c.

Cela posé, menons par le point M la parallèle MH à OX, et, sur cette parallèle, déterminons le point K de manière que le parallélogramme OHKL soit équivalent au carré c^2 ou au triangle cherché. Il suffit, HH' étant la hauteur de ce parallélogramme, de satisfaire à l'égalité

$$\text{HK}.\text{HH}' = c^2, \quad \text{d'où} \quad \text{HK} = \frac{c^2}{\text{HH}'}.$$

On aura donc HK en construisant la troisième proportionnelle aux deux droites HH' et c (186).

Pour que la droite AMB réponde maintenant à la question, il faut qu'elle coupe le côté KL du parallélogramme en un point I tel, que le triangle MKI soit équivalent à la somme des deux triangles MHB et LAI ; le triangle AOB et le parallélogramme OHKL, ayant comme partie commune le pentagone OHMIL, seront alors eux-mêmes équivalents.

Comme les trois triangles considérés sont semblables, leurs aires sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues, et l'on est immédiatement conduit à la construction suivante.

On décrit sur MK comme diamètre une demi-circonférence, dans laquelle on prend la corde MP égale à MH, puis l'on joint PK. Si l'on porte cette longueur PK sur l'axe OX, de part et d'autre du point L, on obtient les deux points A et A', qui, joints au point M, déterminent les deux solutions AMB, A'MB'.

En effet, pour la première, l'aire du triangle MKI est bien la somme

des aires des triangles MHB et LAI, puisqu'on a

$$MK^2 = MP^2 + PK^2 = MH^2 + LA^2.$$

Pour la seconde solution, c'est le triangle MKR qui est la somme des triangles MHB' et LA'R, de sorte que le triangle MHB' équivaut au trapèze MKLA'. Or le triangle A'OB' et le parallélogramme OHKL ne diffèrent précisément que par ces deux dernières aires.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait $MH < MK$. Si l'on a $MH = MK$, la corde PK est nulle. Il en est donc de même de $LA = LA'$, et les deux solutions précédentes se réduisent à la droite obtenue en joignant le point L au point M, qui devient le milieu de la portion de cette droite interceptée dans l'angle XOY.

Comme le minimum de HK, qui a lieu pour $MK = MH$, répond à celui de c^2, on voit que, *de toutes les droites menées par le point* M *dans l'angle* XOY, *celle qui détermine le triangle d'aire minimum est divisée par ce point en deux parties égales.*

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE TROISIÈME.

LE PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

I. — Premières notions sur le plan considéré en lui-même et relativement à la droite.

288. Comme nous l'avons déjà dit (6), un plan est une surface telle, qu'une ligne droite y est contenue tout entière dès qu'elle y a deux points. Cette surface est illimitée ; mais, pour la représenter, on est obligé de lui assigner des limites. On représente donc un plan par une figure tracée dans ce plan, le plus souvent par un parallélogramme ; mais, puisqu'il s'agit d'une surface sans forme déterminée, il faut toujours concevoir le plan comme prolongé au delà du contour qui sert à le figurer.

THÉORÈME.

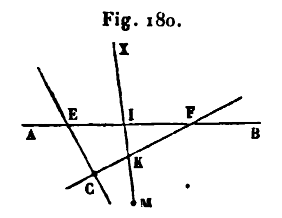
289. *Deux plans* P *et* Q, *qui contiennent tous deux une même droite* AB *et un point* C *extérieur à cette droite, coïncident dans toute leur étendue* (*fig.* 180).

Par le point C et par deux points E et F pris à volonté sur AB, traçons les droites indéfinies CE et CF. Comme elles

ont chacune deux points dans les plans P et Q, elles appartiennent tout entières à ces plans (288).

Cela posé, par un point M quelconque du plan P, menons dans ce plan une droite quelconque MX. Cette droite rencontrera au moins (50) deux des trois droites AB, CE, CF, et les points de rencontre obtenus, I et K, appartiendront alors au plan Q. Il en sera donc de même de la droite MX tout entière et, en particulier, du point M.

Fig. 180.



Ainsi, tout point M de l'un des plans considérés appartient nécessairement à l'autre, de sorte que ces deux plans coïncident dans toute leur étendue.

THÉORÈME.

290. *Un plan est déterminé :*

1° *Par une droite* AB *et un point* C *extérieur à cette droite ;*
2° *Par trois points* A, B, C, *non en ligne droite ;*
3° *Par deux droites* AB *et* AC, *se coupant en un point* A;
4° *Par deux droites parallèles.*

En effet (*fig.* 181) :

Fig. 181.

1° Menons un plan ABDE par la droite AB, et faisons-le tourner autour de cette droite, comme une porte sur ses gonds, jusqu'à ce qu'il vienne passer par le point C. On obtiendra alors un plan ABGF, contenant la droite AB et le point C. Ce plan est d'ailleurs complètement déterminé, car tout autre plan remplissant les mêmes conditions coïncidera avec lui (289).

2° On ramène immédiatement ce deuxième cas au premier, en remarquant que tout plan passant par la droite AB et le point C contient les trois points A, B, C, non en ligne droite, et réciproquement.

3° On ramène aussi le troisième cas au premier, en remarquant que tout plan passant par AB et par un point quelconque C de AC contient les deux droites AB et AC, et réciproquement.

4° Par définition (50), deux parallèles sont toujours situées dans un même plan, qu'elles déterminent, puisqu'il n'y a

qu'un seul plan qui puisse contenir la première parallèle et un point quelconque de la seconde.

COROLLAIRE.

291. *Dans l'espace comme sur un plan, par un point donné, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée.*

Soit (*fig.* 181) AB une parallèle menée par le point A à la droite DE; AB sera alors située dans le plan défini ADE, et, dans un plan, on ne peut mener, par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite donnée (50).

SCOLIE.

292. Un plan et une droite ne peuvent présenter que trois positions relatives :

1° La droite a deux points communs avec le plan et, alors, elle y est contenue tout entière;

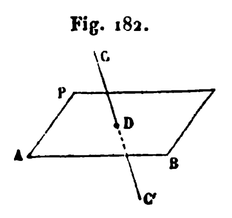
2° La droite a un seul point commun avec le plan, et, alors, la droite et le plan se *coupent;*

3° La droite n'a aucun point commun avec le plan, et l'on dit alors que la droite et le plan sont *parallèles.*

Quand une droite CC′ et un plan P se coupent (*fig.* 182), leur point commun D divise la droite CC′ en deux parties DC, DC′, situées de part et d'autre du plan P.

Cela résulte avec évidence de ce que la droite et le plan sont indéfinis. Le plan partage l'espace (2) en deux régions qui, par rapport à l'observateur, peuvent être qualifiées de supérieure et d'inférieure au plan, de sorte que le point de rencontre de la droite avec le plan la partage nécessairement de la même manière. On exprime ce fait en disant que la droite *traverse* le plan. Le point d'intersection de la droite et du plan s'appelle le *pied* de la droite dans le plan.

Fig. 182.



THÉORÈME.

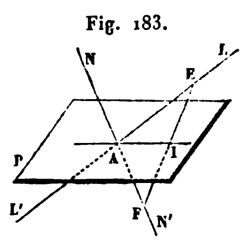
293. *Deux plans* P *et* Q, *qui ont un point commun* A, *ont une droite commune passant par ce point* (*fig.* 183).

Par le point A commun aux plans P et Q, menons dans le plan Q deux droites quelconques LAL′, NAN′. Si l'une de ces

droites avait avec le plan P un point commun autre que A, elle serait commune aux plans P et Q, et le théorème serait démontré.

Supposons donc que les droites considérées coupent toutes les deux le plan P. Prenons un point quelconque E sur la partie de la droite LAL′ qui est *au-dessus* du plan P et un point quelconque F sur la partie de la droite NAN′ qui est *au-dessous* du même plan. La droite EF, qui appartient au plan Q, traversera nécessairement le plan P en un point I; et la droite AI, ayant deux points dans chacun des plans P et Q, sera commune à ces deux plans.

Fig. 183.



COROLLAIRES.

294. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

En effet, dès que deux plans ont un point commun, ils ont une droite commune passant par ce point, et ils ne peuvent avoir aucun point commun extérieur à cette droite sans coïncider (289).

295. Deux plans *distincts* ne peuvent présenter que deux positions relatives :

1° Ils ont en commun une droite unique, qui est leur intersection; on dit alors que les deux plans se *coupent;*

2° Ils n'ont aucun point commun; on dit alors que les deux plans sont *parallèles.*

Quand deux plans P et Q se coupent suivant une droite AB, ils se *traversent* nécessairement. En effet, une droite quelconque du plan P, non parallèle à AB, traverse elle-même AB en *coupant* le plan Q en un point de cette droite commune (289), c'est-à-dire en passant d'un côté à l'autre du plan Q (292).

SCOLIE.

296. Deux droites AB et CD étant données d'une manière quelconque dans l'espace (*fig.* 182), le plan P mené par AB et par un point quelconque D de CD peut couper cette droite CD ou la contenir tout entière.

Dans le premier cas, il n'existe aucun plan qui contienne à

la fois AB et CD; car un tel plan, ayant la droite AB et le point D communs avec le plan P, coïnciderait avec lui, de sorte que le plan P contiendrait la droite CD, contrairement à l'hypothèse. Les deux droites AB et CD, *ne pouvant être situées dans un même plan*, ne peuvent non plus ni se couper ni être parallèles (290, 3° et 4°).

Deux droites *distinctes* peuvent donc présenter dans l'espace trois positions relatives :

1° Elles se coupent ;

2° Elles sont parallèles ;

3° Elles ne sont pas situées dans un même plan.

Comme dans les deux derniers cas elles n'ont aucun point commun, on voit que, *pour prouver le parallélisme de deux droites considérées dans l'espace, il ne suffit plus, comme en Géométrie plane, d'établir qu'elles ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge; il faut, en outre, vérifier qu'elles sont situées dans un même plan.*

297. Modes de génération du plan. — Toute surface géométrique peut être regardée comme engendrée par une ligne, droite ou courbe, appelée *génératrice*, qui se déplace dans l'espace suivant une loi déterminée.

Cette loi astreint généralement la génératrice à s'appuyer sur certaines lignes fixes appelées *directrices*.

D'après cela, on voit qu'un plan peut être considéré comme engendré par le mouvement d'une droite génératrice qui, passant par un point fixe de l'espace, s'appuie constamment sur une droite fixe donnée comme directrice. En effet, la droite mobile est constamment dans le plan déterminé par la droite et le point fixes donnés (290, 1°).

De même, une droite donnée, glissant parallèlement à elle-même en s'appuyant sur une droite fixe donnée, engendre un plan. En effet, la droite mobile est toujours dans le plan déterminé par l'une quelconque de ses positions successives et la droite fixe donnée (290, 4°).

Un triangle est toujours dans le plan déterminé par ses trois sommets (290, 2°). Il n'en est pas nécessairement ainsi d'un quadrilatère, dont les quatre sommets peuvent n'être pas situés dans un même plan. Dans ce dernier cas, le quadrilatère proposé est un *quadrilatère gauche*. Même remarque pour un polygone.

II. — Droite et plan perpendiculaires.

298. Quand une droite et un plan se rencontrent, on dit qu'ils sont *perpendiculaires entre eux* lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites situées dans le plan.

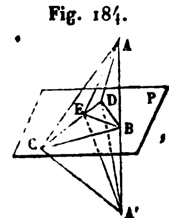
Une droite est dite *oblique* à un plan, lorsqu'elle le rencontre sans lui être perpendiculaire.

THÉORÈME.

299. *Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans ce plan* (*fig.* 184).

Soit la droite AB perpendiculaire à deux droites BC et BD qui passent par son pied B dans le plan P : elle sera perpendiculaire à toute autre droite BE menée par son pied dans ce plan.

Fig. 184.



En effet, traçons dans le plan P une droite quelconque qui rencontre les droites BC, BD, BE, aux points C, D, E. Prolongeons AB au-dessous du plan d'une longueur BA' = AB. Joignons les points C, D, E, aux points A et A'. Les deux triangles ACD, A'CD sont égaux : ils ont le côté CD commun; le côté AC est égal au côté A'C, car, dans le plan ACA', les deux obliques AC et A'C s'écartent également du pied de la perpendiculaire CB élevée sur AA'; le côté AD est égal au côté A'D pour une raison analogue. L'égalité des deux triangles ACD, A'CD, entraîne celle des deux angles ACE, A'CE. Les deux triangles ACE, A'CE, sont alors égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Par suite, AE = A'E. La droite BE, ayant alors, dans le plan AEA', deux de ses points à égale distance des extrémités A et A', est perpendiculaire sur AA' ou sur AB (46). AB est donc perpendiculaire à une droite quelconque BE du plan P, c'est-à-dire perpendiculaire à ce plan.

THÉORÈME.

300. *Le lieu des perpendiculaires menées à une droite* AB *par un point* B *de cette droite est le plan* P *perpendiculaire à* AB *au point* B (*fig.* 185).

Par la droite AB, on peut faire passer une infinité de plans, et, par le point B, on peut mener dans chacun de ces plans une perpendiculaire à la droite AB. C'est le lieu de ces perpendiculaires qu'il s'agit de déterminer.

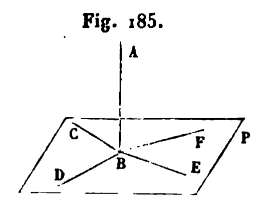


Fig. 185.

Par les deux perpendiculaires BC, BD, menées à AB au point B, dans les plans ABC, ABD, faisons passer un plan P; puis, par AB, faisons passer un plan quelconque ABE qui coupe le plan P suivant BE. La droite AB, étant perpendiculaire au plan P (299), sera perpendiculaire à BE, qui est alors la perpendiculaire élevée à AB par le point B dans le plan ABE.

D'ailleurs, toute autre droite menée par le point B dans le plan ABE est oblique à AB (15). Le plan P est donc le lieu des perpendiculaires considérées.

COROLLAIRES.

301. Ce théorème conduit à un nouveau mode de génération du plan (297). On peut le regarder comme engendré par le mouvement d'une droite qui reste constamment perpendiculaire à une droite donnée en un point donné.

302. *Par un point donné, on peut toujours mener un plan perpendiculaire à une droite, mais on n'en peut mener qu'un.*

1° Si le point donné est sur la droite donnée, en B par exemple sur AB (*fig.* 185), on mène à AB les perpendiculaires BC, BD, dans les plans quelconques ABC, ABD, et l'on fait passer un plan P par les deux droites ainsi obtenues. Ce plan est perpendiculaire à AB au point B (299), et il peut seul remplir cette condition (300).

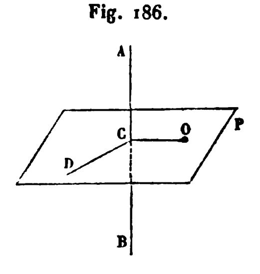


Fig. 186.

2° Si le point donné est extérieur à la droite donnée, comme le point O par exemple (*fig.* 186), on fait passer un plan par ce point O et la droite AB (209, 1°). Dans ce plan ABO, menons OC perpendiculaire sur AB; élevons au point C, dans le plan quelconque ABD, la perpendiculaire CD à AB, et faisons passer un plan P par les deux droites CD et CO. Ce plan, perpendiculaire à AB au point C (299), passe

au point O, et il peut seul remplir ces deux conditions, puisque, du point O, on ne peut abaisser sur AB que la perpendiculaire OC (21).

THÉORÈME.

303. *Si d'un point pris hors d'un plan on lui mène une perpendiculaire et plusieurs obliques : la perpendiculaire est plus courte que toute oblique; deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales; de deux obliques inégalement distantes du pied de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus grande* (*fig.* 187).

Fig. 187.

Soient le point A et le plan P, la perpendiculaire AB à ce plan et les obliques AC, AD, AE.

Dans le plan ABC, la perpendiculaire AB est plus courte que l'oblique quelconque AC.

Supposons $BC = BD$. Les deux triangles rectangles ABC, ABD, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Par suite, les deux obliques AC, AD, sont égales.

Supposons $BE > BC$, et prenons $BD = BC$; on a alors $AD = AC$. Mais, dans le plan ABE, on a $AE > AD$ (41). On a donc aussi $AE > AC$.

COROLLAIRES.

304. Les réciproques de ces propositions sont évidentes. Si l'on se rappelle qu'en Géométrie le mot *distance* est toujours synonyme de *plus courte distance*, on voit, en particulier, que, lorsqu'une droite représente la distance d'un point à un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

Le lieu des pieds des obliques qui, passant par le point A, sont égales à AC, est la circonférence décrite du point B comme centre avec BC pour rayon. Il en résulte que, si du point A, avec une longueur convenable, on marque sur le plan P trois points C, D, F, également éloignés du point A, le centre B de la circonférence déterminée par les trois points C, D, F, est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan P.

Ainsi, *le lieu des points d'un plan* P *situés à égale distance*

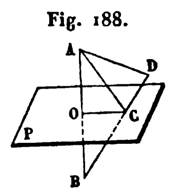
d'un point donné A *est une circonférence ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur le plan* P.

THÉORÈME.

305. *Le lieu géométrique de tous les points de l'espace à égale distance des extrémités d'une droite donnée est le plan mené perpendiculairement à cette droite par son milieu* (*fig.* 188).

Soient la droite AB et le plan P, perpendiculaire à AB au point O, milieu de AB. Soit C un point quelconque du plan P : dans le plan ACB, les deux obliques CA et CB sont égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire OC. Tout point du plan est donc à égale distance des extrémités de la droite. Soit D un point quelconque extérieur au plan P : dans le plan ADB, les distances DA et DB sont inégales, parce que le point D est hors de la perpendiculaire OC élevée sur le milieu de AB dans le même plan. Tout point extérieur au plan est donc inégalement distant des extrémités de la droite. Le plan P est donc bien le lieu géométrique indiqué.

Fig. 188.



COROLLAIRE.

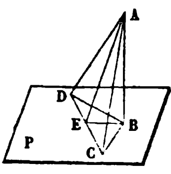
306. *Trois points non en ligne droite suffisant pour déterminer un plan* (290, 2°), *dès qu'un plan a trois de ses points non en ligne droite à égale distance des extrémités d'une droite donnée, il est perpendiculaire sur le milieu de cette droite.*

THÉORÈME.

307. *Soient la droite* AB *perpendiculaire au plan* P *et la droite* CD *quelconque dans le plan* P; *si l'on abaisse* BE *perpendiculaire sur* CD *et si l'on joint* AE, *la droite* AE *est perpendiculaire sur* CD (*fig.* 189).

Prenons EC = ED, et joignons les points C et D aux points B et A. Les droites BC et BD sont égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire BE dans le plan P. Dès lors, les droites AC et AD sont égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire AB dans

Fig. 189.



l'espace. Le triangle CAD étant isoscèle, la droite AE qui joint son sommet A au milieu de sa base CD est perpendiculaire sur cette base (27).

La proposition qu'on vient de démontrer est connue sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires*.

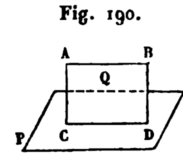
III. — Droites et plans parallèles.

THÉORÈME.

308. *Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan ou contenue dans ce plan* (*fig.* 190).

Soit la droite AB parallèle à la droite CD du plan P. Si elle n'est pas dans le plan P, elle détermine avec CD (290, 4°) un plan Q, dont l'intersection avec le plan P est la droite CD. La droite AB, appartenant au plan Q, ne pourrait rencontrer le plan P qu'en coupant CD: elle est donc parallèle au plan P.

Fig. 190.



THÉORÈME.

309. *Si par une droite* AB, *parallèle à un plan* P, *on mène un plan* ABCD *qui coupe le plan* P, *l'intersection* CD *des deux plans est parallèle à* AB (*fig.* 190).

En effet, les deux droites AB et CD sont dans un même plan, et la droite AB, parallèle au plan P, ne peut rencontrer CD, qui est contenue dans ce plan (296).

COROLLAIRES.

310. *Si deux droites* AC *et* BD *sont parallèles, tout plan* P *qui coupe l'une* AC *coupe l'autre* BD (*fig.* 190).

En effet, la droite BD ne peut occuper que trois positions par rapport au plan P (292); et, si BD était dans le plan P ou parallèle à ce plan, AC, qui, par hypothèse, a le point C commun avec le plan P, serait dans ce plan (290, 4°, 309) et ne le couperait pas.

311. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

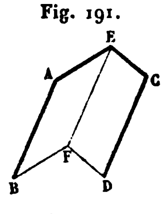
Soient les deux droites B et C parallèles à une même droite A.

Elles n'ont aucun point commun, puisque d'un point donné on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée (291). De plus, elles sont dans le plan déterminé par la droite B et un point quelconque de C; car, si ce plan coupait C, il couperait A (310) et, par suite, B contre l'hypothèse. Les deux droites B et C sont donc parallèles (296).

312. *Si, par deux droites parallèles* AB *et* CD, *on mène deux plans qui se coupent, leur intersection est parallèle aux deux droites données* (*fig.* 191).

En effet, quel que soit le plan mené par AB, le plan conduit par CD le coupe suivant une droite EF parallèle à CD (309) et, par conséquent, à AB, puisque AB et CD sont parallèles (311).

Fig. 191.



Si l'on imagine une parallèle quelconque à AB et à CD, elle sera parallèle aux deux plans (308) et à leur intersection. On peut donc dire encore que *l'intersection de deux plans parallèles à une même droite est parallèle à cette droite.*

THÉORÈME.

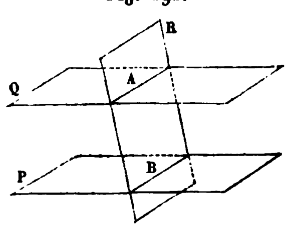
313. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

En effet, deux plans ne peuvent occuper l'un par rapport à l'autre que deux positions (295), et, si les plans considérés se coupaient, on pourrait, d'un point de leur intersection, abaisser deux plans perpendiculaires sur une même droite; ce qui est impossible (302).

THÉORÈME.

314. *Quand deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les intersections obtenues sont parallèles* (*fig.* 192).

Fig. 192.



Soient les plans parallèles P et Q coupés par le plan R suivant les droites A et B. Ces droites ne peuvent se rencontrer, puisque les plans P et Q ne peuvent avoir aucun point commun, et elles sont situées dans un même plan : elles sont donc parallèles (296).

THÉORÈME.

315. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles : 1° toute droite* D *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q; *2° tout plan* R *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q (*fig.* 193).

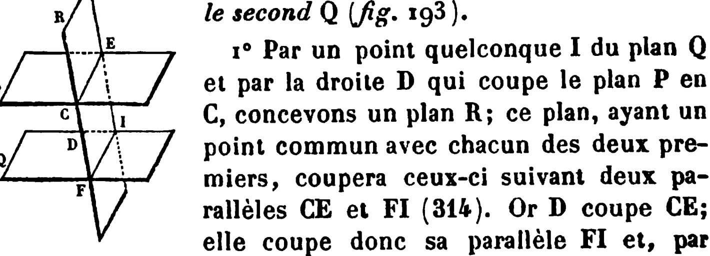


Fig. 193.

1° Par un point quelconque I du plan Q et par la droite D qui coupe le plan P en C, concevons un plan R; ce plan, ayant un point commun avec chacun des deux premiers, coupera ceux-ci suivant deux parallèles CE et FI (314). Or D coupe CE; elle coupe donc sa parallèle FI et, par suite, le plan Q.

2° Menons dans le plan R, qui coupe le plan P suivant CE, une droite CD non parallèle à CE. Cette droite CD, coupant le plan P, coupera le plan Q (1°); donc le plan R coupe le plan Q.

COROLLAIRES.

316. *Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle au premier ou contenue dans le premier est parallèle au second ou contenue dans le second;* car, si elle coupait le second plan, elle couperait aussi le premier. Ainsi, *deux plans parallèles ont leurs parallèles communes.*

317. *Par un point* A *extérieur à un plan* B′A′C′, *on peut toujours mener un plan parallèle à ce plan, et l'on n'en peut mener qu'un* (*fig.* 194).

En effet, menons par A deux droites AB et AC parallèles au plan B′A′C′. Le plan BAC sera parallèle au plan B′A′C′; car, s'il le rencontrait, leur intersection devrait être parallèle à la fois à AB et à AC (309), ce qui est impossible. De plus, tout plan autre que BAC mené par A coupe le plan B′A′C′, puisqu'il coupe le plan BAC, qui est parallèle à B′A′C′ (315).

318. *Deux plans* P *et* Q, *parallèles à un troisième plan* R, *sont parallèles entre eux*, car, s'ils avaient un point commun, on pourrait, de ce point, mener deux plans parallèles à un même plan, ce qui est impossible (317).

319. *Le lieu des parallèles menées à un plan* Q *par un point* A *extérieur à ce plan est le plan* P *mené par ce point parallèlement au plan* Q.

En effet, toutes les parallèles menées par A au plan Q sont parallèles au plan P ou contenues dans ce plan (316); et c'est le dernier cas qui a lieu, puisque les parallèles considérées ont déjà le point A commun avec le plan P.

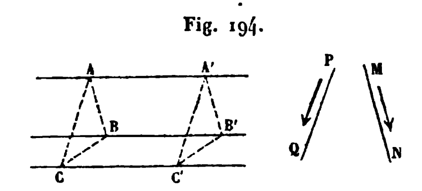
THÉORÈME.

320. *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles* (*fig.* 194).

1° Les plans des deux angles sont parallèles en vertu du n° 317.

2° Deux angles BAC, B'A'C', dont les côtés AB et A'B', AC et A'C', sont deux à deux parallèles et de même sens, sont égaux. En effet, par deux points B et C pris à volonté et res-

Fig. 194.



pectivement sur les côtés de l'angle A, menons des parallèles à AA' jusqu'à leur rencontre B' et C' avec les côtés de l'angle A'; les droites BC, B'C', sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles BAC, B'A'C', avec le plan BB'C'C. Donc les deux triangles BAC, B'A'C', ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, comme parallèles comprises entre parallèles, et les angles BAC, B'A'C', sont égaux.

On prouvera d'ailleurs, comme en Géométrie plane, que deux angles dont les côtés sont deux à deux parallèles et de sens contraires sont égaux, et que deux angles dont deux côtés sont parallèles et de même sens, tandis que les deux autres sont parallèles et de sens contraires, sont supplémentaires.

SCOLIES.

321. Sur une droite quelconque MN (*fig.* 194), il y a deux sens à distinguer : le sens de MN et celui de NM.

On appelle *angle de deux droites*, dont la position dans l'espace et le sens sont donnés, l'angle que l'on forme en menant par un point quelconque de l'espace, à chacune des deux droites données, une droite parallèle et de même sens. Ainsi MN et PQ étant les deux droites données, par un point quelconque A de l'espace, menons AB parallèle à MN et de même sens, AC parallèle à PQ et de même sens : l'angle BAC sera, par définition, l'angle des deux droites MN et PQ.

Pour que cette définition n'offre rien de contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle ainsi obtenu soit indépendante de la position qu'occupe dans l'espace le point par lequel on mène des parallèles aux droites données. Or soient BAC, B'A'C', les valeurs obtenues pour l'angle de MN et de PQ, lorsqu'on mène à ces droites des parallèles par deux points différents A et A'; les droites AC et A'C', étant toutes deux parallèles à MN et de même sens que cette droite, sont parallèles entre elles et de même sens (**311**); il en est de même pour AB et A'B'; par suite, les deux angles BAC, B'A'C', sont égaux (**320**).

322. On dit que *deux droites, non situées dans le même plan, sont perpendiculaires l'une à l'autre lorsque leur angle est droit.*

On voit, par la définition même de l'angle de deux droites, que, *lorsque deux droites sont* ainsi *perpendiculaires entre elles, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Cette remarque est importante. Elle permet de généraliser des théorèmes dont le sens demeurerait, sans elle, trop restreint.

Par exemple, nous avons dit qu'une droite et un plan sont perpendiculaires lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites passant *par son pied* dans le plan (**298**). Nous pouvons maintenant compléter cette définition en disant : *Une droite et un plan sont perpendiculaires, lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites situées d'une manière quelconque dans le plan ou parallèles au plan.* En effet, soit AB une perpendiculaire au plan P, dont le pied dans

ce plan est A. Soient C une droite quelconque du plan P et D une parallèle quelconque à ce plan. Si l'on mène par A une parallèle C′ à C, elle est, dans le plan P, perpendiculaire en A à AB; et, si l'on fait passer un plan par la droite D et le point A, il coupe le plan P suivant une droite D′ parallèle à D (309), et perpendiculaire encore à AB au point A. La première définition est donc renfermée dans la seconde.

Nous avons démontré (299) qu'une droite est perpendiculaire à un plan dès qu'elle est perpendiculaire à deux droites passant *par son pied* dans ce plan. On peut, d'après ce qui précède, étendre cet énoncé en disant : *Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites quelconques contenues dans ce plan ou parallèles à ce plan.*

De même, le lieu des perpendiculaires élevées sur une droite *par un de ses points* étant le plan mené par ce point perpendiculairement à la droite (300), on retrouve un lieu identique lorsque le point donné est *extérieur* à la droite. En effet, soient la droite AB et le point extérieur O. Abaissons, dans le plan ABO, OC perpendiculaire sur AB. Le plan P, perpendiculaire à AB au point C, est le lieu des perpendiculaires menées à AB par le point C, et ce plan contient en même temps les parallèles menées à ces perpendiculaires par le point O. Il est donc aussi le lieu des perpendiculaires menées à AB par le point O.

De la remarque sur laquelle nous insistons, résultent immédiatement les théorèmes suivants :

THÉORÈME.

323. *Si deux droites* A *et* B *sont parallèles, tout plan* P *perpendiculaire à la première est perpendiculaire à la seconde.*

En effet, toute droite parallèle au plan P ou située dans ce plan, étant perpendiculaire à A (322), est aussi perpendiculaire à B, qui dès lors est perpendiculaire au plan P.

THÉORÈME.

324. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* A *perpendiculaire au premier est perpendiculaire au second.*

En effet, toute droite située dans le plan Q ou parallèle à ce

plan, étant parallèle au plan P ou située dans ce plan (316), es perpendiculaire à la droite A.

Ce théorème est la réciproque de celui du n° 313.

SCOLIE.

325. On peut résumer les deux propositions précédente en disant :

Deux droites parallèles ont les mêmes plans perpendiculaires; deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes.

THÉORÈME.

326. *Si une droite* AB *est perpendiculaire au plan* P, *toute perpendiculaire* CD *à* AB *est parallèle au plan* P *ou située dans ce plan.*

En effet, si CD n'est pas située dans le plan P, on peut, par un point de CD, faire passer un plan Q perpendiculaire à AB (300, 322); et, ce plan, qui contient CD, étant parallèle au plan P (313), il en est de même de la droite CD (316).

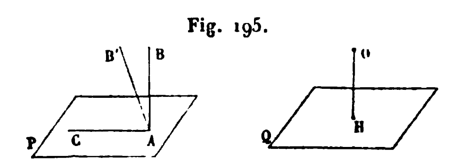
Ce théorème est la réciproque de la définition de la perpendicularité entre une droite et un plan (298, 322).

THÉORÈME.

327. *Par un point donné* A, *on peut toujours mener une droite perpendiculaire à un plan donné* P, *mais on ne peut en mener qu'une.*

1° Supposons d'abord le point A situé dans le plan P (*fig.* 195). Considérons à part une droite OH et le plan Q élevé perpendiculairement à cette droite par l'un de ses

Fig. 195.



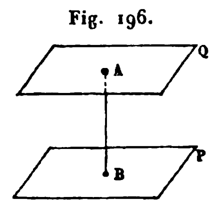
points H; puis, transportons cette figure tout d'une pièce, de manière que, le plan Q s'appliquant sur le plan P, ce qui est toujours possible (289), le point H coïncide avec le point A. La droite OH, dans sa nouvelle position, sera une perpendiculaire AB menée au plan P par le point A.

On ne peut en mener qu'une, car, si l'on pouvait en mener

deux, AB et AB′, le plan BAB′ couperait le plan P suivant une droite AC perpendiculaire à la fois à AB et à AB′.

2° Supposons le point A extérieur au plan P (*fig.* 196). Soit Q le plan mené par A parallèlement au plan P. Les plans parallèles P et Q ayant leurs perpendiculaires communes (324), dire que par le point A on peut abaisser une perpendiculaire sur le plan P et qu'on ne peut en abaisser qu'une, c'est dire que par le point A on peut élever une perpendiculaire sur le plan Q et qu'on ne peut en élever qu'une; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

Fig. 196.



COROLLAIRE.

328. *Deux droites* A *et* B, *perpendiculaires à un même plan* P, *sont parallèles ou coïncident.*

En effet, si les droites A et B ont un point commun, elles coïncident, puisque, de ce point, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P. Si les droites A et B n'ont pas de point commun, imaginons, par un point M de B, la parallèle A′ à A. Cette droite A′ sera perpendiculaire au plan P (323); elle coïncidera donc avec B, puisque, du point M, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P.

Cette proposition est la réciproque de celle du n° 323.

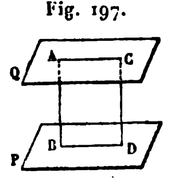
THÉORÈME.

329. 1° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre une droite* AC *et un plan* P *parallèles, sont égales* (*fig.* 197).

2° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre deux plans parallèles* P *et* Q, *sont égales* (*fig.* 197).

Cette double proposition résulte de ce que le plan des deux parallèles AB et CD coupe, dans le premier cas, le plan P suivant une parallèle BD à AC, et coupe, dans le second cas, les plans P et Q suivant des droites parallèles BD et AC (309, 314); les droites AB et CD sont donc, dans les deux cas, égales comme parallèles comprises entre parallèles.

Fig. 197.

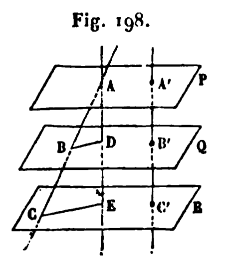


Les droites AB et CD pourraient être perpendiculaires au plan P : elles mesureraient alors les distances de deux points quelconques de la droite AC ou du plan Q au plan P. *Une droite et un plan parallèles* ou *deux plans parallèles sont* donc *partout également distants.*

THÉORÈME.

330. *Deux droites quelconques* AC, A′C′ (*fig.* 198), *sont coupées par trois plans parallèles* P, Q, R, *en parties proportionnelles;* en d'autres termes, si la droite AC coupe les plans P, Q, R, en A, B, C, et si la droite A′C′ coupe les mêmes plans en A′, B′, C′, on a

Fig. 198.



$$(1)\qquad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

En effet, menons par A la parallèle à A′C′, et désignons par D et E les points où elle coupe les plans Q et R. Les droites BD et CE étant parallèles (314), on a

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE};$$

mais les segments AD, DE, AE, sont respectivement égaux à A′B′, B′C′, A′C′, comme parallèles comprises entre plans parallèles. La relation (1) est donc démontrée.

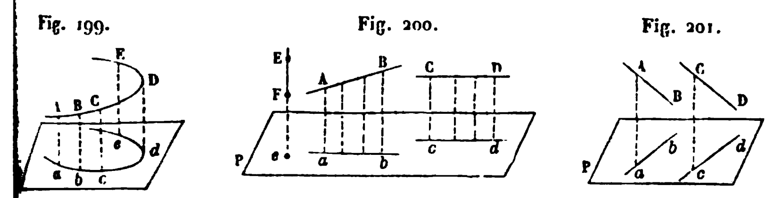
COROLLAIRE.

331. Deux droites concourantes AC et AE étant divisées en parties proportionnelles par le point A et les plans parallèles Q et R, il en est de même pour une série de sécantes partant de A. En supposant, en effet, qu'il y ait trois sécantes, le rapport des segments de la première étant égal à la fois au rapport des segments de la seconde et au rapport des segments de la troisième, ces deux derniers rapports sont égaux entre eux.

IV. — Projection d'une droite sur un plan. — Angle d'une droite et d'un plan. — Plus courte distance de deux droites.

332. On appelle *projection* d'un point A sur un plan P le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan (*fig.* 199).

La projection d'une ligne quelconque ABC... sur un plan P est le lieu des projections *a*, *b*, *c*, ... des divers points de cette ligne.



THÉORÈME.

333. *La projection d'une ligne droite* AB *sur un plan* P *est une ligne droite* (*fig.* 200).

Car toutes les perpendiculaires A*a*, B*b*, ... abaissées sur le plan P par les divers points de la droite AB sont parallèles (328); leur lieu est donc un plan (297), et, par suite, le lieu de leurs pieds est la droite *ab* suivant laquelle ce plan coupe le plan P.

SCOLIES.

334. Lorsque la droite est, comme EF, perpendiculaire au plan P, sa projection sur ce plan se réduit évidemment à un point *e*.

335. Lorsque la droite est, comme CD, parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection *cd* sur ce plan (309).

COROLLAIRES.

336. *Les projections ab et cd de deux droites parallèles* AB *et* CD, *sur un même plan* P, *sont parallèles* (*fig.* 201).

Car la *projetante* A*a* d'un point quelconque de AB et la projetante C*c* d'un point quelconque de CD étant parallèles, les angles BA*a*, DC*c*, ont leurs plans parallèles (320); et, par

suite, les droites *ab* et *cd*, suivant lesquelles le plan P coupe ces deux plans, sont parallèles.

THÉORÈME.

337. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *de l'espace sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont aussi perpendiculaires entre elles* (*fig.* 202).

En effet, la droite *cd* est, comme sa parallèle CD, à angle droit sur AB; elle est d'ailleurs à angle droit sur la projetante A*a*, droite perpendiculaire au plan P qui contient *cd*. Donc *cd* est perpendiculaire au plan AB*ab* et, par suite, à *ab*.

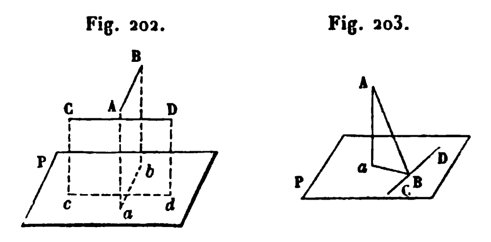


Fig. 202. Fig. 203.

Ainsi, *la projection d'un angle droit sur un plan est un angle droit, lorsqu'un des côtés de l'angle est parallèle au plan de projection.*

338. Réciproquement, *deux droites de l'espace* AB *et* CD *sont perpendiculaires l'une à l'autre, si leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont perpendiculaires entre elles* (*fig.* 202).

En effet, la droite *cd*, étant à angle droit sur *ab* et sur A*a*, est perpendiculaire au plan AB*ba*. Il en est donc de même de sa parallèle CD, qui, par suite, est perpendiculaire à AB.

Dans le cas très particulier où le plan P contient CD et où les droites AB et CD se coupent, cette réciproque revient au théorème connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires* (*fig.* 203) et déjà démontré (307).

COROLLAIRE.

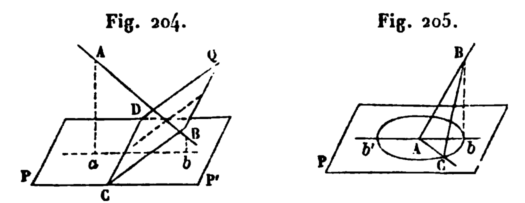
339. Considérons une droite quelconque AB et un plan Q perpendiculaire à cette droite; soient *ab* la projection de AB

sur un plan quelconque P (*fig.* 204), et CD l'intersection des plans P et Q, ou la *trace* du plan Q sur le plan P. Les deux droites AB et CD étant perpendiculaires l'une à l'autre, il doit en être de même de leurs projections *ab* et CD; de là ce théorème, fondamental en Géométrie descriptive : *Lorsqu'une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* Q, *la projection de cette droite et la trace de ce plan sur un plan quelconque* P *sont perpendiculaires.*

THÉORÈME.

340. *Lorsqu'une droite* AB *est oblique à un plan* P, *l'angle aigu* BA*b* *que cette droite fait avec sa projection sur ce plan est moindre que l'angle* BAC *qu'elle forme avec toute autre droite* AC *passant par son pied dans le plan* (*fig.* 205).

En effet, *b* étant la projection d'un point quelconque B de la droite AB, prenons AC = A*b* et menons BC. Les deux



triangles BA*b*, BAC, ont deux côtés égaux; mais le troisième côté B*b* du premier étant moindre que le troisième côté BC du second, puisque la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, il faut que l'angle BA*b* soit moindre que l'angle BAC.

SCOLIE.

341. En faisant parcourir au point C le cercle décrit dans le plan P, du point A comme centre avec A*b* pour rayon, on voit que l'oblique BC croît d'une manière continue depuis le point *b* jusqu'au point *b'*, puis décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis *b'* jusqu'en *b*. Par suite, l'angle BAC, minimum lorsque le point C est en *b*, croît jusqu'à ce que le point C soit en *b'* : il est alors maximum; puis il décroît, en reprenant successivement les mêmes valeurs, depuis *b'* jusqu'en *b*.

342. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle aigu que cette droite forme avec sa projection sur ce plan.

343. On voit aisément que *l'angle d'une droite* D *et d'un plan* P *est égal à l'angle d'une droite quelconque* D′ *parallèle à* D *et d'un plan quelconque* P′ *parallèle à* P.

THÉORÈME.

344. *Étant données deux droites* AB *et* CD *non situées dans le même plan : 1° il existe une droite, et une seule, qui les rencontre l'une et l'autre à angle droit; 2° cette perpendiculaire commune est la plus courte distance des deux droites* (*fig.* 206).

1° Par un point quelconque A de AB menons la parallèle AE à CD; le plan BAE, que nous désignerons par P, sera parallèle à CD; par suite, nous aurons la projection de CD sur ce plan P en menant une parallèle *dc* à la droite DC par la projection *d* d'un point quelconque D de cette droite. Cela posé, pour

Fig. 206.

Fig. 207.

qu'une droite rencontre à la fois AB et CD à angle droit, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire au plan P en un point de AB, et qu'elle ait son pied sur *cd*, lieu des pieds des perpendiculaires au plan P menées par les divers points de CD. Or la perpendiculaire au plan P élevée par le point *c* commun à AB et à *cd* remplit seule ces conditions. Il existe donc une droite C*c*, et une seule, qui rencontre à angle droit les deux droites données AB et CD.

2° Cette perpendiculaire commune C*c* est moindre que toute autre droite BD joignant un point de AB à un point de CD, car, D*d* étant la projetante du point D, on a évidemment $Cc = Dd$ et $Dd < DB$.

SCOLIES.

345. La démonstration qui précède permet d'obtenir la plus courte distance des deux droites AB et CD. Voici un second procédé très usuel (*fig.* 207).

On projette l'une des droites CD sur un plan P perpendiculaire à l'autre droite AB. Du pied A de AB sur le plan P, on abaisse la perpendiculaire Ae sur la projection Cd de CD; on mène eE parallèle à AB jusqu'à sa rencontre E avec CD, et enfin EF parallèle à Ae. La droite EF, étant perpendiculaire à AB et à CD, est, en grandeur et en position, leur plus courte distance.

346. Souvent, dans la pratique, on n'a besoin que de la longueur de la plus courte distance; il suffit alors de mener par l'une AB des deux droites un plan P parallèle à l'autre CD, et de prendre la distance Dd d'un point quelconque de CD au plan P (*fig.* 206).

V. — Angles dièdres.

347. Lorsque deux plans P et Q se rencontrent (*fig.* 208) et sont terminés à leur intersection commune BE, on dit qu'ils forment un *angle dièdre*. Les deux plans P et Q sont les *faces*, et la droite BE est l'*arête* de cet angle.

348. Pour désigner un angle dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; ainsi l'on dit (*fig.* 208) l'angle dièdre BE. Mais lorsque plusieurs angles dièdres ont la même arête, pour désigner celui d'entre eux que l'on considère, il faut employer

Fig. 208.

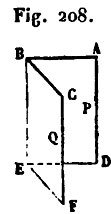
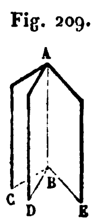


Fig. 209.



quatre lettres, savoir une lettre pour chaque face et deux pour l'arête; on place d'ailleurs les deux lettres relatives à l'arête entre les deux autres. Ainsi, dans la *fig.* 209, on distingue les trois dièdres CABD, DABE, CABE.

Deux angles, tels que CABD, DABE (*fig.* 209), qui ont la même arête AB, une face commune ABD, et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune, sont dits *adjacents*.

349. Deux angles dièdres sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux angles dièdres, on transporte le second à la suite du premier, de manière à former deux angles adjacents, tels que CABD, DABE (*fig.* 209); l'angle CABE des deux faces non communes ABC, ABE, est la somme des deux angles dièdres proposés.

350. Pour avoir une idée nette de la grandeur de l'angle dièdre, il faut supposer le plan P d'abord confondu avec le plan Q (*fig.* 210); puis, qu'il s'en est écarté en tournant autour de la droite AB comme axe, de manière à prendre sa position actuelle. L'amplitude de ce mouvement de rotation correspond à la grandeur de l'angle dièdre, qui croît ainsi d'une manière continue.

Un plan P_2 est dit *perpendiculaire* sur un plan QQ′ (*fig.* 210), lorsque les deux angles adjacents P_2ABQ, P_2ABQ′, qu'il forme avec celui-ci sont égaux. Un plan P, qui forme avec QQ′ des angles adjacents PABQ, PABQ′, inégaux, est dit *oblique* sur le plan QQ′.

On nomme *angle dièdre droit* tout dièdre P_2ABQ dont une face est perpendiculaire sur l'autre.

351. Deux angles dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre. Deux plans indéfinis PP′, QQ′ (*fig.* 211), forment, en se coupant, quatre angles dièdres qui sont deux à deux opposés par l'arête AB.

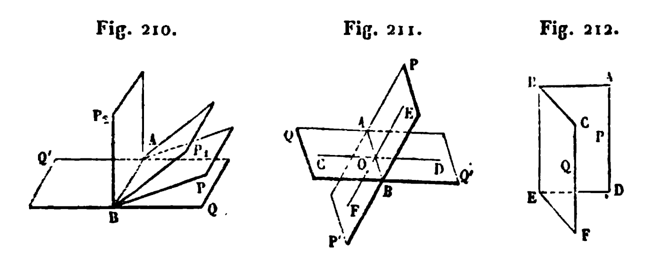
On nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre le plan qui, mené par l'arête, divise cet angle dièdre en deux autres dièdres égaux entre eux.

351. On appelle *angle plan correspondant à un angle dièdre* l'angle rectiligne que l'on forme en élevant, par un même point de l'arête, une perpendiculaire à cette arête dans chacune des faces. Ainsi, B étant un point de l'arête BE de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 212), si l'on élève dans le plan P la perpendiculaire BA sur l'arête BE, et dans le plan Q la perpendiculaire BC sur la même arête, l'angle ABC sera l'*angle plan* du dièdre considéré.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle plan correspondant à un angle dièdre reste la même, en quelque point de l'arête qu'on forme

cet angle plan. Or, soient les angles plans ABC, DEF, formés en deux points A et E de l'arête de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 212): les côtés BC et EF sont parallèles et de même sens, comme étant, dans un même plan Q, perpendiculaires à la même droite BE; il en est de même de BA et de ED par rapport au plan P; les angles ABC, DEF, sont donc égaux.

Il est à remarquer que le plan ABC est perpendiculaire à l'arête BE; réciproquement, tout plan perpendiculaire à l'arête



coupe les faces suivant des perpendiculaires à cette arête et, par suite, l'angle dièdre suivant son angle plan.

THÉORÈME.

352. *Par une droite* AB, *située dans un plan* QQ', *on peut toujours mener un plan* P_2 *perpendiculaire à ce plan, et l'on ne peut en mener qu'un* (*fig.* 210).

COROLLAIRES.

353. *Tous les angles dièdres droits sont égaux.*

La démonstration de ce théorème et de son corollaire est tout à fait semblable à celle qui a été donnée aux nos 15 et 16 de la Géométrie plane.

Un angle dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à l'angle dièdre droit. Deux angles dièdres sont *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle dièdre droit.

354. *Tout plan* P *qui en rencontre un autre* QQ' *fait avec celui-ci deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ', *dont la somme est égale à deux dièdres droits* (*fig.* 211). Réciproquement, *si deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ', *sont supplémentaires, c'est-à-dire ont une somme égale à deux*

dièdres droits, leurs faces non communes Q *et* Q′ *sont dans le prolongement l'une de l'autre.* (*Voir* les nos 17 et 19.)

355. *Lorsque deux plans* PP′, QQ′, *se coupent, les angles dièdres opposés par l'arête* AB *sont égaux* (*fig.* 211). (*Voir* le n° 22.)

THÉORÈME.

356. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

Il faut d'abord établir que, lorsque les angles plans de deux angles dièdres sont égaux, ces angles dièdres sont eux-mêmes égaux.

Soient (*fig.* 213) les dièdres AB, EF, dont les angles plans CBD, GFH, sont supposés égaux. Portons le second dièdre sur le premier, de manière que l'angle GFH coïncide avec son égal CBD : l'arête FE, perpendiculaire au point F au plan GFH, prendra la direction de l'arête BA, perpendiculaire au point B au plan CBD (327). Les deux plans ABC, EFG, auront alors

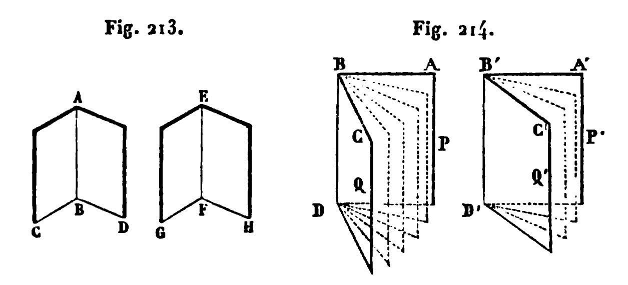


Fig. 213. Fig. 214.

deux droites communes et coïncideront (290, 3°); il en sera de même des plans ABD, EFH. Les deux angles dièdres AB et EF, coïncident donc et sont égaux.

Cela posé, soient les deux dièdres PBDQ et P′B′D′Q′ (*fig.* 214), et admettons que le rapport de leurs angles plans ABC, A′B′C′, soit égal à $\frac{5}{3}$, c'est-à-dire que ces deux angles plans aient une commune mesure contenue cinq fois dans ABC et trois fois dans A′B′C′. Si, par chaque rayon de division et par chaque arête correspondante, on fait passer des plans, on partage l'angle PBDQ en cinq angles dièdres partiels et l'angle P′B′D′Q′ en trois angles dièdres partiels. Ces angles dièdres

partiels sont tous égaux entre eux, comme correspondant à des angles plans égaux, et l'un d'eux est une commune mesure des angles dièdres PBDQ, P'B'D'Q'. Le rapport des deux angles dièdres est donc égal à $\frac{5}{3}$, comme celui de leurs angles plans.

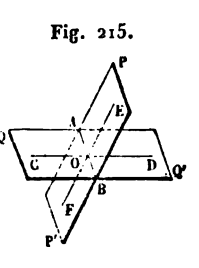
Si les deux angles plans n'avaient pas de commune mesure, on suivrait la marche déjà indiquée (105).

COROLLAIRE.

357. *L'angle dièdre droit a pour angle plan un angle droit,* et, réciproquement, *à un angle plan droit correspond un angle dièdre droit* (*fig.* 215).

En effet, soient PABQ, PABQ', deux angles dièdres adjacents déterminés par la rencontre des plans P et Q. Par un point O de l'arête commune AB, menons un plan perpendiculaire à cette arête : il coupera les plans P et Q suivant les droites EF et CD, et ces droites formeront deux angles adjacents EOC, EOD, qui seront les angles plans des deux angles dièdres considérés. Si ces angles dièdres sont égaux ou droits, il en sera donc de même de leurs angles plans, et réciproquement (356).

Fig. 215.



THÉORÈME.

358. *Si l'on fait correspondre l'unité d'angle dièdre à l'unité d'angle plan, le même nombre abstrait représente la mesure de l'angle dièdre et celle de son angle plan.*

L'angle droit étant l'unité d'angle plan, on prend pour unité d'angle dièdre l'angle dièdre droit (357). Si l'on suppose l'angle A'B'C' droit dans la *fig.* 214, on a donc (356)

$$\frac{\text{PBDQ}}{1^{\text{D.d.}}} = \frac{\text{ABC}}{1^{\text{d}}}.$$

Le rapport de PBDQ à un dièdre droit est la mesure de l'angle dièdre PBDQ, le rapport de ABC à un droit est la mesure de l'angle plan ABC (106) : les deux mesures sont donc bien exprimées par le même nombre abstrait.

En ayant toujours présentes les explications qui précèdent,

on peut employer sans inconvénient la locution plus rapide, mais inexacte : *Tout angle dièdre a pour mesure son angle plan.*

Lorsqu'on dit qu'un angle dièdre est un angle de 27°30', cela veut dire que son angle plan est un angle de 27°30' (107).

SCOLIE.

359. La proportionnalité des angles dièdres et des angles plans correspondants permet de conclure un grand nombre de propriétés des angles dièdres des propriétés analogues des angles rectilignes démontrées en Géométrie plane. Nous citerons, par exemple, les propositions suivantes, qui sont souvent utiles :

Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses faces. (*Voir* le n° 48.)

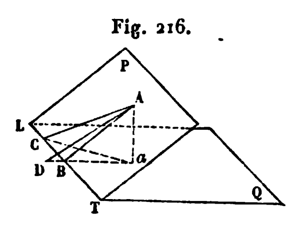
Deux angles dièdres qui ont leurs faces parallèles deux à deux sont égaux ou supplémentaires. (*Voir* le n° 57.)

THÉORÈME.

360. *Parmi toutes les droites que l'on peut mener par un point* A *dans un plan* P, *celle qui fait le plus grand angle avec un autre plan donné* Q *est la perpendiculaire* AB *abaissée du point* A *sur l'intersection* LT *des deux plans* P *et* Q (*fig.* 216).

Soient AC une droite quelconque menée par le point A dans le plan P, et a la projection du point A sur le plan Q; aB et aC seront les projections de AB et de AC, et il s'agit de démontrer (342) que l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa. Or, la droite aB étant perpendiculaire sur LT, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la droite aC est une oblique, et l'on a $aB < aC$. Si l'on prend sur la droite aB, à partir du point a, une longueur aD égale à aC, le point D sera donc situé au delà de B, et l'angle ABa, extérieur au triangle ABD, surpassera l'angle intérieur ADa; mais, les triangles AaC et AaD étant égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux, l'angle ADa est égal à l'angle ACa; donc, enfin, l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa.

Fig. 216.



SCOLIE.

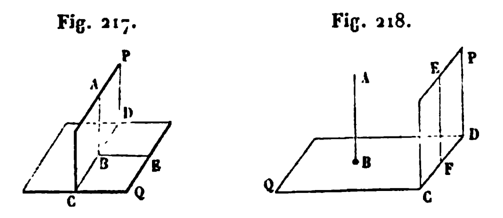
361. Lorsque le plan Q est horizontal, la droite AB prend le nom de *ligne de plus grande pente* du plan P. L'angle de cette ligne avec le plan Q est l'angle plan du dièdre PLTQ. Par chaque point d'un plan passe une ligne de plus grande pente de ce plan, et une seule.

VI. — Plans perpendiculaires.

THÉORÈME.

362. *Lorsque deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* AB, *menée dans le premier plan* P *perpendiculairement à l'intersection commune* CD, *est perpendiculaire à l'autre plan* Q (*fig.* 217).

En effet, les deux plans P et Q étant perpendiculaires l'un à l'autre, l'angle plan correspondant à l'angle dièdre PCDQ



doit être droit; or on forme cet angle plan ABE en élevant, dans le plan Q et par le point B, la perpendiculaire BE à CD; donc la droite AB est perpendiculaire à BE, et, comme elle l'est aussi par hypothèse à CD, elle est perpendiculaire au plan Q.

THÉORÈME.

363. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* Q, *tout plan* P *passant par cette droite ou parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan* Q.

1° Si le plan P passe par AB (*fig.* 217), menons dans le plan Q et par le point B la perpendiculaire BE à l'intersection CD des deux plans P et Q. L'angle ABE sera droit, puisque la droite AB est, par hypothèse, perpendiculaire au plan Q; d'ailleurs, cet angle ABE est l'angle plan du dièdre PCDQ; donc ce dièdre est droit, et le plan P est perpendiculaire au plan Q.

2° Si le plan P est parallèle à AB (*fig.* 218), menons par un point quelconque E de ce plan la parallèle EF à AB; cette droite EF sera à la fois perpendiculaire au plan Q et située dans le plan P. Donc le plan P, passant par une droite EF perpendiculaire au plan Q, sera perpendiculaire à ce plan (1°).

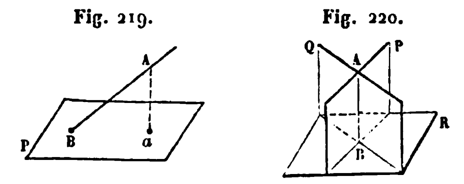
364. Réciproquement, *si deux plans* Q *et* P *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *perpendiculaire au premier plan* Q *est située dans l'autre plan* P *ou lui est parallèle.*

En effet, si la droite AB n'avait qu'un seul point commun avec le plan P, en menant de ce point une perpendiculaire sur l'intersection CD des plans P et Q (*fig.* 218), cette perpendiculaire serait perpendiculaire au plan Q, et l'on pourrait mener d'un même point deux perpendiculaires au plan Q, ce qui est impossible (327). La droite AB, ne pouvant couper le plan P, est donc parallèle à ce plan ou située dans ce plan (292).

COROLLAIRE.

365. *Par une droite* AB *oblique à un plan* P (*fig.* 219), *on peut faire passer un plan perpendiculaire au plan* P, *et l'on ne peut en faire passer qu'un.*

En effet, le plan BAa, déterminé par la droite AB et par la perpendiculaire Aa au plan P abaissée d'un point quelconque



de AB, est perpendiculaire au plan P. C'est le seul, car tout plan conduit par AB perpendiculairement au plan P doit contenir la perpendiculaire Aa (364).

THÉORÈME.

366. *Si deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires à un troisième* R, *leur intersection* AB *est perpendiculaire à ce troisième plan* (*fig.* 220).

Car si, par un point quelconque de l'intersection AB, on

mène la perpendiculaire au plan R, cette perpendiculaire doit se trouver à la fois dans le plan P et dans le plan Q (364); elle ne diffère donc pas de AB.

COROLLAIRES.

367. Un plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection.

368. Si les plans P et Q de la *fig.* 220 forment un angle dièdre droit, les trois plans P, Q, R, sont perpendiculaires deux à deux. On dit alors qu'ils sont perpendiculaires entre eux. L'intersection de deux de ces plans est perpendiculaire au troisième, et les trois intersections correspondantes sont perpendiculaires entre elles.

CHAPITRE II.

ANGLES POLYÈDRES.

I. — Propriétés fondamentales des angles polyèdres et, en particulier, des angles trièdres.

369. Lorsque plusieurs plans ASB, BSC, CSD, ... (*fig.* 221), se coupent successivement suivant des droites SB, SC, SD, ..., concourant en un même point S, on dit qu'ils forment un *angle polyèdre*. Le point S est le *sommet* de cet angle polyèdre, les droites SA, SB, SC, ..., sont ses *arêtes*, et les angles ASB, BSC, CSD, ..., sont ses *faces*. Enfin, les angles dièdres formés par les faces successives d'un angle polyèdre sont ses *angles dièdres*.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie des lettres relatives aux diverses arêtes. Ainsi, pour indiquer l'angle polyèdre de la *fig.* 221, on dit l'angle SABCDE, ou plus simplement l'angle S, car, quand un angle polyèdre est isolé, la lettre du sommet suffit.

Il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre. L'angle formé par trois plans prend le nom d'*angle trièdre*. Dans un angle trièdre BACS (*fig.* 221), on distingue six éléments, savoir : les trois faces SBA, SBC, ABC, et les trois dièdres BA, BC, BS.

370. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe* lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfini de chacune de ses faces (*fig.* 221); il est *concave* dans le cas contraire (*fig.* 222). Tout angle trièdre est convexe.

Tout plan qui coupe un angle polyèdre convexe, en rencontrant toutes ses arêtes d'un même côté du sommet S (*fig.* 221), donne évidemment comme intersection un polygone convexe ABCDE.

Lorsqu'un angle trièdre présente un angle dièdre droit, il est dit *rectangle*; il est *birectangle* ou *trirectangle* s'il ren-

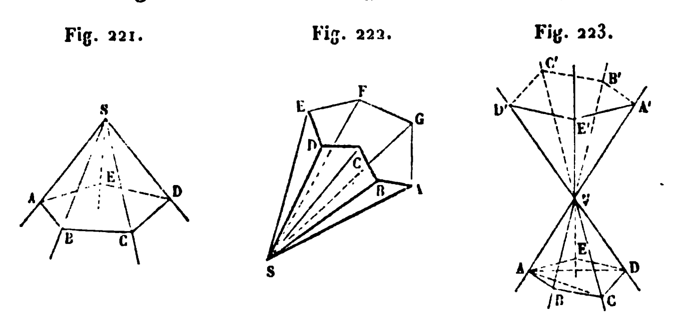


Fig. 221. Fig. 222. Fig. 223.

ferme deux ou trois angles dièdres droits. Le plancher ou le plafond et les murs d'un appartement se coupent en général en formant des angles trièdres trirectangles.

371. Si l'on prolonge au delà du sommet S toutes les arêtes d'un angle polyèdre SABCDE (*fig.* 223), on obtient un autre angle polyèdre SA'B'C'D'E', qui est dit le *symétrique* du premier.

Deux angles polyèdres symétriques SABCDE, SA'B'C'D'E', ont tous leurs éléments respectivement égaux : les faces ASB et A'SB', BSC et B'SC', ..., sont égales deux à deux comme angles plans opposés par le sommet, et les angles dièdres SA et SA', SB et SB', ..., sont égaux comme opposés par l'arête. Mais la disposition des parties égales n'est pas la même dans les deux angles polyèdres. En effet, un observateur couché sur l'arête SA, ayant la tête en S, les pieds en A et regardant l'intérieur de l'angle SABCDE, verra les arêtes se présenter de droite à gauche dans l'ordre SB, SC, SD, SE, tandis qu'un observateur placé de la même manière dans l'autre angle SA'B'C'D'E', c'est-à-dire couché sur SA', ayant la tête en S, les pieds en A' et regardant l'intérieur de l'angle, verra les arêtes se succéder de droite à gauche dans l'ordre inverse SE', SD', SC', SB'.

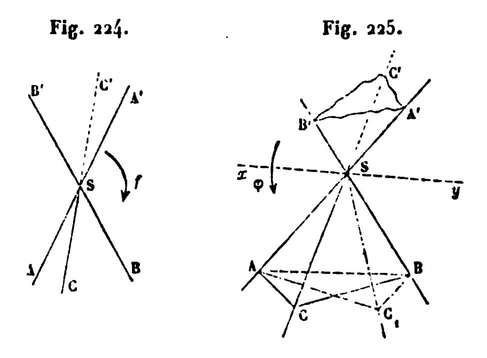
A cause de cette différence de disposition, *deux angles polyèdres symétriques, bien qu'égaux dans toutes leurs parties, ne sont pas superposables.*

En effet, considérons, par exemple, deux trièdres symétriques SABC et SA'B'C' (*fig.* 224), et supposons, pour fixer les idées, que l'arête SC soit en avant du plan ASB et, par suite,

que son prolongement SC′ soit en arrière du même plan. Il y a deux manières différentes d'essayer la superposition des deux trièdres.

1° Concevons (*fig.* 224) la perpendiculaire élevée par le point S sur le plan ASB, et faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de cette droite dans le sens de la flèche *f*; l'arête SA′, qui dans ce mouvement ne sort pas du plan ASB, viendra sur SA; de même SB′ s'appliquera sur SB. Mais l'arête SC′ restera toujours en arrière du plan ASB; par suite, dans sa nouvelle position, le trièdre SA′B′C′ ne coïncidera pas avec SABC.

2° Menons (*fig.* 225) la bissectrice xSy de l'angle BSA′, et,



autour de cette droite, qui est située dans le plan ASB, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° dans le sens de la flèche φ. L'arête SA′ s'appliquera sur SB, l'arête SB′ sur SA, et, par suite, la face A′SB′ coïncidera avec BSA; de plus, l'arête SC′ viendra cette fois en avant du plan ASB. Mais la nouvelle position SC_1 de cette arête différera en général de SC; car les angles dièdres suivant les arêtes SA et SB étant en général inégaux, il en sera de même des angles dièdres SB et SA′, et, par suite, les plans CSB et C_1SB, étant inégalement inclinés sur le plan ASB, ne coïncideront pas.

On voit cependant que la coïncidence aurait lieu si le trièdre SABC était *isocèle* ou avait les deux angles dièdres SA et SB égaux entre eux, car, dans cette hypothèse, les plans C_1SB et CSB seraient également inclinés sur le plan ASB; ils tomberaient donc l'un sur l'autre. Il en serait de même des plans C_1SA et CSA, et, par suite, les arêtes SC et SC_1 se confondraient. Observons d'ailleurs que la face C′SA′, qui est égale à CSA,

s'applique alors sur CSB, de sorte que l'égalité des deux angles dièdres SA et SB entraîne celle des faces CSB et CSA. Donc, en résumé, *pour qu'un trièdre soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit que ce trièdre ait deux angles dièdres égaux; et, dans un tel trièdre, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*

THÉORÈME.

372. *Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.*

Il n'y a lieu à démontrer cette proposition que lorsque la face considérée est plus grande que chacune des autres.

Cela posé, considérons d'abord un angle trièdre SABC (*fig.* 226). Dans la face ASB, que nous supposons plus grande que chacune des deux autres, formons un angle ASD égal à ASC, et prenons, à partir de S, sur les droites SD et SC, des longueurs SC et SD égales entre elles. Par le point D, menons

Fig. 226.

Fig. 227.

une droite ABD qui rencontre les arêtes SA et SB en A et en B; enfin, joignons le point C aux points A et B. L'égalité des deux triangles ASD, ASC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donne AD = AC, et, comme on a

$$\text{AB} \quad \text{ou} \quad \text{AD} + \text{DB} < \text{AC} + \text{CB},$$

on voit que le segment DB est moindre que CB. Dès lors, les deux triangles CSB, DSB, ayant SB commun, SC = SD et DB < CB, il faut (39) que l'angle DSB soit moindre que CSB. Donc, en ajoutant d'une part l'angle ASD et de l'autre son égal ASC, on a

$$\text{ASD} + \text{DSB} \quad \text{ou} \quad \text{ASB} < \text{ASC} + \text{CSB}.$$

Pour étendre le théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque, il suffit de décomposer cet angle en trièdres en me-

nant par l'une des arêtes SA et par les arêtes opposées SC, SD, des plans diagonaux ASC, ASD (*fig.* 223); la démonstration est évidente.

COROLLAIRE.

373. *Dans tout angle trièdre, à un plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face.*

Soit (*fig.* 227) le trièdre SABC, dans lequel l'angle dièdre SC est plus grand que l'angle dièdre SB. On pourra mener dans le dièdre SC et par l'arête SC un plan CSD qui fasse, avec le plan CSB, un angle dièdre égal au dièdre SB. Le trièdre SBCD ayant deux dièdres égaux, les faces BSD, CSD, opposées à ces angles, seront égales (371). Or le trièdre SACD donne

$$ASC < ASD + DSC;$$

on aura donc, en remplaçant la face DSC par son égale DSB,

$$ASC < ASD + DSB \quad \text{ou} \quad ASC < ASB.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au dernier alinéa du n° 371, et en raisonnant comme au n° 33, on verra que, réciproquement, *si un angle trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux, et, si un angle trièdre a deux faces inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.*

THÉORÈME.

374. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits* (*fig.* 228).

En effet, soit ABCDE un polygone *convexe* obtenu en coupant l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les arêtes (370). En ajoutant les inégalités

$$EAB < EAS + BAS,$$
$$ABC < ABS + CBS,$$
$$BCD < BCS + DCS,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

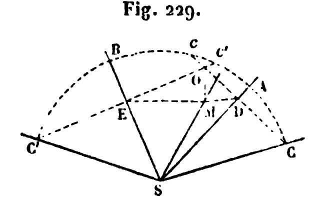
que fournissent les trièdres A, B, C, ... (372), on voit que la somme des angles intérieurs du polygone ABCDE est moindre que la somme des angles à la base des triangles SAB, SBC,

CD, ..., qui ont S pour sommet. Or, la somme des angles *ant intérieurs qu'extérieurs* du polygone convexe ABCDE est gale à la somme de tous les angles des triangles dont S est e sommet commun, puisque le nombre des côtés du polygone et le nombre des triangles sont les mêmes. Donc, la somme les angles en S de ces triangles, c'est-à-dire la somme des aces de l'angle polyèdre, est moindre que la somme des angles extérieurs du polygone, c'est-à-dire moindre que quatre angles droits (65).

SCOLIE.

375. Il résulte des deux théorèmes précédents (372, 374) que, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois faces données, *il faut* que la plus grande face soit inférieure à la somme des deux autres et que la somme des trois faces soit

Fig. 228. Fig. 229.



moindre que quatre angles droits. Nous allons prouver que ces deux conditions sont *suffisantes*.

Soient (*fig.* 229) ASB la plus grande face, et ASC, BSC′, les deux autres faces rabattues dans le plan de la première, de part et d'autre de celle-ci; SC et SC′ sont les deux droites provenant du dédoublement de la troisième arête.

Décrivons du point S comme centre un arc de cercle CC′ de rayon arbitraire; cet arc est moindre qu'une circonférence, puisque la somme des trois faces données est inférieure à quatre angles droits. C*c* et C′*c*′ étant les cordes menées des points C et C′ perpendiculairement aux arêtes SA et SB, les arcs AC et A*c* sont égaux entre eux, ainsi que les arcs BC′ et B*c*′; par suite, la relation

$$\text{arc}\,AB < \text{arc}\,AC + \text{arc}\,BC',$$

qui exprime que la plus grande face ASB est inférieure à la somme des deux autres, peut s'écrire

$$\text{arc}\,AB < \text{arc}\,Ac + \text{arc}\,Bc';$$

elle montre que le point c tombe entre B et c', que c' tombe entre c et A et, par conséquent, que les deux cordes Cc et C'c' se croisent en un point O intérieur au cercle CC'.

Élevons au point O la perpendiculaire OM au plan ASB, et dans le plan DOM décrivons du point D comme centre, avec un rayon égal à DC, un arc de cercle qui coupera nécessairement la perpendiculaire OM, puisque OD est moindre que DC. M étant le point d'intersection, menons SM : le trièdre SABM sera formé avec les trois faces données. En effet, si l'on tire MD et ME, ces droites seront respectivement perpendiculaires sur SA et sur SB, en vertu du théorème des trois perpendiculaires; dès lors, les deux triangles SDM, SDC, sont égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; on en conclut d'abord que la face ASM est égale à la face donnée ASC et que l'arête SM est égale à SC. Les deux triangles rectangles SME, SC'E, ont donc l'hypoténuse égale et un côté commun, et leur égalité prouve que la face MSB est égale à l'autre face donnée BSC'.

II. — Angles trièdres supplémentaires et cas d'égalité des angles trièdres.

THÉORÈME.

376. *Si un angle trièdre* SA'B'C' *est le trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné* SABC, *réciproquement* SABC *sera le trièdre supplémentaire de* SA'B'C'.

Pour bien comprendre la définition du trièdre supplémentaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque [1]. Par un point O d'un plan P, menons une perpendiculaire OM à ce plan et une oblique ON. Si les deux droites OM et ON *sont d'un même côté du plan* P, l'angle MON qu'elles forment est *aigu* (*fig.* 230), car il est compris dans l'un des angles droits MOT ou MOT' que fait la perpendiculaire OM avec la trace TOT' du plan MON sur le plan P. Si les deux droites OM et ON sont *situées de part et d'autre* du plan P, l'angle MON est *obtus* (*fig.* 231), car il contient l'un des angles MOT ou MOT'. Donc, réciproquement, suivant que

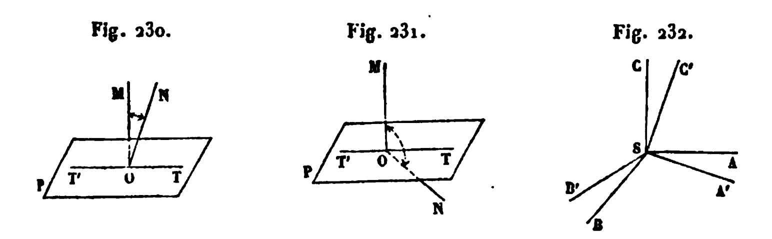
---

[1] *Voir* Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition, 1879.

l'angle MON est aigu ou obtus, on peut affirmer que la perpendiculaire OM et l'oblique ON sont d'un même côté du plan P ou de part et d'autre de ce plan.

Cela posé, on nomme *trièdre supplémentaire* d'un trièdre SABC (*fig.* 232) un nouveau trièdre SA′B′C′ formé de la manière suivante.

Par le sommet S, on élève une perpendiculaire SC′ à la



face ASB, du même côté que SC par rapport au plan de cette face; on mène SB′ perpendiculaire à la face ASC, du même côté que SB par rapport au plan ASC, et l'on trace enfin SA′ perpendiculaire à la face BSC, du même côté que SA par rapport au plan BSC.

Il s'agit maintenant de démontrer que le trièdre SABC résulte du trièdre SA′B′C′, comme celui-ci du premier, ou, en d'autres termes, que l'arête SC, par exemple, est perpendiculaire à la face A′SB′ et du même côté que SC′ par rapport au plan de cette face. Or, par hypothèse, SA′ est perpendiculaire au plan BSC et, par suite, à SC; de même, SB′ est perpendiculaire à SC comme perpendiculaire au plan ASC; donc SC est perpendiculaire au plan A′SB′. De plus, SC′ ayant été mené perpendiculairement au plan ASB et du côté de SC, l'angle CSC′ est aigu; par suite, la perpendiculaire SC au plan A′SB′ et l'oblique SC′ formant un angle aigu, ces deux droites sont situées d'un même côté par rapport à ce plan A′SB′.

THÉORÈME.

377. *Si* SABC *et* SA′B′C′ *sont deux trièdres supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un de ces trièdres est le supplément de la face qui lui est opposée dans l'autre* (*fig.* 233).

La démonstration est fondée sur la remarque suivante :

Lorsque, par un point O *pris sur l'arête d'un angle dièdre* OI,

on élève sur la face IOA *une perpendiculaire* OA′ *du même côté du plan* IOA *que la face* IOB, *et sur la face* IOB *une perpendiculaire* OB′ *du même côté du plan* IOB *que la face* IOA, *l'angle* A′OB′ *est le supplément de l'angle plan* AOB *qui mesure le dièdre* OI (*fig.* 234, 235).

En effet, les quatre droites OA, OB, OA′, OB′, sont dans le plan perpendiculaire à OI mené par O; d'ailleurs, OA′, perpendiculaire au plan IOA, est perpendiculaire à OA, et de même OB′ est perpendiculaire sur OB; les angles AOB, A′OB′, sont donc deux angles situés dans un même plan et ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; pour prouver qu'ils sont

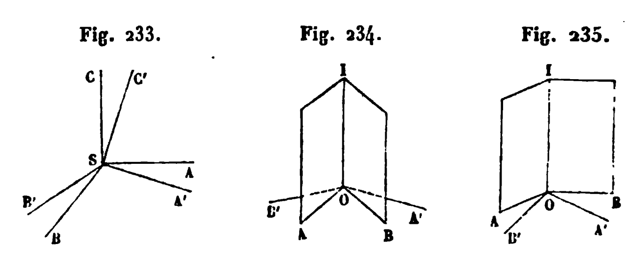


Fig. 233. Fig. 234. Fig. 235.

supplémentaires, il suffit de prouver qu'ils sont toujours d'espèce différente, c'est-à-dire l'un aigu, l'autre obtus. Or cela résulte de la direction que l'énoncé impose aux perpendiculaires OA′ et OB′. Car, si l'angle AOB est aigu (*fig.* 234), l'angle A′OB′ renferme l'angle droit AOA′ et, par suite, est obtus; si l'angle AOB est obtus (*fig.* 235), l'angle A′OB′ est contenu dans l'angle droit AOA′ et, par suite, est aigu.

Cela posé, revenons aux trièdres supplémentaires SABC, SA′B′C′ (*fig.* 233), et considérons, par exemple, le dièdre SC. La droite SB′ est une perpendiculaire à la face ASC de ce dièdre du côté de SB, et par suite du côté de l'autre face BSC; de même, SA′ est une perpendiculaire à la face BSC du dièdre, du côté de la face ASC; donc, l'angle A′SB′ est le supplément de l'angle qui mesure le dièdre SC ou, plus brièvement, le supplément du dièdre SC. On procéderait de même pour les dièdres SA et SB.

Puisque les deux trièdres SABC, SA′B′C′, se déduisent l'un de l'autre par la même construction, il est clair que la propriété qui vient d'être établie pour les dièdres du premier s'étend aux dièdres du second.

C'est en raison de cette double propriété que les deux trièdres ont été appelés *supplémentaires*.

SCOLIE.

378. Désignons par a, b, c, les nombres qui mesurent les faces et par A, B, C, les nombres qui mesurent les angles dièdres d'un angle trièdre, l'angle droit étant pris pour unité d'angle. Les nombres a', b', c', qui mesureront les faces et ceux A′, B′, C′, qui mesureront les angles dièdres du trièdre supplémentaire, seront donnés par les formules

$$a' = 2 - A, \quad A' = 2 - a,$$
$$b' = 2 - B, \quad B' = 2 - b,$$
$$c' = 2 - C, \quad C' = 2 - c.$$

Si l'on connaît une propriété quelconque d'un angle trièdre, c'est-à-dire une relation entre ses éléments a, b, c, A, B, C, en appliquant cette relation aux éléments a', b', c', A′, B′, C′, du trièdre supplémentaire, puis en remplaçant ces éléments par leurs valeurs tirées des formules précédentes, on aura une relation nouvelle entre a, b, c, A, B, C, c'est-à-dire une nouvelle propriété du trièdre primitif.

De même, toute propriété relative à plusieurs trièdres *conduira*, par la considération des trièdres supplémentaires des proposés, à une propriété nouvelle de ce système de trièdres.

On conçoit par là l'importance du théorème précédent. Voici d'ailleurs quelques applications de la méthode générale que nous venons d'indiquer.

379. Nous avons vu (374) que la somme des faces d'un trièdre était toujours comprise entre zéro et quatre angles droits. Cherchons le théorème correspondant, ou, comme on dit, le théorème *corrélatif*. Considérons à cet effet le trièdre supplémentaire du proposé; a', b', c', étant ses faces, on a

$$0 < a' + b' + c' < 4.$$

Par suite, A, B, C, étant les dièdres du trièdre proposé, on a

$$0 < (2 - A) + (2 - B) + (2 - C) < 4$$

ou

$$6 > A + B + C > 2.$$

Ainsi, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.*

Nous avons vu encore (372) que, dans tout trièdre, la plus grande face est moindre que la somme des deux autres : quel est le théorème corrélatif?

Soient a', b', c', les faces du trièdre supplémentaire du trièdre considéré. a' étant la plus grande, on a

$$a' < b' + c';$$

par suite, si A, B, C, sont les dièdres du trièdre proposé, on aura

$$2 - A < (2 - B) + (2 - C) \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C.$$

D'ailleurs, le supplément d'un angle diminuant quand cet angle augmente, A doit être le plus petit des dièdres A, B, C, puisque a' est la plus grande des faces a', b', c'. Donc enfin la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres dièdres.*

380. En résumé, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois dièdres donnés A, B, C, *il faut* que leur somme soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit augmenté de deux droits soit supérieur à la somme des deux autres.

Ces conditions sont *suffisantes*, car, quand elles sont remplies, les suppléments a', b', c', des angles donnés A, B, C, satisfont aux deux conditions du n° 375. On peut donc, avec les trois faces a', b', c', construire un trièdre et un seul; puis, en construisant le trièdre supplémentaire de celui-là, on obtient le trièdre dont les dièdres sont les angles donnés A, B, C.

THÉORÈME.

381. *Deux angles trièdres sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés;*

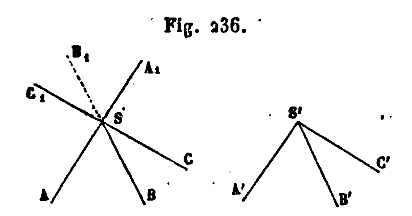
2° *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées;*

3° *Lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées;*

4° *Lorsqu'ils ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

1° Soient les deux trièdres SABC et S'A'B'C' (*fig.* 236). Par hypothèse, la face ASB est égale à la face A'S'B', les angles dièdres SA et S'A' sont égaux entre eux, ainsi que les dièdres SB et S'B'. On suppose en outre que la disposition des élé-

Fig. 236.



ments comparés est la même, c'est-à-dire que, si un observateur dont la tête est en S, le dos appuyé sur la face ASB et le regard dirigé vers SC, a l'arête SA à sa gauche et l'arête SB à sa droite, un autre observateur, dont la tête serait en S', le dos appuyé sur la face A'S'B' et le regard dirigé vers S'C', aurait l'arête S'A' à sa gauche et l'arête S'B' à sa droite.

Dans ces conditions, les deux trièdres sont égaux, c'est-à-dire superposables. En effet, si l'on place la face A'S'B' sur son égale ASB, de façon que S'A' coïncide avec SA et S'B' avec SB, l'arête S'C' tombe, par rapport au plan ASB, du même côté que SC, d'après ce qu'on vient de dire sur la disposition des éléments. Alors, les dièdres SA et S'A' étant égaux, le plan A'S'C' s'applique sur le plan ASC; de même, les dièdres SB et S'B' étant égaux, le plan B'S'C' s'applique sur le plan BSC; donc enfin, les arêtes S'C' et SC se confondent, et les deux trièdres coïncident.

2° Le second cas résulte du précédent, dont il est le *corrélatif* (379). En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux et semblablement disposés; ils sont donc superposables, et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

D'ailleurs, la démonstration directe n'offre aucune difficulté; on voit, par un raisonnement analogue au précédent (1°), que la superposition est possible si, conformément à l'hypothèse, la disposition des éléments est la même.

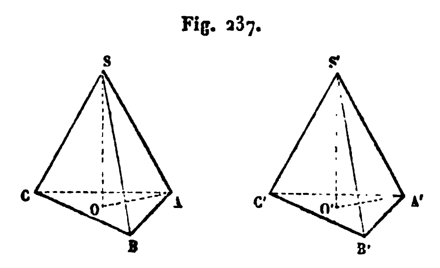
3° Pour le troisième cas, on pourrait suivre la méthode

de réduction à l'absurde, en étendant aux angles trièdres les propositions démontrées pour les triangles aux n° **38** et **39**.

Voici d'ailleurs une démonstration directe très simple :

Prenons (*fig.* 237) sur les arêtes du premier trièdre des longueurs SA = SB = SC. Prenons aussi sur les arêtes du second trièdre des longueurs S'A', S'B', S'C', égales entre elles et à SA. Formons ensuite les triangles ABC, A'B'C'. Les six triangles isocèles déterminés ASB, A'S'B', ASC, A'S'C', BSC, B'S'C', sont égaux *deux à deux* comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux : on en conclut l'égalité

Fig. 237.



des côtés AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C', c'est-à-dire l'égalité des triangles ABC, A'B'C'. Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan ABC; les trois obliques SA, SB, SC, étant égales, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (**304**). Si l'on abaisse de même S'O' perpendiculaire sur le plan A'B'C', le point O' est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Si l'on transporte alors le triangle A'B'C' sur son égal ABC, le point O' tombe au point O et la droite O'S' prend la direction OS. Mais les deux triangles rectangles SAO, S'A'O', sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal (OA = O'A'). Il en résulte O'S' = OS, le sommet S' se confond avec le sommet S, et les deux angles trièdres ayant les mêmes arêtes coïncident.

4° Le dernier cas résulte du précédent, dont il est le *corrélatif*. En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont leurs faces respectivement égales et semblablement disposées; ils sont donc superposables, et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

SCOLIE.

382. Si, dans chacun des quatre cas examinés, la disposition des éléments égaux était différente dans les deux trièdres, il n'y aurait plus *égalité*, mais seulement *symétrie*. En effet, soient T et T' les deux trièdres proposés, et T_1 le symétrique de T, c'est-à-dire celui que l'on déduit de T en prolongeant ses arêtes au delà du sommet (*fig.* 224). Les trièdres T et T_1 ont leurs éléments égaux et inversement disposés; par suite, comme T et T' remplissent par hypothèse toutes les conditions de l'un des cas d'égalité, sauf celle relative à la disposition des parties égales, les trièdres T' et T_1 satisferont à toutes les conditions de ce cas d'égalité : ils seront donc superposables, d'où l'on voit que T' est superposable au symétrique de T.

383. On a pu se rendre suffisamment compte, dans le courant de ce paragraphe, de l'analogie entre certaines propriétés des trièdres et des triangles rectilignes. Il importe toutefois d'observer, en terminant, que, si à toute propriété des triangles répond une propriété des trièdres, la réciproque n'est pas vraie; par exemple, tandis que l'égalité des angles dièdres de deux trièdres entraîne l'égalité de leurs faces, l'égalité des angles de deux triangles n'entraîne que la proportionnalité de leurs côtés.

THÉORÈME.

384. *Deux angles polyèdres de même espèce sont égaux lorsque, sauf une face et les deux dièdres adjacents, tous leurs autres éléments sont égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

La superposition s'opère en effet directement et de proche en proche, les faces qui comprennent celle qui est exceptée sur les deux angles polyèdres arrivant nécessairement à coïncider deux à deux.

Lorsque les éléments égaux se succèdent en ordre inverse dans les deux angles polyèdres, le second est évidemment égal au symétrique du premier (371).

On voit, par ce théorème, qu'un angle polyèdre de n faces est déterminé par $n-1$ faces et $n-2$ angles dièdres. La

détermination d'un pareil angle polyèdre exige donc $2n-3$ conditions.

III. — Exercices et questions complémentaires.

PROBLÈME.

385. *Trouver le lieu géométrique des points également distants des trois faces d'un angle trièdre.*

Nous avons déjà remarqué (359) que le lieu géométrique des points qui, situés *à l'intérieur* d'un angle dièdre, sont équidistants de ses faces, est le *plan bissecteur* de ce dièdre. On peut d'ailleurs le démontrer comme il suit.

Soient (*fig.* 238) MAB, NAB, deux plans dont l'intersection est AB; soit O un point du lieu. Abaissons de ce point sur les deux plans les perpendiculaires OC et OD : elles déterminent un plan perpendiculaire à l'arête AB au point I (315, 317). Les deux triangles rectangles OCI, ODI, sont égaux comme ayant l'hypoténuse OI commune et un côté de l'angle droit égal (OC = OD). Par suite, il en est de même des angles CIO et DIO. Si l'on mène par la droite IO et l'arête AB un plan PAB, ce plan partage l'angle dièdre MABN en deux parties égales, puisque les angles plans CIO, DIO, mesurent respectivement les dièdres MABP, PABN (305). Le lieu cherché se confond donc bien avec le *plan bissecteur* de l'angle dièdre proposé.

Fig. 238.

Si l'on prolonge maintenant les faces de l'angle dièdre MABN au delà de l'arête AB, on forme autour de AB quatre angles dièdres, deux à deux opposés par le sommet et deux à deux supplémentaires. Le lieu des points de l'espace également distants des deux plans donnés prolongés au delà de AB se compose alors évidemment, d'après ce qui précède, des plans bissecteurs, perpendiculaires entre eux et prolongés au delà de AB, de deux de ces angles supplémentaires.

Cela posé, considérons un angle trièdre SABC. D'après ce que nous venons de dire, le lieu des points qui, situés *à l'intérieur* de cet angle trièdre, sont à égale distance de ses trois faces, est l'intersection commune des plans bissecteurs des trois dièdres SA, SB, SC. En effet, l'intersection des deux premiers plans bissecteurs, ayant tous ses points à égale distance des trois faces, appartient nécessairement au troisième plan bissecteur.

Mais, en prolongeant les arêtes de l'angle trièdre donné au delà de son

sommet S, on forme autour de S huit angles trièdres deux à deux symétriques (371) ; car, deux des faces prolongées du trièdre formant, comme on vient de le voir, quatre angles dièdres, la troisième face constitue dans chacun de ces dièdres deux angles trièdres. Le lieu des points de l'espace équidistants des trois plans donnés ASB, BSC, CSA, supposés prolongés indéfiniment, est donc composé de huit droites passant par le point S et situées *à l'intérieur* de chacun des huit angles trièdres indiqués. Il est clair d'ailleurs que les deux droites qui répondent à deux angles trièdres symétriques sont en prolongement l'une de l'autre. *Le lieu cherché se compose* donc, en réalité, *de quatre droites, une intérieure, les trois autres extérieures à l'angle trièdre donné* SABC, *et concourant au sommet* S.

Les trois droites extérieures représentent respectivement l'intersection commune du plan bissecteur d'un dièdre *intérieur* au trièdre donné avec les plans bissecteurs de deux dièdres *extérieurs* à ce même trièdre et non adjacents au dièdre intérieur considéré.

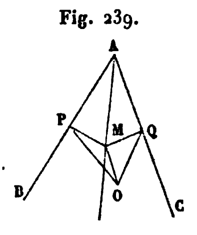
PROBLÈME.

386. *Trouver le lieu géométrique des points également distants des trois arêtes d'un angle trièdre.*

Nous commencerons par chercher le lieu des points de l'espace également distants des côtés d'un angle donné.

Soient BAC l'angle donné et O un point du lieu (*fig.* 239). Abaissons de ce point OM perpendiculaire sur le plan BAC. Du pied M de cette perpendiculaire, menons sur les côtés de l'angle donné les perpendiculaires MP, MQ ; puis, joignons OP et OQ. Les droites OP et OQ, représentant les distances du point O aux côtés AB et AC (307), sont égales par hypothèse. Les triangles rectangles OMP, OMQ, sont donc aussi égaux, et l'on a $MP = MQ$, c'est-à-dire que le point M appartient à la bissectrice de l'angle BAC. Les perpendiculaires abaissées des points du lieu sur le plan BAC ayant leurs pieds sur la bissectrice AM, le lieu demandé est le plan conduit perpendiculairement au plan BAC par cette même bissectrice.

Fig. 239.



Si l'on regarde les côtés de l'angle BAC comme indéfiniment prolongés, le lieu se compose de deux plans distincts menés par les bissectrices des angles supplémentaires formés par ces côtés. Ces plans sont perpendiculaires entre eux, car leur angle dièdre est précisément mesuré par l'angle des bissectrices des deux angles supplémentaires.

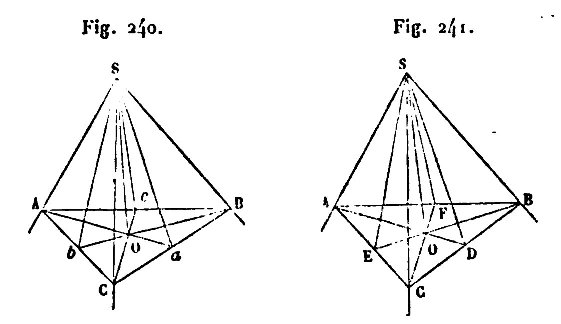
Cela posé, considérons un angle trièdre SABC. D'après ce qu'on vient de dire, le lieu des points de l'espace équidistants des deux arêtes SA et SB indéfiniment prolongées, se compose des deux plans menés perpendiculairement à la face ASB par les bissectrices des angles supplémentaires formés par ces deux arêtes. De même, le lieu des points de l'espace

équidistants des deux arêtes SB et SC, aussi prolongées, se compose de deux autres plans menés perpendiculairement à la face BSC par les bissectrices des angles supplémentaires formés par ces deux arêtes. Le lieu cherché est donc formé par les intersections mutuelles des quatre plans indiqués, qui se croisent au point S, les deux premiers devant être combinés successivement avec les deux autres. *Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des trois arêtes du trièdre* SABC *se compose,* par suite, *de quatre droites concourant au sommet* S.

THÉORÈME.

387. *Démontrer que les plans menés perpendiculairement aux faces d'un angle trièdre par les arêtes opposées à ces faces, se croisent suivant une même droite* (*fig.* 240).

Soit l'angle trièdre SABC. Menons par l'arête SA le plan ASa, perpendiculaire sur la face BSC et, par l'arête SB, le plan BSb, perpendiculaire sur la face ASC. Par un point quelconque C de la troisième arête, abaissons CB perpendiculaire sur Sa, CA perpendiculaire sur Sb, et joignons les points A et B. La droite CB étant, dans le plan BSC, perpendiculaire sur l'intersection Sa de ce même plan et du plan ASa, qui lui est perpendiculaire, est perpendiculaire au plan ASa (362), et par suite à Aa. On prouve de la même manière que CA est perpendiculaire sur Bb. Aa et Bb sont donc



deux hauteurs du triangle ABC, et leur point d'intersection O appartient à la troisième hauteur Cc de ce triangle (81). Le plan ABC étant à la fois perpendiculaire aux plans ASa, BSb, comme contenant deux droites perpendiculaires à ces plans (363), est aussi perpendiculaire à leur intersection SO (367). Dès lors, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, AB, perpendiculaire à Cc, l'est aussi à Sc, c'est-à-dire au plan CSc de ces deux droites. Ce plan est donc le troisième plan mené perpendiculairement par l'arête SC sur la face ASB, et la proposition énoncée est démontrée.

THÉORÈME.

388. *Démontrer que les plans menés par les arêtes d'un angle trièdre et les bissectrices des faces opposées à ces arêtes se croisent suivant une même droite* (*fig.* 241).

Prenons sur les arêtes de l'angle trièdre trois longueurs égales SA = SB = SC, de manière à former les triangles isocèles SAB, SAC, SBC. Les bissectrices des angles au sommet de ces triangles isocèles passeront par les milieux des bases de ces mêmes triangles, c'est-à-dire par les milieux des côtés du triangle ABC. Les médianes AD, BE, CF, de ce triangle, se coupant en un même point O (84), les trois plans ASD, BSE, CSF, se coupent suivant la même droite SO.

LIVRE QUATRIÈME.

LES AIRES ET LES VOLUMES DES CORPS.

CHAPITRE PREMIER.

LES PRISMES ET LES CYLINDRES.

I. — Définitions préliminaires.

389. Un corps terminé par une surface fermée de forme quelconque occupe une certaine portion limitée de l'espace qui constitue ce qu'on appelle son *volume* (2).

Les volumes de deux corps sont *égaux* (7) lorsqu'on peut les placer exactement l'un dans l'autre, c'est-à-dire les faire *coïncider*.

Ajouter les volumes de plusieurs corps, c'est les disposer à la suite les uns des autres, dans un ordre d'ailleurs quelconque, de manière qu'ils n'aient aucune partie intérieure commune et qu'ils ne se relient que par certaines portions de leurs surfaces.

Si un volume A est ainsi la *somme* de deux volumes B et C, le volume C, à son tour, est la *différence* des deux volumes A et B.

390. *Mesurer* un volume limité, c'est trouver son rapport à un autre volume limité pris pour *unité*.

Deux volumes limités peuvent n'être pas *superposables* et contenir cependant le même nombre d'unités de volume. On

dit alors que ces deux volumes sont *équivalents* (7). Par exemple, si l'on ajoute trois volumes quelconques A, B, C, d'abord dans l'ordre ABC, puis dans l'ordre ACB, puis enfin dans l'ordre CAB, les volumes *sommes* obtenus ne sont pas, en général, superposables; mais ils renferment évidemment le même nombre d'unités de volume et sont équivalents.

Si, à des volumes équivalents, on ajoute ou l'on retranche d'autres volumes équivalents, les sommes ou les différences ainsi formées sont encore équivalentes. De même, si l'on divise deux volumes équivalents en un même nombre de parties équivalentes, les parties du premier sont équivalentes à celles du second.

391. Le problème de la mesure des volumes limités présente, comme celui de la mesure des aires des surfaces planes limitées (241), un caractère particulier, à cause de la difficulté de porter à l'intérieur du volume considéré, pour effectuer la comparaison nécessaire, le volume choisi pour unité. On ne peut donc résoudre ce problème *directement* que dans un très petit nombre de cas simples. Mais, une fois ces solutions obtenues, les considérations d'équivalence et la théorie des limites permettent de passer à des cas plus compliqués.

Nous indiquerons d'abord les définitions suivantes.

392. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans.

Ces plans, en se limitant mutuellement, déterminent les *arêtes*, les *faces* et les *sommets* du polyèdre. Les angles dièdres et polyèdres formés par les faces sont les angles dièdres et polyèdres de la figure. Le polyèdre a pour *diagonales* les droites qui unissent deux sommets quelconques non situés sur une même face.

On a donné des noms particuliers à certains polyèdres d'après le nombre de leurs faces. Ainsi, tout polyèdre ayant quatre faces est un *tétraèdre*. Les noms *hexaèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre,* correspondent aux polyèdres de six, huit, douze, vingt faces.

393. Un polyèdre est *convexe* lorsqu'il reste tout entier d'un même côté de chacune de ses faces prolongées indéfiniment.

Une droite quelconque ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points, car tout plan mené suivant cette droite rencontre nécessairement la surface du polyèdre suivant un polygone convexe (62), dont le contour a, avec la droite donnée, les mêmes points d'intersection que la surface du polyèdre.

Dans ce qui suit, il ne s'agira que de polyèdres convexes.

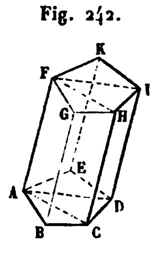
394. Parmi les polyèdres, on distingue le *prisme* et la *pyramide*. Nous considérerons d'abord le prisme.

Le *prisme* est un polyèdre compris sous plusieurs plans parallélogrammes réunis entre eux par deux faces opposées égales et parallèles.

On construit un prisme de la manière suivante :

Soit (*fig.* 242) ABCDE un polygone plan quelconque. Par le sommet A, menons extérieurement au plan de ce polygone la droite AF et, par le point F, un plan parallèle au plan ABCDE; puis, par les sommets B, C, D, E, traçons, jusqu'à la rencontre du plan mené par le point F, les droites BG, CH, DI, EK, parallèles à AF. Ces droites sont toutes égales à AF (329, 2°); toutes les faces ABGF, BCHG, CDIH, ..., sont donc des parallélogrammes. De plus, les deux polygones parallèles ABCDE, FGHIK, sont égaux, comme ayant leurs côtés égaux et parallèles. Le polyèdre obtenu est donc un prisme.

Fig. 242.



395. Si la droite AF est perpendiculaire au plan ABCDE, le prisme est *droit;* sinon, il est *oblique.*

Les droites AF, BG, CH, ..., sont les *arêtes latérales* du prisme, et la somme des faces parallélogrammes ABGE, BCHG, ..., forme son aire latérale.

Le prisme a pour *bases* les deux polygones égaux et parallèles ABCDE, FGHIK, et sa *hauteur* est la distance des plans de ses deux bases.

396. Dans un prisme droit, chaque arête latérale est égale à la hauteur. Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

Dans un prisme oblique, la hauteur est moindre que l'arête latérale.

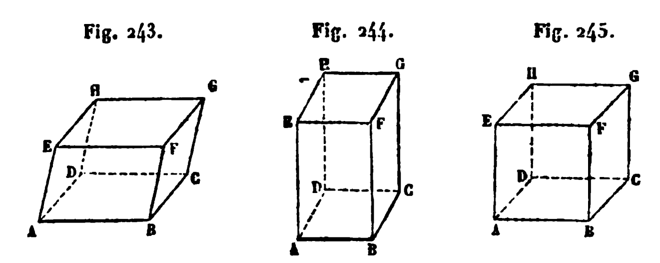
Un prisme *régulier* est un prisme droit qui a pour bases des polygones réguliers.

397. Suivant que les bases d'un prisme sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des hexagones, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc.

398. Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue celui qui a pour bases des parallélogrammes, et on lui donne le nom de *parallélipipède*. Toutes les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes (*fig.* 243).

Un parallélipipède peut être *droit* ou *oblique* (396).

Parmi les parallélipipèdes droits, on distingue le *parallélipipède rectangle*, dont les bases sont des rectangles. Toutes



les faces d'un parallélipipède rectangle sont des rectangles (*fig.* 244).

On nomme *cube* le parallélipipède rectangle dont les bases et les faces latérales sont des carrés, nécessairement égaux (*fig.* 245).

On remarquera que, la perspective déformant les angles, la *fig.* 244 représente aussi bien un parallélipipède droit qu'un parallélipipède rectangle.

399. De même qu'on appelle *dimensions* d'un rectangle les longueurs de deux côtés adjacents, on appelle *dimensions* d'un parallélipipède rectangle les longueurs de trois arêtes contiguës, c'est-à-dire partant d'un même sommet. Le parallélipipède rectangle AG (*fig.* 244) a pour dimensions les longueurs des arêtes AB, AD, AE.

400. *L'unité de volume est*, en général, *le cube construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre cube.*

Par conséquent, évaluer le volume d'un corps, c'est chercher combien ce volume renferme de mètres cubes et de subdivisions du mètre cube.

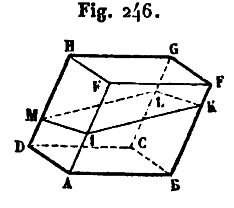
II. — Théorèmes généraux relatifs au prisme.

THÉORÈME.

401. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.*

Soit (*fig.* 246) le parallélipipède AG. Ses bases ABCD, EFGH, sont, par définition, des parallélogrammes égaux et parallèles. Il faut donc prouver seulement que deux faces latérales opposées, ADHE et BCGF par exemple, remplissent la même condition. Or, AD et BC sont égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABCD; AE et BF sont aussi égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABFE. Par suite, les deux angles DAE et CBF sont égaux, et leurs plans sont parallèles. Les deux parallélogrammes ADHE, BCGF, sont donc égaux et parallèles.

Fig. 246.



COROLLAIRES.

402. Le parallélipipède étant un prisme compris sous six faces parallélogrammes dont les opposées sont égales et parallèles, *on peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques* (394).

403. *Tout plan qui rencontre deux faces opposées d'un parallélipipède le coupe suivant un parallélogramme.* Soit le plan IKLM (*fig.* 246) qui rencontre les deux faces opposées ADHE et BCGF du parallélipipède AG. Les côtés opposés de la section IKLM étant parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, cette section est un parallélogramme.

SCOLIE.

404. Pour construire un parallélipipède sur trois droites données AB, AD, AE, partant d'un même point A et non si-

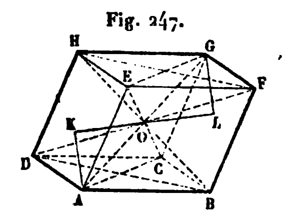
tuées dans un même plan (*fig.* 246), il suffit de mener par l'extrémité non commune de chacune de ces droites un plan parallèle au plan des deux autres. Ainsi, par le point E, on conduira un plan parallèle au plan BAD, par le point D un plan parallèle au plan BAE, par le point B un plan parallèle au plan DAE. Le polyèdre compris sous les six plans considérés sera un parallélipipède.

THÉORÈME.

405. *Dans un parallélipipède, les quatre diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

Considérons le parallélépipède AG et les deux diagonales BH et DF (*fig.* 247). Les arêtes latérales BF, DH, étant égales et parallèles, la figure BDHF est un parallélogramme dont les diagonales BH et DF sont inégales et se coupent mutuellement en parties égales au point O (71). Considérons les deux diagonales DF et AG. Les arêtes AD et FG étant égales et parallèles, la figure ADGF est un parallélogramme dont les diagonales DF et AG se coupent mutuellement en parties égales : le point O, étant déjà le milieu de DF, est aussi le milieu de AG; on prouverait de même qu'il est le milieu de la quatrième diagonale CE du parallélipipède.

Fig. 247.

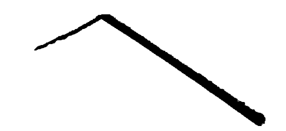


COROLLAIRES.

406. Si le parallélipipède devient rectangle, les parallélogrammes que nous venons de considérer se transforment en rectangles, et leurs diagonales deviennent égales. *Les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont donc égales.*

407. Le point O est appelé le *centre* du parallélipipède AG, parce que toute droite limitée à la surface du parallélipipède et passant par ce point y est partagée en deux parties égales : c'est ce que les deux triangles AOK, GOL, prouvent immédiatement.

408. *Dans tout parallélipipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes.*



Les parallélogrammes ACGE, BDHF, permettent de poser (175)

$$AG^2 + CE^2 = 2AE^2 + 2AC^2,$$
$$BH^2 + DF^2 = 2BF^2 + 2BD^2.$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre, et si l'on remarque que BF = AE, il vient

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 2(AC^2 + BD^2).$$

Mais le parallélogramme ABCD donne

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2.$$

En substituant, on a donc

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 4AB^2 + 4AD^2.$$

409. Si le parallélipipède est rectangle, ses diagonales sont égales (406) et le premier membre se réduit à $4AG^2$. En divisant par 4, on obtient donc

$$AG^2 = AE^2 + AB^2 + AD^2.$$

Ainsi, *dans tout parallélipipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des trois arêtes qui partent d'un même sommet.* Cette relation est facile à démontrer directement. Nous ne nous y arrêterons pas.

410. Si le parallélipipède rectangle devient un cube, toutes les arêtes sont égales, et l'on a $AG^2 = 3AE^2$ ou $AG = AE\sqrt{3}$. Ainsi, *le carré de la diagonale d'un cube est égal au triple carré de son arête.* La diagonale d'un cube est donc le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle ayant pour rayon l'arête du cube.

THÉORÈME.

411. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont deux polygones égaux.*

Soient (*fig.* 248) le prisme AH et les sections LMNOP, QRSTU, faites par deux plans parallèles. Les côtés de ces sections sont deux à deux parallèles, comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, et égaux, comme parallèles comprises entre parallèles. Les deux poly-

gones obtenus ont donc à la fois leurs angles égaux et leurs côtés égaux.

COROLLAIRE.

412. Lorsque le plan sécant est parallèle à la base du prisme, la section obtenue est égale à cette base.

En supposant les arêtes latérales du prisme prolongées au delà des bases, la démonstration précédente s'applique, que les sections soient intérieures ou extérieures au prisme, et même lorsqu'elles sont en partie intérieures et en partie exté-

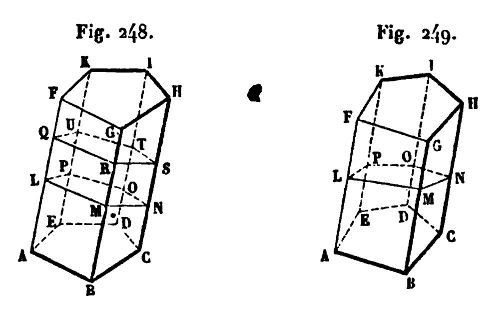


Fig. 248. Fig. 249.

rieures. Il suffit que les plans sécants rencontrent toutes les arêtes latérales.

SCOLIE.

413. On appelle *section droite* d'un prisme la section déterminée dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales.

414. Si l'on détache une portion d'un prisme par un plan incliné à sa base, le polyèdre restant est un *prisme tronqué*. La section obtenue est la base supérieure du tronc de prisme.

III. — Aire et volume du prisme.

THÉORÈME.

415. *L'aire latérale d'un prisme a pour mesure le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale.*

Soient (*fig.* 249) le prisme AH et sa section droite LMNOP. Les côtés de cette section droite sont les hauteurs des parallélogrammes qui forment l'aire latérale du prisme, et ces

parallélogrammes ont pour bases égales les arêtes latérales du polyèdre. La somme de leurs mesures sera donc

$$\begin{aligned} &AF.LM + BG.MN + \ldots + KE.PL \\ &= AF(LM + MN + \ldots + PL). \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

416. Si le prisme est droit, sa section droite est égale à sa base et son arête latérale à sa hauteur (412, 396). *L'aire latérale d'un prisme droit a* donc *pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.*

SCOLIE.

417. En ajoutant à l'aire latérale d'un prisme deux fois l'aire de sa base, on obtient son aire totale.

THÉORÈME.

418. *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

Car, si l'on fait coïncider les bases inférieures de ces prismes, leurs arêtes latérales prendront deux à deux la même direction (327), et, comme elles sont égales à la hauteur donnée, les bases supérieures des deux prismes coïncideront aussi.

SCOLIE.

419. La démonstration précédente s'applique au cas de deux prismes droits tronqués de même base, lorsque leurs arêtes latérales sont égales deux à deux.

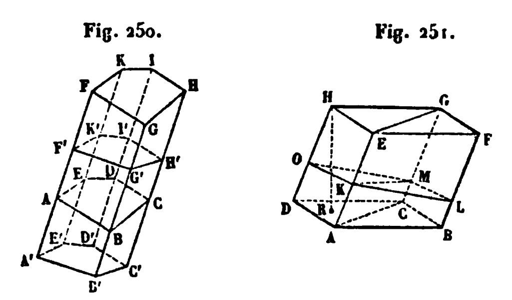
THÉORÈME.

420. *Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur son arête latérale.*

Soit (*fig.* 250) le prisme oblique ABCDEFGHIK ou AH. Par un point G′ de l'arête BG, menons la section droite F′G′H′I′K′. Prolongeons l'arête BG au-dessous de la base ABCDE d'une longueur BB′ = GG′, et par le point B′ menons un plan parallèle au plan de la section droite. Les intersections de ce plan avec les arêtes latérales du prisme prolongées détermineront un polygone A′B′C′D′E′ égal (412) au polygone F′G′H′I′K′.

·e A′B′C′D′E′F′G′H′I′K′ ou A′H′ sera donc un prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique AH et pour hauteur son arête latérale BG, car on a B′G′ = BG, puisque, par construction, BB′ = GG′.

Cela posé, le volume compris entre la base inférieure du prisme oblique AH et la base supérieure du prisme droit A′H′ est commun aux deux prismes. Pour démontrer l'équivalence de ces deux prismes, il suffit donc de démontrer l'égalité des deux polyèdres ou prismes droits tronqués (414)



A′B′C′D′E′ABCDE ou A′C et F′G′H′I′K′FGHIK ou F′H. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque faite au n° 419, car les deux bases A′B′C′D′E′, F′G′H′I′K′, sont égales, ainsi que les arêtes correspondantes A′A et F′F, B′B et G′G, etc. A′A, par exemple, est l'arête latérale ou la hauteur du prisme droit A′H′, diminuée de AF′, et F′F est l'arête latérale du prisme oblique AH, diminuée de la même quantité.

THÉORÈME.

421. *Le plan mené par deux arêtes latérales opposées d'un parallélipipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents.*

Soit (*fig.* 251) le parallélipipède quelconque AG. Le plan AEGC, mené par les arêtes opposées AE et CG, partage ce parallélipipède en deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, dont il s'agit de démontrer l'équivalence.

Menons la section droite du parallélipipède AG. Cette section OKLM est un parallélogramme (403), et les deux triangles égaux KLM, KMO, suivant lesquels la diagonale KM la divise, sont respectivement les sections droites des prismes ABCEFG, ACDEGH.

Or le prisme triangulaire ABCEFG est équivalent au prisme droit ayant pour base KLM et pour hauteur AE (420); de même, le prisme triangulaire ACDEGH, est équivalent au prisme droit ayant pour base KMO et pour hauteur AE. Les deux prismes droits énoncés étant égaux (418), les deux prismes triangulaires ABCE FG, ACDEGH, sont équivalents, et chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AG.

SCOLIE.

422. Les théorèmes précédents font dépendre la mesure du volume du prisme de celle du volume du parallélipipède et permettent de ramener la mesure du volume du parallélipipède quelconque à celle du volume du parallélipipède rectangle.

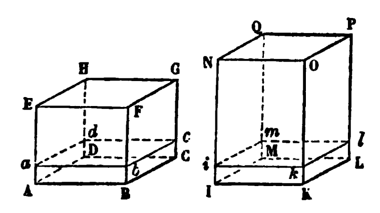
Pour obtenir l'expression du volume du parallélipipède rectangle, nous allons chercher quelle influence la variation de la hauteur ou la variation de la base a sur celle du volume.

THÉORÈME.

423. *Deux parallélipipèdes rectangles qui ont même base, ont des volumes proportionnels à leurs hauteurs* (*fig.* 252).

Soient les deux parallélipipèdes rectangles AG et IP, dont

Fig. 252.



les bases ABCD, IKLM, sont égales. Supposons une commune mesure $Aa = Ii$ entre les deux hauteurs AE, IN, et admettons que cette commune mesure soit contenue cinq fois dans AE et sept fois dans IN; on aura $\frac{AE}{IN} = \frac{5}{7}$.

Par tous les points de division des hauteurs, menons dans les deux parallélipipèdes des plans parallèles aux bases. Nous déterminerons ainsi dans le parallélipipède AG cinq parallélipipèdes rectangles partiels et dans le parallélipipède IP sept parallélipipèdes rectangles partiels; ces parallélipipèdes par-

ront tous égaux entre eux, comme prismes droits ayant même base et même hauteur (418), de sorte que l'un d'eux pourra servir de commune mesure entre les deux parallélipipèdes AG et IN, et qu'on aura aussi $\frac{\text{par. AG}}{\text{par. IN}} = \frac{5}{7}$. Les volumes de ces deux parallélipipèdes sont donc bien proportionnels à leurs hauteurs.

Si les deux hauteurs AE, IN, étaient incommensurables, on emploierait le raisonnement connu (105).

COROLLAIRE.

424. *Deux parallélipipèdes rectangles qui ont même hauteur, ont des volumes proportionnels à leurs bases.*

Soient P et P′ les deux parallélipipèdes considérés. Désignons par a leur hauteur commune, par b et c les dimensions de la base B du parallélipipède P, par b' et c' les dimensions de la base B′ du parallélipipède P′. Prenons un troisième parallélipipède rectangle P″, dont les dimensions (399) soient a, b', c.

Comparons les parallélipipèdes P et P″. On peut prendre pour base d'un parallélipipède l'une quelconque de ses faces (402); si l'on prend pour bases des parallélipipèdes considérés les faces qui, dans ces parallélipipèdes, ont pour dimensions a et c, on pourra dire que ces deux parallélipipèdes ont même base et qu'ils sont proportionnels à leurs hauteurs b et b'. On aura donc (423)

$$\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'}.$$

Comparons les parallélipipèdes P″ et P′, et prenons pour bases de ces parallélipipèdes les faces qui ont pour dimensions a et b'. Ces deux parallélipipèdes, ayant alors même base, seront proportionnels à leurs hauteurs c et c'. On aura donc

$$\frac{P''}{P'} = \frac{c}{c'}.$$

Multiplions membre à membre les deux égalités obtenues; il viendra

$$\frac{PP''}{P''P'} = \frac{bc}{b'c'} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{B}{B'}.$$

On énonce encore la proposition qu'on vient de démontrer

en disant que *deux parallélipipèdes rectangles qui ont une dimension commune sont proportionnels aux produits de leurs deux autres dimensions.*

THÉORÈME.

425. *Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit des mesures de sa base et de sa hauteur, quand on prend pour unités d'aire et de volume le carré et le cube construits sur l'unité de longueur.*

Soient deux parallélipipèdes rectangles P et P'; désignons leurs bases par B et B', leurs hauteurs par H et H'. Les volumes de ces parallélipipèdes, étant *proportionnels* à leurs hauteurs et *proportionnels* à leurs bases, sont aussi *proportionnels* aux produits des bases par les hauteurs (t. I, *Arithm.*, 411). On a donc immédiatement

$$\frac{P}{P'} = \frac{BH}{B'H'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'}.$$

Si P' devient le mètre cube, B' deviendra le mètre carré et H' le mètre. On aura, par conséquent,

$$\frac{P}{1^{Mc}} = \frac{B}{1^{Mq}} \cdot \frac{H}{1^{M}}.$$

$\frac{P}{1^{Mc}}$ représente la *mesure* du volume du parallélipipède rectangle P (400), $\frac{B}{1^{Mq}}$ représente la *mesure* du rectangle qui lui sert de base (245) et $\frac{H}{1^{M}}$ représente la *mesure* de sa hauteur. On voit donc que le même nombre abstrait représente la mesure du volume du parallélipipède et le produit des mesures de sa base et de sa hauteur. C'est ce qu'on exprime plus rapidement, en employant la locution inexacte : *Tout parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

SCOLIE.

426. Si l'on désigne par a, b, c, les dimensions du parallélipipède P et par a', b', c', celles du parallélipipède P', on peut

écrire

$$\frac{P}{P'} = \frac{abc}{a'b'c'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

P' devenant le mètre cube, on a $a' = b' = c' = 1^{M}$, c'est-à-dire

$$\frac{P}{1^{Mc}} = \frac{a}{1^{M}} \cdot \frac{b}{1^{M}} \cdot \frac{c}{1^{M}}.$$

On aurait donc pu énoncer les résultats précédents en disant : *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont proportionnels aux produits de leurs trois dimensions; tout parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions.*

Mais cette forme n'est applicable qu'aux parallélipipèdes rectangles, tandis que celle que nous avons adoptée est applicable à tous les prismes.

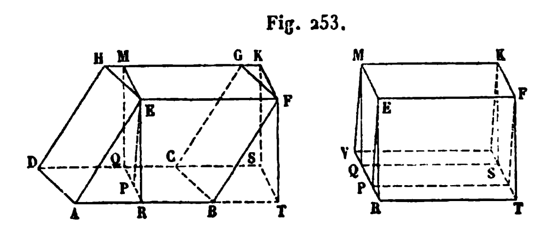
427. *Le volume d'un cube est,* d'après ce que nous venons de dire, *égal à la troisième puissance de son arête.* On comprend maintenant la synonymie des mots *cube* et *troisième puissance* employés en Arithmétique.

THÉORÈME.

428. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (*fig.* 253) le parallélipipède quelconque AG ayant pour base ABCD ou EFGH et pour hauteur la perpendiculaire EP abaissée du sommet E sur le plan ABCD. Menons par le

Fig. 253.



point E, dans le plan EFGH, la perpendiculaire EM à HG. Si l'on prend la face AEHD pour base du parallélipipède proposé (402), son arête latérale sera EF et sa section droite (413) sera le parallélogramme EMQR déterminé par le plan MEP.

Le parallélipipède AG sera donc équivalent au parallélipipède droit RK, ayant pour base la section droite EMQR et pour hauteur l'arête EF (420).

Cela posé, reproduisons à part, pour plus de clarté (*fig.* 253), ce parallélipipède droit RK, et construisons un parallélipipède rectangle PK, ayant pour dimensions EF, EM, EP. Le parallélipipède droit RK et le parallélipipède rectangle PK ainsi déterminé, présentent seulement comme parties non communes les deux prismes droits qui ont pour hauteur EF et pour bases les deux triangles égaux EPR, MVQ. Ces deux prismes étant égaux (418), les deux parallélipipèdes seront équivalents, et, par suite, il en sera de même du parallélipipède quelconque AG et du parallélipipède rectangle PK. Donc, le produit EF.EM.EP, qui exprime la mesure (426) du parallélipipède rectangle PK, mesure aussi le volume du parallélipipède quelconque AG. Or, EF.EM mesure la base EFGH de ce parallélipipède, et EP est sa hauteur.

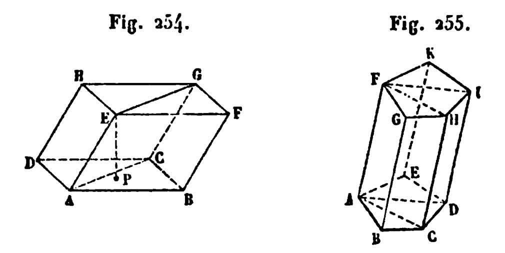
Donc enfin, le volume du parallélipipède quelconque AG est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME.

429. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

1° Soit (*fig.* 254) le prisme triangulaire ABCEFG. Par l'extrémité A de l'arête AB, menons le plan ADHE parallèle à la face BCGF, et par l'extrémité C de l'arête BC le plan CDHG

Fig. 254. Fig. 255.



parallèle à la face ABFE; prolongeons en même temps les deux bases du prisme jusqu'à la rencontre de ces plans. On obtiendra ainsi (404) le parallélipipède AG, construit sur les trois droites AB, BC, BF. La face ACGE du prisme triangulaire considéré étant un plan diagonal du parallélipipède AG,

ce prisme en sera la moitié (421). Donc, le volume du parallélipipède AG ayant pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur EP (428), le volume du prisme triangulaire ABCEFG aura pour mesure la moitié de ce produit, c'est-à-dire le produit de sa base ABC, moitié du parallélogramme ABCD, par sa hauteur EP.

2° Soit (*fig.* 255) un prisme quelconque ABCDEFGHIK. On le décompose en prismes triangulaires en faisant passer des plans diagonaux par l'arête AF et chacune des arêtes CH, DI. Ces prismes triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base du prisme donné, et leur hauteur commune est celle H du prisme. La somme de leurs mesures (1°)

$$ABC.H + ACD.H + ADE.H,$$

ou la mesure du prisme AI, sera donc égale au produit de sa base ABCDE par sa hauteur H.

COROLLAIRES.

430. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'un prisme, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

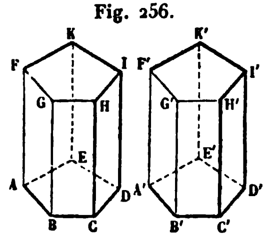
$$V = B.H.$$

Donc, *deux prismes de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents; deux prismes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

THÉORÈME.

431. *Deux prismes quelconques sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées* (*fig.* 256).

Fig. 256.



Supposons les deux prismes AH, A'H'. Soient le dièdre AB égal au dièdre A'B', la base ABCDE égale à la base A'B'C'D'E', la face ABGF égale à la face A'B'G'F'. Portons les deux prismes l'un sur l'autre,

manière que les bases égales coïncident. Le dièdre A′B′ nt égal au dièdre AB, la face A′B′G′F′ tombera dans le plan la face ABGF. D'après l'égalité de ces deux faces, l'angle ABG égal à l'angle A′B′G′ : l'arête B′G′ prendra donc la direction l'arête BG, et le sommet G′ coïncidera avec le sommet G, squ'on a $B'G' = BG$.

ne fois la coïncidence des deux bases inférieures établie, si que celle de deux arêtes latérales BG, B′G′, il résulte de ègle indiquée pour la construction d'un prisme (394) que s les autres sommets des deux bases supérieures des smes considérés devront aussi coïncider. Ces deux prismes -mêmes, ayant mêmes sommets, se confondront donc et ont égaux.

SCOLIE.

32. L'égalité des deux bases inférieures exige $2n - 3$ conions (66); comme AB est alors égal à A′B′, l'égalité des ux faces latérales n'exige plus que deux conditions, puisque s faces sont des parallélogrammes; enfin, l'égalité des deux les dièdres compte pour une condition. L'égalité des deux smes AH, A′H′, exige donc $2n$ conditions, en désignant r n le nombre des côtés de l'une des bases.

IV. — Notions relatives au cylindre.

433. On nomme *surface cylindrique de révolution* la surce engendrée par une droite GG′ qui tourne autour d'une roite fixe XX′ à laquelle elle est parallèle et invariablement iée (*fig.* 257).

La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou d'*arête*.

434. Tout point A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe; car, pendant la rotation, la perpendiculaire AO abaissée du point A sur XX′ reste perpendiculaire à cet axe et conserve toujours la même longueur.

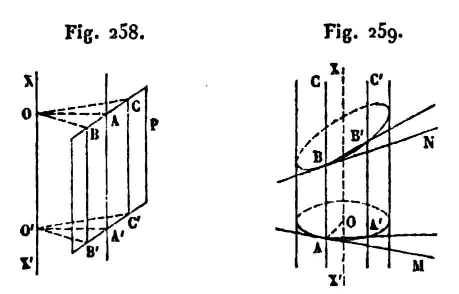
Fig. 257.

On appelle *section droite* toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe. Il résulte des considérations précédentes que *les diverses sections droites d'une même surface cylindrique sont des cir-*

conférences égales; le rayon commun de ces cercles, c'est-à-dire la distance des deux parallèles XX' et GG', est le *rayon de la surface cylindrique,* et l'on voit que *le lieu des points de l'espace situés à une distance donnée d'une droite fixe est la surface cylindrique de révolution qui a cette droite pour axe et la distance donnée pour rayon.*

435. Considérons une droite fixe XX', un plan P parallèle à cette droite, et désignons par R la distance de la droite au plan ou, ce qui revient au même, la distance de la droite à sa projection AA' sur le plan (*fig.* 258). Le lieu des points du plan P, situés à une distance donnée δ de la droite XX', se compose de deux droites BB' et CC' parallèles à XX', placées de part et d'autre de AA', et à une distance de cette droite égale au côté AB de l'angle droit d'un triangle rectangle OAB, dont l'hypoténuse OB est égale à δ, et l'autre côté OA de l'angle droit égal à R. Il en est ainsi tant que δ est plus grand que R; lorsque δ devient égal ou inférieur à R, le lieu se réduit à la droite AA' ou cesse d'exister.

D'après cela (434), un plan parallèle à l'axe d'une surface cylindrique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou n'a aucun point commun avec la surface, suivant que la distance du plan à l'axe est inférieure, égale ou supérieure au rayon de la surface.



436. Arrêtons-nous un moment sur le cas où le plan et la surface n'ont en commun qu'une génératrice AC (*fig.* 259).

Un tel plan peut être considéré comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe AC et par une génératrice voisine A'C', tourne autour de AC jusqu'à ce que A'C' vienne, en restant sur la surface cylindrique, se

confondre avec AC. Cela étant, soit BB′ une courbe quelconque tracée sur la surface cylindrique; la sécante BB′, qui unit les points B et B′ où la courbe rencontre les génératrices AC et A′C′, reste constamment dans le plan variable ACA′C′; d'ailleurs, cette sécante devient la tangente BN à la courbe BB′ lorsque la génératrice mobile A′C′ vient se confondre avec AC, c'est-à-dire lorsque le plan variable ACA′C′ atteint sa position limite; donc ce plan limite contient la tangente BN. Ainsi, le plan limite considéré renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on peut tracer sur la surface, aux points où ces courbes rencontrent la génératrice AC; on lui donne le nom de *plan tangent suivant la génératrice* AC.

La génératrice AC et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface, au point où cette courbe rencontre AC, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à la section droite AA′, on voit que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et par la génératrice de contact;* en effet, le plan tangent renferme la droite AM, qui, étant à angle droit sur AO et sur AC, est perpendiculaire à leur plan CAOX.

437. On appelle *cylindre de révolution* le corps compris entre une surface cylindrique et deux plans perpendiculaires à l'axe de cette surface, ou, en d'autres termes, la figure engendrée par la rotation d'un rectangle AA′O′O autour d'un de ses côtés OO′ (*fig.* 260).

Fig. 260.

La surface cylindrique engendrée par le côté AA′ est la *surface latérale* du cylindre; les cercles décrits par les côtés OA et O′A′ en sont les *bases*, et la droite OO′ en est la *hauteur*.

438. Deux cylindres de révolution sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons de leurs bases.

THÉORÈME.

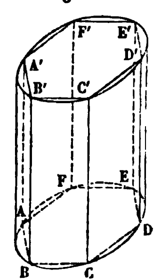
439. *L'aire latérale d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de base du cylindre par sa hauteur.*

Si l'on construit un prisme droit de même hauteur que le

cylindre donné et ayant pour base un polygone ABCDEF inscrit dans la circonférence de base du cylindre (*fig.* 261), on obtient un *prisme droit inscrit* dans le cylindre.

L'aire latérale de ce prisme droit inscrit est égale au produit du périmètre de sa base par sa hauteur (416). Or, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, le périmètre de ce polygone tend vers une limite fixe, indépendante de la loi d'inscription, et qui est la longueur de la circonférence de base du cylindre (221). D'ailleurs, la hauteur du prisme reste constamment égale à la hauteur du cylindre. Donc, à mesure qu'on fait croître le nombre des côtés de sa base, l'aire latérale du prisme droit inscrit tend vers une limite définie (217), et *c'est cette limite qu'on appelle l'aire latérale du cylindre de révolution.*

Fig. 261.



Cela posé, soient S, C, H, l'aire latérale, la circonférence de base et la hauteur du cylindre considéré; soient s et p l'aire latérale et le périmètre de la base d'un prisme droit inscrit. On a, d'après ce qu'on vient de rappeler,

$$s = p.\text{H}.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, s tend vers S et p vers C; on a donc, à la limite (217),

$$\text{S} = \text{C.H}.$$

COROLLAIRES.

440. Si R est le rayon du cylindre, on a $\text{C} = 2\pi\text{R}$, et par suite

$$\text{S} = 2\pi\text{RH}.$$

En ajoutant à cette aire latérale les aires des deux bases ou le double $2\pi\text{R}^2$ de l'aire de l'une d'elles, on obtient, pour l'aire totale T du cylindre,

$$\text{T} = 2\pi\text{RH} + 2\pi\text{R}^2 = 2\pi\text{R}(\text{R} + \text{H}).$$

441. Soient S, S', les aires latérales, T, T', les aires totales, R, R', les rayons et H, H', les hauteurs de deux cylindres de

révolution semblables. On aura (438)

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'} = \frac{R+H}{R'+H'}$$

et, par suite,

$$\frac{S}{S'} = \frac{R'H'}{RH} = \frac{R}{R'}\cdot\frac{H}{H'} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{R^2}{R'^2},$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{R(R+H)}{R'(R'+H')} = \frac{R}{R'}\cdot\frac{R+H}{R'+H'} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Donc, *les aires latérales ou totales de deux cylindres de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou comme les carrés des hauteurs.*

SCOLIE.

442. Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit ABCDEFA'B'C'D'E'F' (*fig.* 261); par une rotation autour de l'arête BB', amenons la face ABB'A' dans le prolongement de la face BCC'B'; puis, par une rotation autour de CC', amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante CDD'C', et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales du prisme soient réunies sur le plan de la dernière d'entre elles AFF'A'. Dans son mouvement autour de l'arête BB', le côté AB reste perpendiculaire à cette arête; il se place donc sur le prolongement de CB; de même, la droite ABC, formée par la réunion de AB et de BC, vient se placer sur le prolongement de DC,.... On obtient donc finalement sur le dernier plan un rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ (*fig.* 262), dont la hauteur est celle du prisme droit et dont la

Fig. 261.

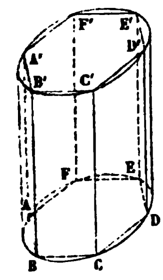
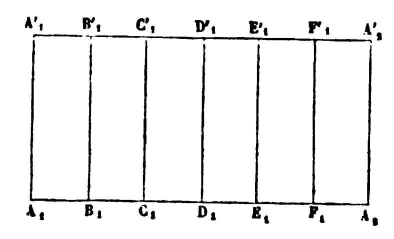


Fig. 262.



base est égale au périmètre de la base du prisme. Ce rectangl est le *développement* de l'aire latérale du prisme.

Si le nombre des faces du prisme régulier inscrit dans l cylindre croît indéfiniment, le rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ conserv la même hauteur, et la longueur de sa base A_1A_2 tend vers l circonférence de la base du cylindre. Le rectangle limite, qu a une hauteur égale à celle du cylindre et une base égale à l circonférence de la base du cylindre, est dit le *développemen* de l'aire latérale de ce cylindre.

THÉORÈME.

443. *Le volume d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

En se reportant au n° 439, on peut dire immédiatement que le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes droits inscrits, dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cylindre, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'un prisme droit inscrit au cylindre; on a (429)

$$v = b.\mathrm{H}.$$

Mais, lorsque le nombre des faces du prisme croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$\mathrm{V} = \mathrm{B.H}.$$

COROLLAIRES.

444. Si R est le rayon du cylindre considéré, on a $\mathrm{B} = \pi\mathrm{R}^2$ et, par suite,

$$\mathrm{V} = \pi\mathrm{R}^2\mathrm{H}.$$

445. Soient V, V', les volumes, R, R', les rayons, H, H', les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables; on aura (438)

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}'} = \frac{\mathrm{R}^2\mathrm{H}}{\mathrm{R}'^2\mathrm{H}'} = \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{R}'^3} = \frac{\mathrm{H}^3}{\mathrm{H}'^3}.$$

Donc, *les volumes de deux cylindres de révolution sem-*

blables sont entre eux comme les cubes des rayons ou comme les cubes des hauteurs.

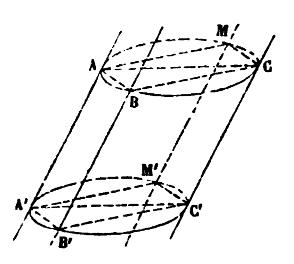
446. D'une manière générale, on appelle *surface cylindrique* (*fig.* 263) toute surface engendrée par une droite AA' astreinte à rester parallèle à une direction donnée, en s'appuyant sur une courbe fixe quelconque ABC. Cette courbe est la *directrice* de la surface, tandis que la droite mobile en est la *génératrice*.

THÉORÈME.

447. *Les sections d'une surface cylindrique par deux plans parallèles sont égales* (*fig.* 263).

En effet, soient la surface cylindrique AA' et deux sections ABC, A'B'C', faites par deux plans parallèles. Prenons quatre points A, B, C, M, sur la première section, et menons les génératrices AA', BB', CC', MM', qui rencontrent la seconde section en A', B', C', M'. Les quadrilatères ABCM, A'B'C'M', sont superposables comme bases opposées d'un prisme qua-

Fig. 263.



drangulaire. D'après cela, si l'on transporte le plan de la seconde section sur celui de la première, dès que les trois points A', B', C', seront appliqués sur leurs correspondants A, B, C, tout point M' de la seconde section coïncidera avec son correspondant M de la première.

SCOLIE.

448. Si l'on mène d'un point une perpendiculaire ou une oblique à un plan, le *pied* de cette *perpendiculaire* ou de cette *oblique* est la *projection orthogonale* ou *oblique* du point sur le plan (332).

Quand on effectue une projection oblique, la direction de droites projetantes doit rester la même pour tous les point de la figure projetée.

Cela posé, la section A′B′C′ peut être considérée comme l projection oblique de ABC, et l'on peut encore énoncer l théorème précédent de la manière suivante : *Une courbe plan quelconque est égale à sa projection oblique* (*ou orthogonale sur un plan parallèle au sien.*

449. On nomme *section droite d'une surface cylindriqu* la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices

Un *cylindre* est le corps compris entre une surface cylindrique et deux sections planes parallèles. Ces sections sont les *bases* du cylindre, et la distance de leurs plans parallèles est la hauteur de ce corps. Le cylindre est *droit* ou *oblique*, suivant que ses génératrices sont *perpendiculaires* ou *obliques* au plan de la base. Le *cylindre droit à base circulaire* n'est autre que le cylindre de révolution étudié plus haut.

THÉORÈMES.

450. *L'aire latérale d'un cylindre quelconque est égale au produit de son arête par le périmètre de sa section droite.*

Le volume d'un cylindre quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

On démontre immédiatement ces théorèmes en considérant le cylindre comme la limite d'un prisme inscrit quelconque, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

CHAPITRE II.

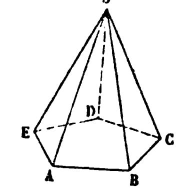
LES PYRAMIDES ET LES CONES.

I. — Théorèmes généraux relatifs à la pyramide.

451. La *pyramide* est un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant pour bases respectives les différents côtés de la face polygonale et, pour sommet commun, un point extérieur à cette face.

Ainsi, soit (*fig.* 264) un polygone ABCDE et un point S pris hors du plan de ce polygone. Le corps limité par la face polygonale ABCDE et par les faces triangulaires SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, est une pyramide.

Fig. 264.



La pyramide SABCDE a pour *base* le polygone ABCDE et pour *sommet* le point S. Sa *hauteur* est la distance du sommet S à la base ABCDE, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. Les droites SA, SB, SC, ..., sont les *arêtes latérales* de la pyramide, et la somme des faces triangulaires SAB, SBC, SCD, ... constitue son *aire latérale*.

452. La pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier dont le centre se confond avec le pied de la hauteur de la pyramide.

Les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont nécessairement égales, comme obliques s'écartant également du pied de la hauteur; ses faces latérales sont donc des triangles isocèles, tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces triangles est l'*apothème* de la pyramide régulière.

453. Suivant que la base de la pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, hexagonale*, etc.

454. Toute pyramide triangulaire ayant quatre faces, on lui donne souvent aussi le nom de *tétraèdre* (392).

D'après la définition générale de la pyramide, on voit qu'on a le droit de prendre pour base d'un tétraèdre telle face qu'on veut; le sommet du tétraèdre est alors le sommet opposé à la base choisie.

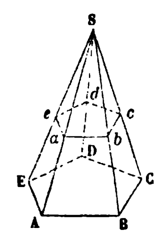
Les tétraèdres sont dans la Géométrie de l'espace ce que les triangles sont dans la Géométrie plane. On fixe la position d'un point sur un plan en le rattachant par un triangle à deux points donnés. On fixe la position d'un point dans l'espace en le rattachant par un tétraèdre à trois points donnés.

455. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes ses faces latérales, le polyèdre compris entre la section obtenue et la base de la pyramide est une *pyramide tronquée* ou un *tronc de pyramide.*

Si le plan sécant est parallèle au plan de la base de la pyramide, le tronc de pyramide est dit *à bases parallèles.*

Soit (*fig.* 265) la pyramide SABCDE. Coupons cette pyramide par le plan *abcde*, parallèle à la base ABCDE et compris entre cette base et le sommet S. La section *abcde* et la base ABCDE sont les bases du tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE *abcde*. La *hauteur* du tronc est la distance constante des plans de ses deux bases. Les segments A*a*, B*b*, C*c*, ..., sont ses *arêtes latérales*, et son *aire latérale* est la somme des trapèzes AB*ab*, BC*bc*, CD*cd*, ...

Fig. 265.



Si la pyramide considérée est régulière, le tronc de pyramide à bases parallèles qui lui correspond est un tronc de pyramide *régulier.*

THÉORÈME.

456. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base :*

1° *Ses arêtes latérales et sa hauteur sont divisées en parties proportionnelles ;*

2° *La section est un polygone semblable à la base de la pyramide.*

1° Soit (*fig.* 266) la pyramide SABCDE, coupée par le plan *abcde* parallèle à sa base. Ce plan rencontre les arêtes latérales SA, SB, SC, ..., et la hauteur SH de la pyramide aux points *a*, *b*, *c*, ..., *h*. Deux plans parallèles coupant en parties proportionnelles une série de sécantes issues d'un même point (331), on peut écrire immédiatement

Fig. 266.

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sc}{SC} = \ldots = \frac{Sh}{SH}.$$

2° Les polygones ABCDE et *abcde* ont leurs côtés deux à deux parallèles (314) et dirigés dans le même sens. Les angles homologues de ces polygones sont donc égaux (320). De plus, le parallélisme de leurs côtés entraîne la similitude des triangles SAB et S*ab*, SBC et S*bc*, ... Par suite,

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB}, \quad \frac{Sb}{SB} = \frac{bc}{BC},$$

d'où

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC}.$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \frac{de}{DE} = \frac{ea}{EA}.$$

Les polygones ABCDE et *abcde*, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, sont semblables.

COROLLAIRE.

457. La similitude des triangles SAB et S*ab* donne

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sa}{SA}$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sh}{SH}.$$

La similitude des polygones ABCDE et *abcde* donne à son tour

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

On a donc

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{sh}^2}{\overline{SH}^2},$$

c'est-à-dire que, *dans une pyramide, les sections parallèles à la base et la base elle-même sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*

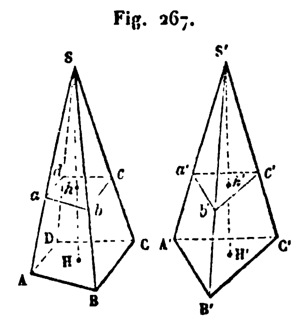
SCOLIE.

458. Si l'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, la section *abcde*, étant semblable à la base ABCDE, est aussi un polygone régulier. Comme les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont égales, il en est de même des arêtes du tronc de pyramide régulier obtenu. Les faces latérales d'un tronc de pyramide régulier sont donc des trapèzes isocèles, tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces trapèzes est l'*apothème* du tronc de pyramide.

THÉORÈME.

459. *Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales, les sections faites dans ces pyramides parallèlement à leurs bases et à la même distance de leurs sommets, sont proportionnelles aux bases des deux pyramides.*

Fig. 267.



Soient (*fig.* 267) les deux pyramides SABCD, S'A'B'C', dont les hauteurs SH et S'H' sont égales. Prenons Sh = S'h' et,

par les points h et h', menons la section $abcd$ parallèle à la base ABCD et la section $a'b'c'$ parallèle à la base A′B′C′. Nous aurons (457)

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2}, \qquad \frac{a'b'c'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'h'}^2}{\overline{S'H'}^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'hypothèse et de la construction,

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'}.$$

SCOLIE.

460. *Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections obtenues sont équivalentes.*

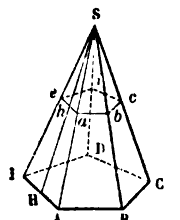
II. — Aire et volume de la pyramide.

THÉORÈME.

461. *L'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème.*

Soit (*fig.* 268) la pyramide régulière SABCDE. Les triangles isocèles et égaux qui composent sa surface latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB, BC, ..., EA, de la base de la pyramide et, pour hauteur, son apothème SH (452), la somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire demandée, a pour mesure la moitié du produit de la somme des côtés AB, BC, ..., EA, par l'apothème SH, c'est-à-dire la moitié du produit du périmètre de la base de la pyramide par son apothème.

Fig. 268.



THÉORÈME.

462. *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de hauteurs égales sont équivalentes.*

Soient (*fig.* 269) SABC et S′A′B′C′ les deux pyramides proposées. Si leurs bases ABC, A′B′C′, sont placées sur un même plan, leurs sommets S et S′ seront à la même distance du plan

commun des deux bases, puisque ces pyramides ont même hauteur.

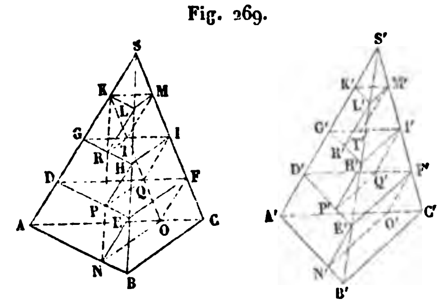


Fig. 269.

Divisons l'arête SA en un certain nombre de parties égales aux points D, G, K, et par ces points menons des plans parallèles au plan commun des bases. Nous déterminerons ainsi dans la première pyramide les sections DEF, GHI, KLM, et dans la seconde pyramide les sections correspondantes D'E'F', G'H'I', K'L'M'.

Comme les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections faites dans ces pyramides par un même plan parallèle au plan commun des bases sont équivalentes (460). La section DEF est équivalente à la section D'E'F', la section GHI à la section G'H'I',....

Construisons maintenant un prisme sur la section DEF comme base et sur la division DA comme arête. Il suffit pour cela (394) de mener par les points E et F, jusqu'à la rencontre des arêtes AB et AC, des parallèles EN et FO à DA ou SA, et de tracer la droite NO. En agissant de même pour les autres sections GHI, KLM, et les autres divisions GD, KG, on inscrira dans la pyramide SABC un nombre de prismes égal à celui des sections primitivement obtenues, et tous ces prismes inscrits auront pour hauteur la distance constante de deux plans sécants consécutifs.

En opérant d'une manière identique, on inscrit dans la seconde pyramide S'A'B'C' les prismes D'E'F'A'N'O', G'H'I'D'P'Q', ..., qui sont en même nombre que ceux inscrits dans la pyramide SABC.

Les prismes de même rang dans les deux pyramides sont équivalents comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales (430). Le prisme GHIDPQ, par exemple, est équivalent au prisme G'H'I'D'P'Q', parce que les deux sections

correspondantes GHI, G'H'I', sont équivalentes, et parce que les hauteurs de ces prismes représentent toutes deux la $n^{ième}$ partie de la hauteur commune des pyramides données, si l'on a divisé l'arête SA en n parties égales. Par suite, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC est équivalente à la somme des prismes inscrits dans la pyramide S'A'B'C'.

Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC a pour limite le volume de cette pyramide. En effet, les points K, R, P, N, sont en ligne droite, puisque les droites SK, LR, HP, EN, sont égales et parallèles, et la droite KN est parallèle à SB. De même, les points K, T, Q, O, sont sur une droite KO parallèle à SC. Le plan KNO est donc parallèle à la face SBC, et le polyèdre KNOSBC est un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la hauteur, distance des deux plans KNO, SBC, est au plus égale à SK = AD. La limite de AD, quand on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, est zéro. Donc la hauteur du tronc de pyramide KNOSBC tend vers zéro, et il en est de même, par conséquent, du volume de ce tronc. Mais ce volume est évidemment supérieur à la différence qui existe entre la pyramide SABC et la somme des prismes qui y sont inscrits. Cette différence s'annule donc à la limite.

On prouverait de même que la différence entre la pyramide S'A'B'C' et la somme des prismes qui y sont inscrits a zéro pour limite.

Les deux sommes de prismes étant constamment équivalentes, leurs limites (216), qui représentent les volumes des deux pyramides SABC, S'A'B'C', sont égales.

THÉORÈME.

463. *Le volume d'une pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

1° Soit (*fig.* 270) la pyramide triangulaire EABC. Par les sommets A et C menons les droites AD et CF, parallèles à l'arête BE, jusqu'à leurs rencontres D et F avec le plan mené par le sommet E parallèlement à la base ABC de la pyramide. Le polyèdre ABCDEF sera un prisme triangulaire ayant même base et même hauteur que la pyramide proposée.

Si l'on fait passer un plan par les trois sommets D, E, C, le prisme triangulaire ABCDEF se trouve décomposé en trois

pyramides triangulaires EABC, EDCA, EDCF. La première est la pyramide donnée. Les deux autres sont équivalentes (462), car elles ont même hauteur et leurs bases sont équivalentes comme moitiés du parallélogramme ACFD. Or, si l'on prend

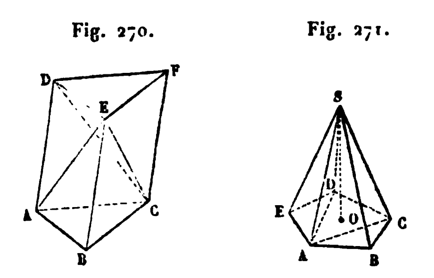


Fig. 270. Fig. 271.

la face DEF pour base de la pyramide EDCF, son sommet est le point C. Cette pyramide a donc même base et même hauteur que le prisme ABCDEF; elle est donc équivalente à la pyramide EABC.

Les trois pyramides dont se compose le prisme ABCDEF étant équivalentes, chacune d'elles est le tiers de ce prisme. Or, le volume du prisme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; le volume de la pyramide EABC a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Soit (*fig.* 271) la pyramide polygonale SABCDE. On la décompose en pyramides triangulaires en faisant passer des plans par l'arête SA et chacune des arêtes SC, SD. Ces pyramides triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base de la pyramide donnée, et leur hauteur commune est celle de cette pyramide. La somme de leurs mesures ou la mesure de la pyramide SABCDE sera donc égale au tiers du produit de sa base ABCDE par sa hauteur SO.

COROLLAIRES.

464. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'une pyramide, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

Donc, *toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. Deux pyramides quelconques de bases*

équivalentes et de même hauteur sont équivalentes. Deux pyramides sont entre elles comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur. Deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

465. Quand un tétraèdre est régulier, son volume s'exprime en fonction de son arête a.

Un tétraèdre régulier est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux. Sa base a donc pour expression (250)

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sa hauteur est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour second côté de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit au triangle de base, c'est-à-dire $\frac{a}{\sqrt{3}}$, et pour hypoténuse l'arête a du tétraèdre. Cette hauteur est, par suite,

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On a donc, pour le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

SCOLIE.

466. Pour évaluer le volume d'un polyèdre, il suffit de décomposer ce polyèdre en pyramides, de calculer les volumes de ces pyramides et de faire la somme des nombres obtenus. Plus généralement, il suffit de décomposer le polyèdre proposé en parties telles, que l'expression de leur volume soit connue.

Pour opérer la décomposition en pyramides, on peut choisir un point quelconque dans l'espace et le joindre à tous les sommets du polyèdre. Les bases des différentes pyramides formées sont les faces du polyèdre, et leurs hauteurs sont les perpendiculaires abaissées du point choisi sur ces faces. Le volume du polyèdre est la somme arithmétique ou algébrique des volumes des pyramides obtenues, suivant que leur

sommet commun est lui-même intérieur ou extérieur au polyèdre.

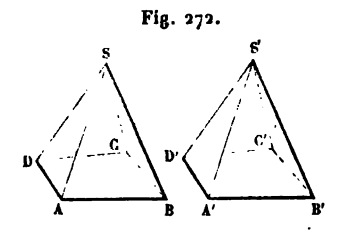
Souvent, on effectue la décomposition en prenant pour centre l'un des sommets du polyèdre, c'est-à-dire en menant toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polyèdre un point à égale distance de toutes ses faces, les pyramides qui le composeront auront alors pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une des faces, et *le volume du polyèdre aura pour expression le tiers du produit de son aire par cette perpendiculaire.*

THÉORÈME.

467. *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées* (*fig.* 272).

Fig. 272.



Soient l'angle dièdre AB égal à l'angle dièdre A'B', la base ABCD égale à la base A'B'C'D', la face ASB égale à la face A'S'B'. Portons la pyramide S'A'B'C'D' sur la pyramide SABCD, de manière que les deux bases égales coïncident. L'angle dièdre A'B' étant égal à l'angle dièdre AB, et les parties égales étant disposées de la même manière dans les deux pyramides, la face A'S'B' tombera dans le plan de la face ASB. L'angle S'A'B' étant égal à l'angle SAB, l'arête A'S' prendra la direction de l'arête AS, et le point S' tombera au point S, puisqu'on a A'S' = AS. Les deux pyramides, ayant mêmes sommets, coïncideront et seront égales.

SCOLIE.

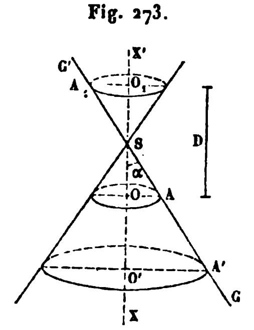
468. Si l'on désigne par n le nombre des côtés de l'une des bases des deux pyramides, l'égalité des bases de ces pyramides exigera $2n-3$ conditions (66). L'égalité des angles dièdres AB

et A'B' compte pour une condition. Enfin, l'égalité des triangles SAB, S'A'B', n'exige plus que deux conditions, puisqu'on a AB = A'B' d'après l'égalité des bases. Ainsi, l'égalité des deux pyramides exige en tout $2n$ conditions.

III. — Notions relatives au cône.

469. On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite GSG' tournant autour d'une droite fixe XSX', qu'elle rencontre en un point S, et à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 273).

Fig. 273.



La droite fixe XX' reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG' celui de *génératrice* ou d'*arête*. Le point S, qu'on nomme *sommet*, divise la surface conique en deux parties indéfinies qu'on appelle *nappes*.

Le lieu géométrique des droites qui, passant par un point donné S, font un angle donné α avec une droite donnée D, est une surface conique de révolution ayant le point S pour sommet et la parallèle menée à D par le point S pour axe.

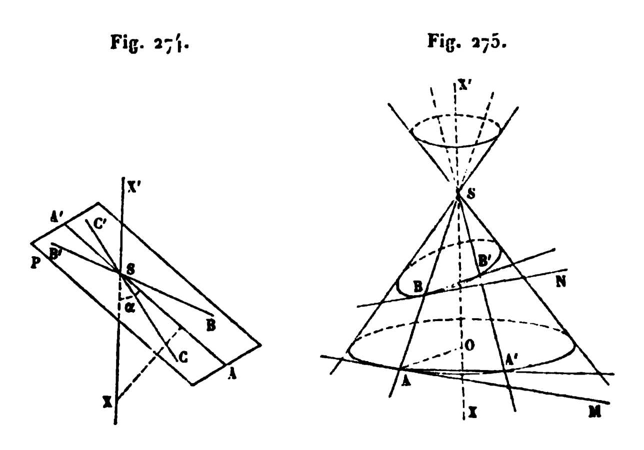
Un point quelconque A de la droite GG' décrit une circonférence dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à l'axe (434). Par suite, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des circonférences dont le lieu des centres est l'axe lui-même. Quant aux rayons OA, O'A', de ces cercles, la similitude des triangles SOA, SO'A', prouve qu'ils sont proportionnels aux distances SO, SO', de leurs plans au sommet, ou encore aux portions correspondantes SA, SA', de la génératrice GSG'. Leurs aires sont donc proportionnelles aux carrés des mêmes lignes.

470. Considérons une droite fixe XSX', un plan P passant par un point S de cette droite, et désignons par α l'angle de la droite et du plan, c'est-à-dire l'angle aigu de la droite SX avec sa projection SA sur ce plan (*fig.* 274). Par le point S, on peut mener dans le plan P (341) deux droites SB, SC, faisant avec SX un angle aigu donné ω. Ces deux droites sont sy-

métriques par rapport à AA′. Il en est ainsi tant que ω est supérieur à α; lorsque ω devient égal ou inférieur à α, les deux droites se réduisent à la droite unique SA ou cessent d'exister.

D'après cela, un plan passant par le sommet d'une surface conique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou enfin n'a de commun avec la surface que le sommet, suivant que l'inclinaison du plan sur l'axe est inférieure, égale ou supérieure à l'angle aigu de la génératrice avec l'axe, c'est-à-dire au *demi-angle au sommet* de la surface conique.

Fig. 274. Fig. 275.



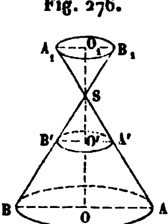
Dans le cas où le plan donné n'a de commun avec la surface qu'une seule génératrice SA (*fig.* 275), on peut le considérer comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe SA et par une génératrice voisine SA′, tourne autour de SA jusqu'à ce que SA′ vienne se confondre avec SA. On voit dès lors, par un raisonnement identique à celui qu'on a fait pour le cylindre (436), que ce plan renferme les tangentes AM, BN, ..., à toutes les courbes AA′, BB′, ..., que l'on peut tracer sur la surface, aux points A, B, ..., où la génératrice SA rencontre ces courbes. On donne à ce plan le nom de *plan tangent suivant la génératrice* SA.

La génératrice SA et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface au point où cette courbe rencontre SA suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à une section AA′ perpendiculaire à l'axe, on voit, comme pour le cy-

lindre, que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et la génératrice de contact.*

471. On nomme *cône de révolution* le corps engendré par la rotation d'un triangle rectangle SOA autour de l'un des côtés SO de l'angle droit SOA (*fig.* 276).

Fig. 276.



La surface conique engendrée par l'hypoténuse SA est la *surface latérale* du cône; le cercle décrit par le côté OA est la *base*, la droite SO est la *hauteur*, et l'hypoténuse SA est le *côté* ou l'*apothème* de ce cône.

472. Si l'on coupe une surface conique de révolution (*fig.* 276) par deux plans AB, A'B', perpendiculaires à l'axe et situés d'un même côté du sommet S, on obtient un volume terminé par une portion de la surface conique et par les deux cercles AB, A'B'. Ce corps, que l'on nomme *tronc de cône de révolution à bases parallèles*, est la différence des deux cônes SAB, SA'B'. On peut encore le considérer comme engendré par la rotation du trapèze rectangle AOO'A' autour du côté OO'. La droite OO' est la *hauteur* du tronc; les cercles AB, A'B' en sont les bases, et AA' en est le *côté* ou l'*apothème.*

473. En construisant une pyramide de même sommet que le cône et ayant pour base un polygone inscrit au cercle de base du cône, on obtient une pyramide inscrite au cône (*fig.* 277). Si le polygone de base est régulier, la pyramide inscrite est régulière.

On appelle *aire latérale d'un cône* la limite de l'aire latérale d'une pyramide régulière inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment. On légitime cette définition en montrant que la limite considérée existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la base de la pyramide tendent vers zéro. Le raisonnement est analogue à celui qu'on a employé pour le cylindre (439); seulement, tandis que la hauteur du prisme droit inscrit au cylindre reste fixe, l'apothème de la pyramide régulière inscrite au cône est variable et tend vers l'apothème du cône.

On voit, comme dans le cas du cylindre, que le volume d'un cône de révolution est la limite des volumes des pyra-

mides inscrites dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.

474. Deux cônes de révolution sont dits *semblables*, lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons des bases.

THÉORÈME.

475. *L'aire latérale d'un cône de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème.*

L'aire latérale du cône est la limite des aires latérales des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, A, l'aire latérale, la circonférence de base et l'apothème du cône considéré, et s, p, a, l'aire latérale, le périmètre de la base et l'apothème d'une pyramide régulière inscrite. On a (461)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, s tend vers S, p vers C, a vers A; on a donc, à la limite,

$$S = C \cdot \frac{1}{2} A.$$

476. Si R est le rayon de la base du cône, on a $C = 2\pi R$ et, par suite,

$$S = \pi R A.$$

En ajoutant la base πR^2, on a, pour l'aire totale,

$$T = \pi R A + \pi R^2 = \pi R(A + R).$$

477. En raisonnant comme au n° 441, on reconnaît que *les aires latérales ou totales de deux cônes de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou des apothèmes ou des hauteurs.*

SCOLIE.

478. Considérons un cône de révolution et une pyramide régulière inscrite SABCDEF (*fig.* 277); par une rotation autour

de l'arête SB, amenons la face SAB dans le prolongement de la face SBC; puis, par une rotation autour de SC, amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante SCD, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces

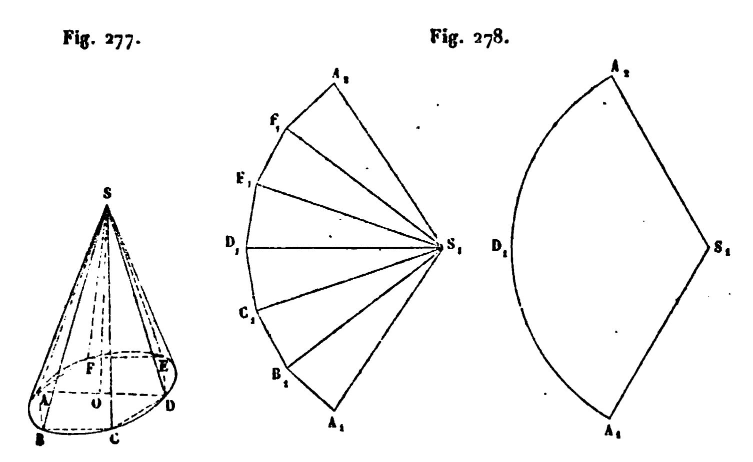


Fig. 277. Fig. 278.

latérales de la pyramide soient réunies dans le plan de la dernière d'entre elles FSA. On obtiendra ainsi un secteur polygonal régulier $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ (*fig.* 278), ayant pour rayon l'arête de la pyramide régulière, c'est-à-dire l'apothème du cône, et pour base une ligne brisée régulière $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ égale au périmètre de la base de la pyramide.

Si le nombre des faces de la pyramide régulière inscrite dans le cône croît indéfiniment, le secteur $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ conserve le même rayon, et la base dégénère en un arc de cercle ayant une longueur égale à celle de la circonférence du cône. Le secteur circulaire $S_1A_1D_1A_2$ obtenu est dit le *développement* de l'aire latérale du cône. Il est aisé de calculer le nombre n de degrés contenus dans l'angle $A_1S_1A_2$ de ce secteur circulaire. A étant l'apothème du cône et R le rayon de sa base, on a

$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arc}\,A_1A_2}{2\pi S_1A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{d'où} \quad n = 360^\circ \frac{R}{A}.$$

Pour $A = 2R$, on a $n = 180^\circ$, de sorte que le développement est un demi-cercle. Le cône correspondant est dit *équilatéral;* sa section par un plan passant par l'axe SO est un triangle équilatéral SAD.

THÉORÈME.

479. *Le volume d'un cône de révolution a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Le volume du cône est la limite des volumes des pyramides inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cône, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'une pyramide inscrite dans ce cône. On a (463)

$$v = \frac{1}{3} bH.$$

Mais, lorsque le nombre des faces de la pyramide croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

COROLLAIRES.

480. Si R est le rayon de la base du cône, on a $B = \pi R^2$ et, par suite,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

On voit, comme au nº 445, que *les volumes de deux cônes de révolution semblables sont dans le rapport des cubes des hauteurs ou des rayons des bases.*

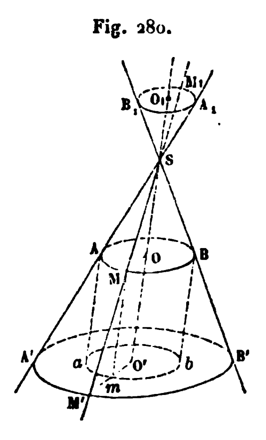
481. Lorsqu'un rectangle ABCD tourne autour de l'un de ses côtés AB (*fig.* 279), le triangle ABC engendre un cône dont le volume est le tiers (443, 479) de celui du cylindre engendré par le rectangle ABCD. Par suite, le volume engendré en même temps par le triangle ADC est les deux tiers du même cylindre. Cette remarque nous sera utile plus tard.

Fig. 279.

482. D'une manière générale, on appelle *surface conique* toute surface engendrée par une droite mobile ASA_1 (*fig.* 280), qui passe constamment par un point fixe S en s'appuyant sur une courbe fixe AMB, plane ou gauche. Cette courbe est la

directrice de la surface, tandis que la droite mobile en est la *génératrice*. Le point S est le *sommet* de la surface conique, qu'il divise en deux nappes SAB, SA_1B_1.

Fig. 280.



THÉORÈME.

483. *Les sections d'une surface conique, par deux plans parallèles, sont semblables.*

En effet, soient la surface conique SAMB et deux sections AMB, A'M'B', faites par deux plans parallèles (*fig.* 280). Menons par le sommet une droite quelconque SOO' qui rencontre les deux plans en O et O', et projetons, parallèlement à SOO', la première section AMB sur le plan de la seconde; cette projection *amb* étant égale à AMB (448), la proposition sera démontrée si nous prouvons que *amb* et A'M'B' sont homothétiques (160). Or, SMM' étant une génératrice quelconque de la surface, les droites OM et O'M' sont parallèles, et l'on a

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{SO}{SO'},$$

ou, en observant que la projection m de M est située sur O'M' et que $O'm = OM$,

$$\frac{O'm}{O'M'} = \frac{SO}{SO'}.$$

Le second membre de cette égalité ayant une valeur indépen-

dante de la position du point M′ sur la courbe A′M′B′, le courbes *amb* et A′M′B′ sont homothétiques.

484. Un *cône* est le corps compris sous une surface coniqu limitée d'une part à son sommet et de l'autre à une sectio plane, qui prend le nom de *base;* la *hauteur* du cône est l distance du sommet au plan de la base. Un cône à *base circu laire* est *droit* ou *oblique* suivant que la projection orthogo nale du sommet sur le plan de la base coïncide ou non ave le centre du cercle. Le *cône circulaire droit* n'est autre qu le cône de révolution étudié précédemment.

THÉORÈME.

485. *Le volume d'un cône quelconque est égal au tiers d produit de sa base par sa hauteur.*

On arrive à ce théorème en considérant le cône comme l limite d'une pyramide inscrite, lorsque les côtés de la bas polygonale tendent vers zéro.

CHAPITRE III.

LES CORPS TRONQUÉS.

I. — Aires et volumes des corps tronqués.

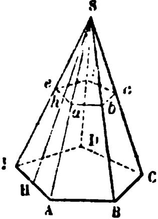
THÉORÈME.

486. *L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses deux bases par son apothème.*

Soit (*fig.* 281) le tronc de pyramide régulier ABCDE*abcde*. Les trapèzes isocèles qui composent son aire latérale étant tous égaux entre eux (458), il suffit de multiplier l'aire de l'un d'eux AE*ae* par leur nombre *n*. On obtient ainsi

$$n\frac{\mathrm{AE}+ae}{2}\,\mathrm{H}h \quad \text{ou} \quad \frac{n.\mathrm{AE}+n.ae}{2}\,\mathrm{H}h.$$

Fig. 281.



Les produits *n*.AE et *n*.*ae* représentant les périmètres des deux bases du tronc de pyramide, l'énoncé est justifié.

THÉORÈME.

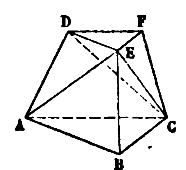
487. *Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

1° Soit (*fig.* 282) le tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCDEF.

Les plans AEC, DEC, le partagent en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA, dont nous désignerons les volumes respectifs par P, P′, P″.

La première EABC a pour base la base inférieure ABC du tronc de pyramide, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet E est un sommet de la base supérieure.

Fig. 282.



Si l'on prend le point C pour sommet, la deuxième pyramide EDCF a pour base DEF la base supérieure du tronc, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet C se confond avec un sommet de la base inférieure.

Pour évaluer la troisième pyramide EDCA, comparons-la successivement aux deux autres.

Si l'on prend le point C comme sommet commun des deux pyramides EABC, EDCA, elles ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases EAB, ADE; mais ces triangles, dont la hauteur est aussi la même, sont entre eux comme leurs bases AB et DE, et l'on peut écrire

$$\frac{P}{P''} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad (456, 2^o).$$

De même, si l'on prend le point E comme sommet commun des deux pyramides EDCA, EDCF, elles ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases DAC, CDF, ou comme les bases AC et DF de ces triangles, qui ont aussi même hauteur. On a, par suite,

$$\frac{P}{P''} = \frac{P''}{P'}.$$

Il en résulte

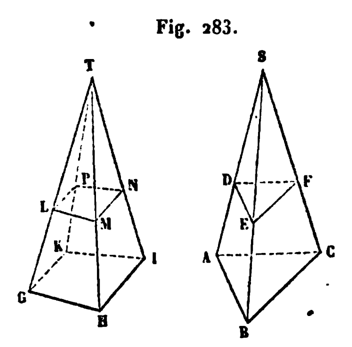
$$P''^2 = PP'.$$

Le volume de la troisième pyramide est donc la moyenne proportionnelle des volumes des deux premières, c'est-à-dire que la pyramide EDCA équivaut à une pyramide ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la moyenne proportionnelle entre ses deux bases.

2° Soit (*fig.* 283) le tronc de pyramide polygonal GHIKLMNP. Ce tronc a été obtenu en coupant la pyramide TGHIK par un plan parallèle à sa base. Prenons un point S à la même hau-

teur que le point T au-dessus de la base GHIK, et construisons dans le plan de cette base un triangle ABC qui lui soit équivalent. La pyramide triangulaire SABC sera équivalente à la pyramide polygonale TGHIK (464). Si l'on prolonge le plan

Fig. 283.



LMNP jusqu'à la pyramide SABC, il déterminera dans cette pyramide une section DEF équivalente à la section LMNP (460); les deux pyramides SDEF, TLMNP, seront donc aussi équivalentes. Par suite, le tronc polygonal GHIKLMNP, différence des pyramides TGHIK, TLMNP, sera équivalent au tronc triangulaire ABCDEF, différence des pyramides SABC, SDEF. Et comme le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases, il en sera de même du tronc de pyramide polygonal qui a même hauteur et des bases équivalentes.

COROLLAIRES.

488. En désignant par V, B, b, h, les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$V = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}h\sqrt{Bb}$$

ou

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}). \quad (1)$$

Souvent, au lieu de donner les deux bases B et b, on donne l'une d'elles B et le rapport $\frac{a}{A}$ de deux côtés homologues de

Pour évaluer la deuxième pyramide EDCF, cherchons son rapport à la pyramide EABC. Si l'on prend pour sommets des pyramides EDCF, EABC, les points D et A, leurs bases sont les triangles ECF, ECB, et leur hauteur est la même, puisque l'arête DA est parallèle à la face EBCF. Ces pyramides sont donc entre elles comme les triangles ECF, ECB. D'ailleurs ces triangles, compris entre les parallèles EB, FC, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases FC, EB. Donc, les pyramides EDCF, EABC, sont entre elles comme les arêtes FC et EB ou comme les hauteurs FL et EH, évidemment proportionnelles à ces arêtes en vertu de la similitude des triangles rectangles EBH, FCL.

Pour évaluer la troisième pyramide EDCA, cherchons son rapport à la pyramide EDCF. Ces deux pyramides, ayant même hauteur, sont entre elles comme leurs bases DCA, DCF, ou comme les arêtes DA et FC, puisque les triangles DCA, DCF, compris entre les parallèles DA, FC, ont même hauteur. Donc les pyramides EDCA, EDCF, sont entre elles comme les hauteurs DK et FL, proportionnelles aux arêtes DA et FC.

Les trois pyramides EABC, EDCF, EDCA, étant proportionnelles aux hauteurs EH, FL, DK, et le volume de la première étant

$$\frac{\text{ABC.EH}}{3},$$

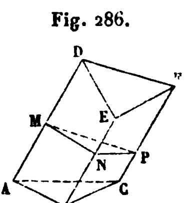
les volumes des deux autres sont respectivement

$$\frac{\text{ABC.FL}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\text{ABC.DK}}{3}.$$

SCOLIE.

492. Si le tronc considéré est un tronc de prisme droit, les hauteurs EH, FL, DK, se confondent avec les arêtes latérales EB, FC, DA, et la base ABC avec la section droite du tronc. Le volume du corps tronqué a donc alors pour mesure *le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes latérales.*

Fig. 286.



On étend facilement cet énoncé au cas du tronc de prisme oblique. Soit (*fig.* 286) le tronc de prisme oblique ABCDEF. Menons sa section droite MNP. Elle le par-

age en deux troncs de prisme MNPABC, MNPDEF, qui sont droits relativement à cette section, considérée comme base. Le premier a pour mesure

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{MA}+\text{NB}+\text{PC}}{3}\right);$$

le second,

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{MD}+\text{NE}+\text{PF}}{3}\right).$$

Le tronc de prisme oblique ABCDEF, somme des deux troncs de prismes droits MNPABC, MNPDEF, a donc pour mesure la somme de leurs mesures, c'est-à-dire

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{AD}+\text{BE}+\text{CF}}{3}\right).$$

COROLLAIRES.

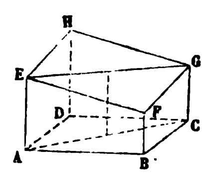
493. En désignant par V, B, β, h, h', h'', a, a', a'', les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de prisme triangulaire, sa base et sa section droite, les hauteurs des sommets de sa base supérieure au-dessus du plan de sa base inférieure et ses arêtes latérales, on a les formules

(1) $$V = B\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right),$$

(2) $$V = \beta\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right).$$

494. Si l'on représente par A et a, B et b, les arêtes latérales, opposées deux à deux, d'un parallélipipède tronqué quelconque (*fig.* 287) et par S sa section droite, les volumes v et v' des deux prismes triangulaires tronqués qui le composent sont

Fig. 287.



$$v=\frac{S}{2}\,\frac{A+a+b}{3},\quad v'=\frac{S}{2}\,\frac{A+a+B}{3};$$

par suite, son volume $V=v+v'$ a pour expression

$$V=S\,\frac{2(A+a)+(B+b)}{6}.$$

Mais, si l'on représente par δ la longueur de la droite qui

unit les centres des deux bases du tronc, on a

$$A + a = B + b = 2\delta,$$

d'où

$$V = S.\delta.$$

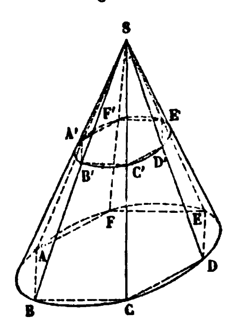
Le volume d'un parallélipipède tronqué quelconque a donc pour mesure le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de deux arêtes latérales opposées.

THÉORÈME.

495. *L'aire latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences de ses bases par son apothème.*

L'aire latérale du tronc de cône ADD'A' (*fig.* 288) est la différence des aires latérales des cônes SAD, SA'D'. Cela posé, inscrivons dans le cône SAD une pyramide régulière SABCDEF; le plan A'D' de la base supérieure du tronc de cône décompose cette pyramide en deux parties qui sont, l'une, SA'B'C'D'E'F', une pyramide régulière inscrite dans le cône SA'D', l'autre, ABCDEFA'B'C'D'E'F', un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône ADD'A'. Or, les aires latérales des cônes SAD, SA'D', étant les limites des aires latérales des pyramides SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', lorsque le nombre commun de leurs faces croît indéfiniment, l'aire latérale du tronc de cône sera égale à la limite de l'aire latérale du tronc de pyramide régulier inscrit. Soient s, a, p, p', l'aire latérale, l'apothème et les périmètres des bases du tronc de pyramide; soient de même S, A, C, C', l'aire latérale, l'apothème et les circonférences des bases du tronc de cône; on aura (486)

Fig. 288.



$$s = \frac{1}{2}(p + p')a.$$

Mais, à la limite, lorsque les côtés du polygone ABCDEF tendent vers zéro, s tend vers S, p vers C, p' vers C', a vers A, et l'on a

$$S = \frac{1}{2}(C + C')A.$$

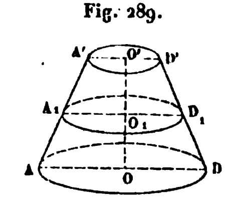
COROLLAIRES.

496. Si R et R′ sont les rayons des bases du tronc, on a $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi R'$ et, par suite,

$$S = \pi(R + R')A.$$

497. Par le milieu A_1 du côté AA′ (*fig.* 289), menons un plan parallèle aux bases du tronc de cône; le rayon A_1O_1 de la section circulaire déterminée par ce plan est parallèle (314) aux rayons AO, A′O′, des bases et, par suite (85), égal à la demi-somme de ces rayons. Donc la circonférence A_1D_1 est la moyenne arithmétique des circonférences de base, et l'on peut dire que *l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution a pour mesure le produit de l'apothème par la circonférence équidistante des deux bases.*

Fig. 289.



Ce dernier énoncé s'applique aussi au cylindre et au cône; car la circonférence équidistante des bases est égale, dans le cylindre, à celle de la base, et, dans le cône, à la moitié de celle de la base.

THÉORÈME.

498. *Le volume d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles est équivalent à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases, le premier la base inférieure, le deuxième la base supérieure, et le troisième la moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.*

Considérons, comme au n° 495, un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône. Les volumes des deux pyramides, dont ce tronc de pyramide est la différence, ayant respectivement pour limites les volumes des deux cônes dont le tronc de cône proposé est la différence, on aura le volume de ce tronc de cône en prenant la limite du volume du tronc de pyramide. D'après cela, soient V, b, B, H, le volume, les bases et la hauteur du tronc de cône, v_1, b_1, B_1, le volume et les bases du tronc de pyramide inscrit; on aura (488)

$$v_1 = \frac{H}{3}\left(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1}\right).$$

Mais, lorsque le nombre des faces du tronc de pyramide croît indéfiniment, v_1 tend vers V, b_1 vers b, B_1 vers B, et l'on a, à la limite, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb}),$$

dont l'énoncé ci-dessus n'est que la traduction en langage ordinaire.

COROLLAIRES.

499. Si R est le rayon de la base inférieure B, et r le rayon de la base supérieure b, on a $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$ et, par suite,

$$(1) \qquad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

500. En coupant une surface conique de révolution par deux plans AB, A_1B_1, perpendiculaires à l'axe, mais situés de part et d'autre du sommet S (*fig.* 290), on obtient un corps qui est la somme des deux cônes SAB, SA_1B_1. Il convient de donner encore à ce corps le nom de *tronc de cône;* mais, pour le distinguer du tronc de cône proprement dit, nous l'appellerons *tronc de cône de seconde espèce* (490).

Fig. 290.

Le raisonnement qui précède s'applique au tronc de seconde espèce; il faut seulement substituer le mot *somme* au mot *différence* et remarquer que, le tronc de pyramide inscrit correspondant étant de seconde espèce, le radical qui figure dans l'expression de v_1 doit avoir le signe — (490). On obtient ainsi, pour le volume du tronc de cône de seconde espèce, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b - \sqrt{Bb}) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 - Rr).$$

501. Parfois, dans la pratique, notamment pour le *cubage des troncs d'arbres* non équarris, les bases diffèrent assez peu pour qu'on puisse assimiler sans inconvénient le cône tronqué à un cylindre ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la section faite dans le tronc à égale distance des deux bases. L'erreur commise est d'ailleurs facile à évaluer;

en retranchant le volume cylindrique

$$(2) \qquad v = \pi H \left(\frac{R+r}{2}\right)^2$$

du cône tronqué dont le volume est donné par la formule (1), on trouve

$$V - v = \frac{1}{3}\pi H \left(\frac{R-r}{2}\right)^2.$$

L'erreur commise est donc égale au volume d'un cône ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour rayon de sa base la demi-différence des rayons des bases du tronc.

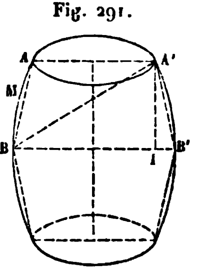
Quand on veut appliquer la formule (2) au cubage d'un tronc d'arbre, il convient de la préparer de la manière suivante. Soit C la longueur de la circonférence moyenne, que l'on évalue au moyen d'un cordon métrique; le rayon de cette circonférence sera $\frac{C}{2\pi}$, et, par suite, le volume cherché

$$v = \frac{\pi HC^2}{4\pi^2} = \frac{HC^2}{4\pi}.$$

502. La question du *jaugeage des tonneaux* se rattache à la mesure du tronc de cône.

En considérant le tonneau (*fig.* 291) comme la somme de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base, on aurait la formule

Fig. 291.



$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

dans laquelle H est la hauteur totale du double tronc, r le rayon du *fond* AA', et R le rayon de la grande base BB', à laquelle on donne le nom de *bouge*. Mais cette formule donne un résultat trop faible, car on néglige deux fois le volume engendré par la rotation du segment AMB compris entre la droite AB et l'arc AMB. En remplaçant, dans la parenthèse, Rr par R^2, on obtient une formule

$$V = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2),$$

qui donne au contraire un résultat trop fort. La formule qui

s'adapte le mieux à la forme générale des tonneaux est la suivante (¹) :

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left[2R^2 + r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right].$$

Enfin, nous signalerons la formule

$$V = 0,525.D^3,$$

qui permet de jauger les tonneaux ordinaires d'une manière très rapide et suffisamment approchée, en mesurant seulement la diagonale $BA' = D$ qui va du trou B ou *bonde* au point le plus bas A′ de l'un des fonds. Les *jauges diagonales* sont surtout employées dans les octrois. En calculant d'avance, à l'aide de la formule précédente, les valeurs de V qui répondent aux diverses valeurs de D et inscrivant ces valeurs sur la tige de fer que l'on introduit dans le tonneau, on obtient la capacité du fût par une simple lecture.

Pour comparer cette dernière formule avec la précédente, il suffit d'observer que l'on a, dans le triangle rectangle BA′I,

$$\overline{BA'}^2 = \overline{A'I}^2 + \overline{BI}^2 \quad \text{ou} \quad D^2 = \frac{1}{4}H^2 + (R + r)^2.$$

II. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

503. *Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles et pour faces latérales des trapèzes ou des triangles, est exprimé par la formule*

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

dans laquelle H *désigne la distance des deux plans parallèles,* B *la base inférieure du polyèdre,* B′ *la base supérieure et* B″ *la section équidistante des deux bases* (²).

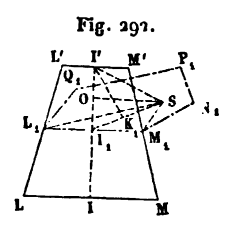
En effet, soient $L_1M_1N_1P_1Q_1$ la section équidistante des bases (*fig.* 292) et S un point pris à volonté dans l'intérieur de cette section. Le polyèdre peut être décomposé en pyramides ayant pour bases ses diverses faces et

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XLVIII, p. 96.

(²) *Voir* Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4ᵉ édition, 1879.

pour sommet commun le point S. Les volumes des deux pyramides qui reposent sur les bases B et B' ont évidemment pour mesures $\frac{BH}{6}$, $\frac{B'H}{6}$, et il reste à évaluer les volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales. Soit donc LMM'L' une quelconque de ces faces, par exemple celle qui répond au côté L_1M_1 du polygone $L_1M_1N_1P_1Q_1$; pour raisonner d'une manière générale, nous supposerons que cette face soit un trapèze (si c'était un triangle, l'un des côtés parallèles LM ou L'M' serait nul). Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan de la face LMM'L'; dans ce plan, menons par le point O la perpendiculaire $I'OI_1$ à L_1M_1; la droite SI_1 sera perpendiculaire à L_1M_1; enfin, menons $I'K_1$ perpendiculaire au plan de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$: $I'K_1$ sera la moitié de la distance H des bases du polyèdre. Cela posé, la pyramide SLMM'L' a pour mesure

Fig. 292.



$$L_1M_1 . 2I'I_1 . \frac{1}{3}SO.$$

Or, le produit $I'I_1 . SO$ peut être remplacé par le produit $SI_1 . I'K_1$, qui, comme lui, exprime le double de l'aire du triangle $I'I_1S$; on a donc, pour le volume de la pyramide,

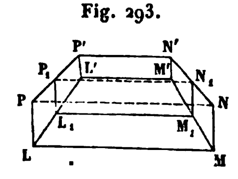
$$\frac{H}{6} . 2L_1M_1 . SI_1 = \frac{H}{6} . 4SL_1M_1.$$

Par suite, pour avoir la somme des volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales du polyèdre, il faut multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois la somme des triangles qui ont S pour sommet commun et pour bases les côtés de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois l'aire B'' de cette section.

Application.

504. Les amas de pierres, les fossés ou cuvettes établies de distance en distance le long des routes, les tombereaux, etc., sont terminés haut et bas par deux rectangles parallèles LMNP, L'M'N'P', et latéralement par quatre trapèzes LMM'L', MNN'M', NPP'N', PLL'P'. Exprimons le volume d'un pareil corps en fonction de la distance h des plans des deux rectangles et des dimensions a et b, a' et b', de ces rectangles (*fig.* 293).

Fig. 293.



La section $L_1M_1P_1Q_1$, équidistante des bases, est un rectangle dont les dimensions, L_1M_1, L_1P_1, sont évidemment égales à $\frac{1}{2}(a+a')$ et $\frac{1}{2}(b+b')$.

Le volume du corps est donc, en vertu du théorème précédent, donné par la formule

$$\frac{h}{6}[ab + a'b' + (a + a')(b + b')],$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{bh}{6}(2a + a') + \frac{b'h}{6}(2a' + a).$$

Pour $b' = 0$, le volume se réduit à

$$\frac{bh}{6}(2a + a'),$$

et le corps a la forme qu'on donne dans les parcs d'artillerie aux piles de boulets sphériques rectangulaires.

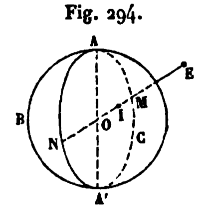
CHAPITRE IV.

LA SPHÈRE.

I. — Théorèmes généraux relatifs à la sphère.

505. On appelle *surface sphérique* la surface engendrée par la rotation d'une demi-circonférence ABA' autour du diamètre AA' qui la termine (*fig.* 294).

Fig. 294.



Dans ce mouvement, tout point de cette demi-circonférence décrit un cercle dont le centre est situé sur l'axe de rotation AA' et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

La *sphère* est le corps limité par une surface sphérique. On confond souvent dans le discours les mots *sphère* et *surface sphérique*, de même qu'en Géométrie plane les mots *cercle* et *circonférence de cercle*.

506. Considérons la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABA' autour du diamètre AA', et un point quelconque de l'espace. Quand le demi-cercle générateur vient se placer suivant ACA' dans le plan déterminé par AA' et par le point considéré, il peut se faire que ce point soit comme E à l'extérieur du cercle ACA', ou comme I à l'intérieur, ou enfin comme M sur la circonférence de ce cercle. Dans le premier cas, le point E est *extérieur* à la sphère, et sa distance au centre O du cercle ACB est plus grande que le rayon R de ce cercle; dans le deuxième cas, le point I est *intérieur* à la sphère, et la distance OI est moindre que R; enfin, dans le troisième cas, le point M est sur la surface sphérique et la distance OM est égale à R.

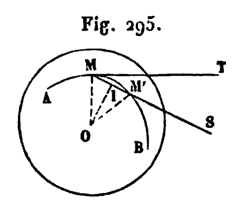
La *surface sphérique* peut donc être encore définie le *lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe.*

Ce point fixe O est dit le *centre* de la sphère. On nomme *rayon* toute droite, telle que OA ou OM, menée du centre O à la surface; *tous les rayons d'une même sphère sont égaux.* On nomme *diamètre* toute droite, telle que MN, passant par le centre et limitée à la surface sphérique; *tous les diamètres d'une même sphère sont égaux,* car chacun d'eux est la somme de deux rayons.

Deux sphères de même rayon sont égales.

507. La définition donnée au n° 96 pour la tangente aux courbes planes s'étend aux courbes de l'espace. Il est aisé de voir, d'après cela, que *la tangente* MT *à une courbe quelconque* AMB *tracée sur la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OM *mené au point de contact.* En effet (*fig.* 295), prenons sur la courbe AMB un point M' voisin du point M, menons la sécante MM'S et joignons le centre O au milieu I de la corde MM'. Le triangle MOM' étant isocèle, la droite OI est perpendiculaire sur MM'. Or, lorsque la sécante MM'S tourne autour du point M de manière à devenir à la limite la tangente MT, le point I, milieu de MM', se réunit au point M en même temps que le point M'. L'angle OMT, position limite de l'angle droit OIS, est donc lui-même un angle droit.

Fig. 295.



THÉORÈME.

508. *Toute section plane de la sphère est un cercle.*

En effet, les points de la section sont, puisqu'ils appartiennent à la sphère, situés à la même distance du centre de cette sphère; or, on sait (88, 304) que le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe est une circonférence de cercle.

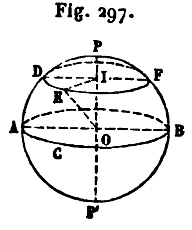
COROLLAIRES.

509. Si le point fixe O, qui est ici le centre de la sphère (*fig.* 296), est situé dans le plan sécant, ce point est le centre même de la section ACB, dont le rayon ne diffère pas de celui de la sphère.

Si le point fixe O est extérieur au plan sécant, le centre I

de la section DEF est la projection du centre O de la sphère sur le plan sécant (304). Quant au rayon IE $= r$ de la section, c'est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle OIE, dont l'hypoténuse OE est le rayon R de la sphère et dont l'autre côté de l'angle droit OI est la distance d du centre de la sphère au plan sécant. Ce rayon r résulte donc de la formule

Fig. 297.



$$r^2 = R^2 - d^2.$$

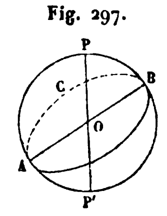
On est ainsi conduit à diviser les sections planes de la sphère en deux classes : les *grands cercles*, dont les plans passent par le centre de la sphère et qui sont tous égaux entre eux, puisqu'ils ont tous pour rayon le rayon de la sphère, et les *petits cercles*, dont les plans ne contiennent pas le centre de la sphère et dont les rayons, inférieurs à celui de la sphère, décroissent à mesure que leurs plans s'éloignent du centre de la sphère.

Deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux, et, de deux petits cercles inégalement éloignés du centre de la sphère, le plus grand est celui qui est le plus voisin de ce centre.

Ajoutons qu'il faut *trois points* de la surface sphérique pour déterminer un petit cercle (95, 290), tandis que *deux points* suffisent pour déterminer un grand cercle, puisque le centre est connu; toutefois, dans ce dernier cas, les deux points donnés ne doivent pas être en ligne droite avec le centre de la sphère, sans quoi le plan du grand cercle, assujetti seulement à passer par un diamètre, pourrait occuper une infinité de positions (290).

510. *Tout grand cercle divise la surface sphérique et la sphère en deux parties égales.* Car si, après avoir séparé les deux parties, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité dans le même sens, les deux surfaces coïncideront, sans quoi tous les points de la surface sphérique ne seraient pas à la même distance du centre.

Fig. 297.



511. *Deux grands cercles* APBP', ABC (*fig.* 297), *se divisent*

mutuellement en deux parties égales. Car le centre O de la sphère, appartenant à la fois aux plans de ces deux cercles, est situé sur leur intersection commune, qui est alors un diamètre.

512. *Une droite ne peut couper la surface sphérique en plus de deux points.* Car cette droite ne peut avoir plus de deux points communs avec la circonférence de grand cercle située dans le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère.

513. *La sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque* AB. Car la circonférence ACB déterminée par un plan quelconque passant par AB, ayant même centre O et même rayon OA que la sphère, engendrera évidemment cette surface en tournant autour de AB (*fig.* 297).

514. On nomme *pôles* d'un cercle de la sphère, les extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan du cercle.

Deux cercles DFE, ACB (*fig.* 298), dont les plans sont parallèles, ont les mêmes pôles P et P'.

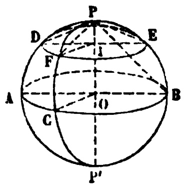
Le centre I d'un cercle quelconque DE, ses pôles P et P', et le centre O de la sphère sont sur une même perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout grand cercle PFCP' passant par les pôles P et P' d'un cercle DFE a son plan perpendiculaire au plan de ce cercle, puisqu'il contient la droite PP', qui est perpendiculaire à ce dernier plan.

THÉORÈME.

515. *Tous les points de la circonférence d'un cercle* DFE *de la sphère sont à égale distance de chacun des pôles* P et P' *de ce cercle* (*fig.* 298).

Fig. 298.



En effet, la droite PI, qui joint le pôle P au centre I du cercle DFE, étant perpendiculaire au plan DFE, les droites PD, PF, PE, ..., sont des obliques qui s'écartent également du pied I de la perpendiculaire et qui, par suite, sont égales.

On voit encore que les arcs de grand cercle PD, PF, PE, ..., sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales.

Enfin, dans le cas où le cercle considéré DFE devient un grand cercle ACB, la même propriété subsiste; mais, les angles droits POA, POC, POB,..., ayant leurs sommets au centre des grands cercles PAP′, PCP′, PBP′,..., les arcs PA, PC, PB, ... sont tous égaux au quart d'une circonférence de grand cercle.

SCOLIE.

516. Des deux pôles P et P′ d'un petit cercle DFE, nous ne considérerons désormais, à moins d'avertissement contraire, que le pôle P, qui est le plus rapproché du plan de ce cercle. Nous donnerons à la distance rectiligne PD, qui sépare le pôle P d'un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *distance polaire* de ce cercle, et à la longueur de l'arc de grand cercle PD, qui va du pôle à un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *rayon sphérique* de ce cercle.

Le rayon sphérique d'un grand cercle est égal au quart de la circonférence de ce cercle ou à un quadrant, et sa distance polaire est égale à la corde de cet arc, c'est-à-dire au côté du carré inscrit dans un grand cercle.

517. Le théorème précédent permet de tracer des circonférences sur une sphère solide comme on les trace sur un plan. On emploie à cet effet un *compas à branches courbes*, afin de ne pas être gêné par la convexité de la sphère. On donne au compas une ouverture (distance des deux pointes) égale à la distance polaire voulue, et l'on place la pointe sèche au point choisi pour pôle; l'autre pointe décrit alors le cercle demandé.

Pour décrire un grand cercle, il faut avoir sa distance polaire, c'est-à-dire la corde d'un arc égal au quart d'un grand cercle, ce qui exige la connaissance du rayon de la sphère.

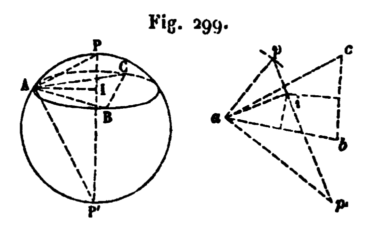
PROBLEME.

518. *Trouver le rayon d'une sphère solide* (*fig.* 299).

D'un point P de la surface sphérique comme pôle, avec une ouverture de compas arbitraire, on décrit un cercle ABC. On relève avec le compas les trois distances rectilignes AB, BC, CA, et l'on construit sur le papier un triangle *abc* ayant pour côtés ces trois longueurs. On détermine le centre *i* du cercle circonscrit au triangle *abc*, et la droite *ai* est égale au rayon AI du cercle ABC. Par suite, si du point *a* comme centre, avec

une ouverture de compas égale à celle qui a servi à décrire l
cercle ABC sur la sphère, on décrit un petit arc de cercl
jusqu'à la rencontre p de la perpendiculaire pip' élevée en i

Fig. 299.



sur ai, on forme un triangle api égal à API, et il ne reste plu
qu'à élever la perpendiculaire ap' sur ap pour avoir en pp' l
diamètre PP' de la sphère.

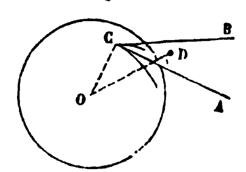
Pour obtenir des résultats précis lorsqu'on n'a à sa dispo-sition qu'une portion de sphère, il faut choisir le point P à peu près au milieu de la portion de surface dont on dispose, prendre une distance polaire PA aussi grande que possible, et enfin, dans tous les cas, choisir les points A, B, C, sur le cercl ABC, de telle sorte que le triangle ABC soit à peu près équi-latéral.

THÉORÈME.

519. *Tout plan* ACB *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère, et,* réciproquement, *tout plan* ACB *tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OC *mené au point de contact* C (*fig.* 300).

On dit qu'un plan ACB est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a avec cette surface qu'un point commun C, qu'on nomme *point de contact.*

Fig. 300.



Cela posé, soit ACB un plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OC. D étant un point quelconque de ce plan, autre que C, OD est oblique à ce plan, et l'on a OD > OC, de sorte que le point D est extérieur à la sphère. Le plan ACB, n'ayant d'après cela que le point C commun avec la surface sphérique, est tangent à cette surface.

Inversement, si ACB est un plan tangent à la sphère au point C, tout point D de ce plan, autre que C, est extérieur à la sphère, et l'on a OD > OC; donc OC, étant la plus courte

distance du centre O au plan ACB, est perpendiculaire sur ce plan.

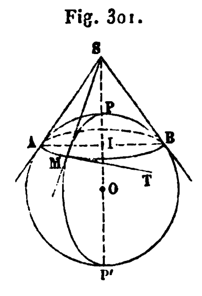
COROLLAIRES.

520. *Par un point pris sur la surface sphérique, on peut toujours mener un plan tangent à cette surface, et l'on ne peut en mener qu'un* (302).

521. *Le plan tangent à la sphère en un point* C *contient les tangentes en ce point à toutes les courbes qu'on peut tracer par ce point sur la surface sphérique* (507, 300).

522. Considérons une sphère O et un point extérieur S (*fig.* 301). Par la droite OS, menons un plan quelconque qui déterminera dans la sphère un grand cercle PAP', et menons par S une tangente SA à ce cercle. Pendant que le demi-cercle PAP' en tournant autour de l'axe SO engendre la sphère, la tangente SA engendre un cône de révolution qui a en commun avec la sphère le cercle AB décrit par le point A. De plus, en tout point M de ce cercle, le cône et la sphère ont le même plan tangent, car la génératrice SM et la tangente MT au cercle AB, qui déterminent le plan tangent au cône (470), sont situées l'une et l'autre (521) dans le plan tangent à la sphère. On dit d'après cela que *le cône est circonscrit à la sphère* et que *la sphère est inscrite au cône* le long du cercle commun AB.

Fig. 301.



On voit encore par là que, *par un point extérieur* S, *on peut mener une infinité de plans tangents à une sphère* O, et que *toutes les tangentes* SA, SM, SB, ..., *à la sphère, issues du même point* S, *sont égales*.

Si le point S s'éloigne indéfiniment sur la droite PP', le cône dégénère en un *cylindre circonscrit*, et le lieu des points de contact de la sphère et de ce cylindre de révolution devient le grand cercle perpendiculaire à la direction PP' des génératrices du cylindre.

THÉORÈME.

523. *L'intersection de deux sphères* A *et* B *est une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des*

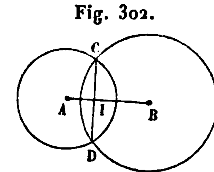
centres AB *des deux sphères et dont le centre est sur celle ligne* (*fig.* 302).

Car cette intersection n'est autre que la circonférence engendrée par la rotation autour de AB du point C commun aux deux circonférences suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par un plan quelconque passant par AB.

SCOLIE.

524. Lorsque deux sphères n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont tangentes en ce point, qu'on nomme *point de contact;* le point de contact est situé sur la ligne des centres, et en ce point les sphères ont le même plan tangent (101).

Fig. 302.



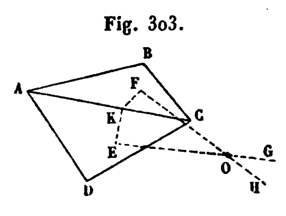
Les positions relatives de deux sphères sont au nombre de cinq (102), et les relations correspondantes entre la distance des centres et les rayons sont celles qui ont lieu pour les circonférences de grand cercle déterminées dans les sphères données par un plan quelconque passant par la droite des centres.

THÉORÈME.

525. *Par quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, on peut faire passer une surface sphérique, mais une seule* (*fig.* 303).

Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des quatre points A, B, C, D.

Fig. 303.



Or, tout point équidistant de A, B, C, D, doit se trouver sur la perpendiculaire FH élevée au plan ABC par le centre F du cercle circonscrit au triangle ABC, puisque cette perpendiculaire est le lieu des points équidistants de A, B, C (304); il doit aussi appartenir à la perpendiculaire EG élevée au plan ACD par le centre E du cercle circonscrit au triangle ACD. Comme deux droites FH, EG, ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant de A, B, C, D. En second lieu, un tel point existe

toujours si, conformément à l'hypothèse, les points A, B, C, D, ne sont pas situés dans un même plan. En effet, le plan perpendiculaire sur le milieu K de AC, étant le lieu des points équidistants de A et de C, doit contenir EG et FH; d'ailleurs, les deux droites KF et KE, suivant lesquelles il rencontre les plans ABC et ADC, se coupent, puisque les plans ABC et ADC sont distincts; donc les deux droites EG et FH, étant situées dans un même plan EKF, et étant, dans ce plan, perpendiculaires à deux droites KF et KE qui se coupent, ont un point commun O qui est le centre de la sphère demandée.

COROLLAIRES.

526. Deux sphères, qui ont quatre points communs non situés dans un même plan, coïncident.

527. Les perpendiculaires élevées aux quatre faces d'un tétraèdre, par le centre du cercle circonscrit à chacune de ces faces, se coupent en un même point.

THÉORÈME.

528. *L'angle* APB *de deux arcs de grand cercle* PAP', PBP', *a pour mesure, soit l'arc de grand cercle* AB *décrit de son sommet* P *comme pôle et compris entre ses côtés, soit le plus petit arc de grand cercle* pp_1, *qui unit les pôles de ses côtés* (*fig.* 304).

On nomme *angle de deux courbes* passant par un même point de l'espace l'angle de leurs tangentes en ce point. *L'angle de deux courbes tracées sur la sphère est* donc *égal à l'angle des plans menés respectivement par le centre de la sphère et par les tangentes à ces courbes au point commun;* car, ces tangentes étant perpendiculaires au rayon qui aboutit au point commun (507), leur angle mesure le dièdre des deux plans considérés. En particulier, *l'angle de deux arcs de grand cercle est égal à l'angle des plans de ces arcs.*

Fig. 304.

Cela posé, les arcs PA, PB, étant des quadrants, les angles POA, POB, sont droits et l'angle AOB est l'angle plan qui mesure l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles. Mais cet angle dièdre est égal à l'angle APB des deux arcs de grand cercle, et l'angle

au centre AOB a pour mesure l'arc AB; donc l'arc AB est aussi la mesure de l'angle APB.

En second lieu, prenons sur la circonférence ABC, à partir des points A et B, *dans le même sens*, deux arcs Ap et Bp_1, égaux à un quadrant; l'arc pp_1 est évidemment égal à l'arc AB, et, pour justifier le second énoncé du théorème, il suffit de prouver que p et p_1 sont les pôles des cercles PAP', PBP'. Or la droite Op, perpendiculaire à OA, puisque l'arc Ap est un quadrant, et perpendiculaire à OP, puisqu'elle est dans le plan ABC, est perpendiculaire au plan du grand cercle PAP'; p est donc le pôle de ce grand cercle. De même, p_1 est le pôle du grand cercle PBP'.

Nous avons dit que nous portions les arcs Ap et Bp_1 dans le même sens, à partir de leurs origines respectives A et B; si on les portait l'un dans un sens et l'autre en sens contraire, l'arc pp_1 serait le supplément de l'angle des deux grands cercles. Il y a donc une précaution à prendre dans l'application du second énoncé. Il faut considérer, pour l'un des grands cercles PAB', le pôle p, qui est du même côté que le demi-cercle PBP' et, pour l'autre grand cercle PBP', le pôle p_1, qui n'est pas du même côté que le demi-cercle PAP'.

COROLLAIRES.

529. *Le lieu géométrique des pôles des grands cercles inclinés d'un angle donné sur un grand cercle donné se compose de deux cercles dont les pôles se confondent avec ceux du grand cercle donné. Le rayon sphérique de ces cercles est égal à l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné.*

530. *Pour que deux grands cercles se coupent à angle droit, il faut et il suffit que chacun d'eux renferme le pôle de l'autre.*

531. Deux grands cercles APC, BPD (*fig.* 304), forment en se coupant au point P quatre angles APB, BPC, CPD, DPA; les angles adjacents APB, BPC, sont supplémentaires, les angles opposés par le sommet APB, CPD, sont égaux.

II. — Des triangles et des polygones sphériques.

532. On appelle *polygone sphérique* la portion de surface sphérique ABCDE comprise entre plusieurs arcs de grand

cercle. Ces arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont les *côtés* du polygone; les angles ABC, BCD, ..., qu'ils forment et les sommets B, C, ..., de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone (*fig.* 305).

Un polygone sphérique est dit *convexe* lorsque chaque côté prolongé laisse tout le polygone dans le même hémisphère.

Chaque côté d'un polygone sphérique convexe est moindre qu'une demi-circonférence de grand cercle. Car, si le côté AB, par exemple, était plus grand qu'une demi-circonférence, on pourrait prendre sur AB, entre A et B, un point I tel, que AI fût égal à une demi-circonférence; dès lors, le grand cercle auquel appartient le côté AE passerait par le point I (511), et le polygone ne serait pas tout entier dans l'un des deux hémisphères déterminés par ce grand cercle AE.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle (62).

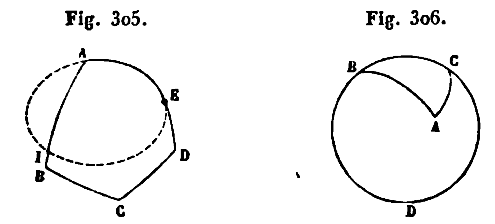


Fig. 305. Fig. 306.

533. Le polygone sphérique le plus simple est le *triangle sphérique;* c'est la portion ABC de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle AB, BC, CA, *qui sont chacun moindres qu'une demi-circonférence.* D'après cela, un triangle sphérique est toujours convexe (*fig.* 306).

On pourrait admettre des côtés qui surpasseraient la demi-circonférence et appeler encore *triangle sphérique* la figure formée par des arcs tels que AB, AC, BDC, dont le dernier est supérieur à une demi-circonférence. Mais d'abord, cela serait incommode, parce que ces nouvelles figures présenteraient des angles tels que A, qui surpasse deux angles droits; et ensuite, cela est inutile, car la connaissance des éléments du triangle sphérique proprement dit ABC entraîne celle de tous les éléments de la figure formée par les arcs AB, AC, BDC.

Un triangle sphérique est *isocèle, équilatéral, rectangle,* dans les mêmes circonstances qu'un triangle rectiligne (24).

534. En joignant les sommets d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 307) au centre O de la sphère, on forme un angle trièdre OABC, dont les faces AOB, BOC, . . . , ont la même mesure (106) que les côtés correspondants AB, BC, . . . , du triangle sphérique, et dont les angles dièdres OA, OB, . . . , ont la même mesure (528) que les angles A, B, . . . , de ce triangle. La même remarque s'étend à un polygone sphérique ABCD (*fig.* 308) et à l'angle polyèdre correspondant OABCD.

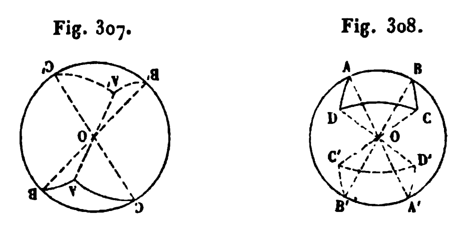


Fig. 307. Fig. 308.

D'après cela, *à chaque propriété des angles trièdres ou polyèdres répond une propriété analogue des triangles ou polygones sphériques*, et, pour énoncer cette propriété, il suffit de remplacer respectivement les mots *face* et *angle dièdre* par les mots *côté* et *angle*.

C'est même cette marche que l'on suit pour établir les premières propriétés des figures sphériques. Mais plus tard, et pour des propriétés moins simples, il est ordinairement préférable de faire l'inverse, c'est-à-dire d'établir directement les propriétés des figures sphériques pour en déduire les propriétés des angles polyèdres correspondants. On raisonne en effet sur une surface, et en particulier sur la sphère, presque aussi aisément que sur un plan, tandis qu'il faut un certain effort pour se représenter une figure de l'espace un peu compliquée. L'étude de l'Astronomie ne laisse à cet égard aucun doute, et la conception de la sphère céleste est un des plus heureux artifices géométriques qu'on ait imaginés.

535. Si l'on prolonge les arêtes de l'angle polyèdre OABCD (*fig.* 308) au delà du sommet O, on forme un angle polyèdre symétrique OA'B'C'D', qui détermine sur la surface de la sphère un polygone A'B'C'D'. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D', dont les sommets sont ainsi diamétralement opposés deux à deux, sont appelés *polygones sphériques symétriques*.

Les considérations développées au n° 371 conduisent aux propriétés suivantes :

1° *Deux polygones symétriques ont leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux; 2° ces polygones ne sont pas en général superposables, attendu que les parties respectivement égales sont disposées dans un ordre inverse; 3° pour qu'un triangle sphérique soit superposable à son symétrique* (*fig.* 307), *il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux, et dans un tel triangle les côtés opposés aux angles égaux sont égaux;* en d'autres termes, ce triangle est *isocèle*.

THÉORÈME.

536. *Dans tout polygone sphérique, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.*

En effet, soit ABCD le polygone proposé (*fig.* 308). Dans l'angle polyèdre correspondant OABCD, on a (372)

$$\mathrm{AOB} < \mathrm{BOC} + \mathrm{COD} + \mathrm{DOA}.$$

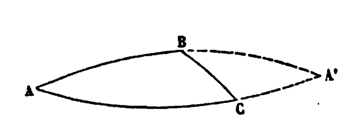
Donc (106)

$$\text{arc AB} < \text{arc BC} + \text{arc CD} + \text{arc DA}.$$

SCOLIES.

537. *Dans tout triangle sphérique* ABC (*fig.* 309), *à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

Fig. 309. Fig. 310.



Cela résulte de la propriété analogue de l'angle trièdre (373). On peut aussi le démontrer de la manière suivante. Soit l'angle ABC plus grand que l'angle C; on pourra mener dans l'angle ABC un arc de grand cercle BD qui fasse avec BC un angle DBC égal à l'angle C. Le triangle BDC, ayant deux angles égaux DBC, DCB, sera isocèle (535), et l'on aura BD = DC. Or, le triangle ABD donne (536)

$$\mathrm{AB} < \mathrm{AD} + \mathrm{BD}$$

et, en remplaçant le côté BD par son égal DC,

$$AB < AD + DC \quad \text{ou} \quad AB < AC.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été énoncé au n° 535 (3°), et en raisonnant comme au n° 33, on voit que, réciproquement, *si un triangle sphérique est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux, et si un triangle sphérique a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

538. De ce qu'un triangle sphérique isocèle est superposable à son symétrique, il résulte, comme au n° 27, que, *dans tout triangle sphérique isocèle, l'arc de grand cercle qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

539. Enfin, comme au n° 28, *tout triangle sphérique équiangle est équilatéral, et tout triangle sphérique équilatéral est équiangle.*

THÉORÈME.

540. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence.*

Car la somme des faces de l'angle polyèdre correspondant est moindre que quatre angles droits (374).

La démonstration directe est d'ailleurs facile. Considérons d'abord un triangle sphérique ABC (*fig.* 310), et prolongeons les côtés AB et AC jusqu'à leur rencontre A'; les deux arcs ABA', ACA', sont des demi-circonférences de grand cercle (511), et, comme dans le triangle BCA' le côté BC est moindre que BA' + CA', la somme AB + AC + BC des côtés du triangle ABC est inférieure à ABA' + ACA', c'est-à-dire à une circonférence de grand cercle.

En opérant d'une manière analogue sur un polygone, c'est-à-dire en remplaçant un côté par les prolongements des deux qui lui sont adjacents, on voit que, si la proposition est vraie pour un polygone convexe, elle subsiste pour le polygone convexe qui a un côté de plus; donc elle est générale.

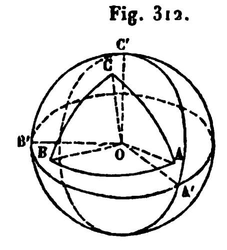
THÉORÈME.

541. *Si un triangle sphérique* A′B′C′ *est le triangle polaire un triangle sphérique donné* ABC, *réciproquement* ABC *sera triangle polaire de* A′B′C′.

Pour bien comprendre la définition du triangle polaire et bjet du présent théorème, il convient de faire une re-rque [1].

Soient EIF un grand cercle (*fig.* 311), P l'un de ses pôles M un point quelconque de la sphère. Si P et M sont d'un ême côté du grand cercle EF, le plus petit arc de grand rcle qui va de P à M est moindre qu'un quadrant PI. Si P M sont de part et d'autre du grand cercle EF, le plus petit de grand cercle allant de P à M est supérieur à un qua-ant.

Fig. 311. Fig. 312.



Cela posé, on nomme *triangle polaire* d'un triangle sphé-ue ABC un nouveau triangle A′B′C′ (*fig.* 312) dont les som-ets sont définis de la manière suivante : A′ est celui des deux les du grand cercle BC qui est, par rapport à ce grand cercle, même côté que le sommet opposé A ; de même, B′ est le le de AC qui est situé par rapport à AC du même côté que B, C′ est le pôle de AB qui est placé par rapport à AB du même té que C.

Il s'agit de démontrer que, réciproquement, le triangle ABC le triangle polaire de A′B′C′. A cet effet, considérons l'un lconque de ses sommets, C par exemple ; A′ étant le pôle BC, l'arc de grand cercle qui joindrait C et A′ est un qua-nt ; de même, l'arc de grand cercle CB′ est un quadrant, isque B′ est le pôle de AC. Donc le point C (515) est le

[1] *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, édition, 1879.

pôle de A′B′. De plus, puisque C′ est le pôle de AB qui se trouve par rapport à AB du même côté que C, le plus petit arc du grand cercle allant de C en C′ est moindre qu'un quadrant; par suite, C est le pôle de A′B′ qui se trouve par rapport à A′B′ du même côté que C′.

SCOLIE.

542. D'après cela, le triangle polaire A′B′C′ d'un triangle donné ABC peut être considéré comme obtenu en décrivant des sommets A, B, C, pris successivement pour pôles, trois circonférences de grand cercle. Ces trois circonférences divisent la surface de la sphère (*fig.* 312) en huit triangles, dont l'un A′B′C′ est le triangle polaire de ABC. C'est celui qui est tel que les sommets A et A′ soient d'un même côté par rapport à BC, les sommets B et B′ d'un même côté par rapport à AC, et les sommets C et C′ d'un même côté par rapport à AB.

Les deux trièdres OABC, OA′B′C′, qui répondent à deux triangles polaires ABC, A′B′C′, sont supplémentaires (376). En effet, d'après la construction du point C′, on voit que l'arête OC′, par exemple, est perpendiculaire (514) au plan AOB et située par rapport à ce plan du même côté que OC : on raisonnerait de même pour les autres arêtes OB′ et OA′. Chaque angle de l'un des triangles ABC, A′B′C′, doit donc (377) être le supplément du côté opposé de l'autre triangle. Mais cette propriété, en vertu de laquelle deux triangles polaires sont aussi appelés *triangles supplémentaires*, mérite d'être démontrée directement; c'est là l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME.

543. *Si* ABC, A′B′C′, *sont deux triangles polaires, chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle, moins le côté opposé dans l'autre triangle* (*fig.* 313).

En effet, considérons, par exemple, l'angle A et prolongeons, s'il le faut, les côtés AB et AC jusqu'à la rencontre de l'arc B′C′; puisque A est le pôle de B′C′, l'angle A a pour mesure l'arc DE (528); mais on a évidemment

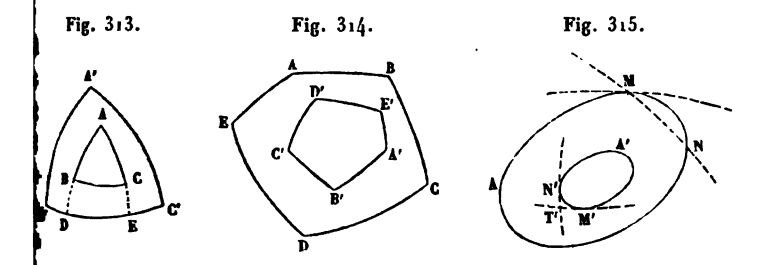
$$DE = B'E + DC' - B'C'.$$

D'ailleurs B′E et DC′ sont des quadrants, puisque B′ est le

pôle de AC et C′ le pôle de AB; on a donc

$$DE = \frac{1}{2} \text{ circ. de grand cercle} - B'C'.$$

On procéderait de la même manière pour les angles B et C.



Les triangles ABC et A′B′C′ résultant l'un de l'autre par la même construction (541), la propriété que nous venons de démontrer pour les angles A, B, C, du premier triangle convient aux angles A′, B′, C′, du second. On prouverait d'ailleurs directement que l'angle A′, par exemple, a pour mesure le supplément de BC, en prolongeant BC jusqu'à la rencontre de A′B′ et de A′C′.

SCOLIE.

544. Les propriétés des triangles polaires s'étendent aux polygones et aux courbes sphériques.

Soit (*fig.* 314) un polygone sphérique convexe ABCDE; prenons, des deux pôles de l'arc de grand cercle EA, celui A′ qui, par rapport à EA, est dans le même hémisphère que le polygone ABCDE; prenons d'une manière analogue les pôles B′, C′, D′, E′, des côtés AB, BC, CD, DE. Le polygone A′B′C′D′E′ sera le polygone *polaire* du proposé, et l'on démontrera, comme aux nos 541 et 543 : 1° que, *si un polygone sphérique* A′B′C′D′E′ *est le polygone polaire d'un polygone donné* ABCDE, *réciproquement* ABCDE *est le polygone polaire de* A′B′C′D′E′; 2° que, *dans deux polygones polaires, tout angle de l'un est le supplément du côté de l'autre dont le sommet de l'angle considéré est le pôle.*

545. On appelle *arc de grand cercle tangent en un point* M

d'une courbe sphérique AMN (*fig.* 315) la limite des positions que prend le grand cercle mené par le point M et un point voisin N, lorsque ce second point N de la courbe tend vers le premier. Une courbe sphérique est *convexe* si le grand cercle tangent en l'un quelconque de ses points laisse la courbe tout entière dans un seul hémisphère (532). Une courbe sphérique convexe ne saurait être rencontrée par un grand cercle en plus de deux points; et, des deux *arcs* de grand cercle qui joignent deux points quelconques de la courbe, le plus petit, c'est-à-dire celui qui est moindre qu'une demi-circonférence, est à l'*intérieur* de la courbe.

Cela posé, soit A'M' (*fig.* 315) une courbe sphérique convexe; en un point quelconque M' de cette courbe, menons le grand cercle tangent et prenons le pôle M de ce cercle, qui est dans le même hémisphère que la courbe A'M'; le lieu des points M est la *courbe polaire* AM de A'M'. Inversement, la courbe A'M' est la courbe polaire de AM; en d'autres termes, le point M' est le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M à la courbe AM; car, si N est le pôle de l'arc de grand cercle N'T' tangent à la courbe A'M' en un point N' voisin de M', le point T' sera le pôle (515) de l'arc sécant MN, et, quand ce dernier arc deviendra tangent en M, le point T' se confondra avec M'. Ainsi, les points M et M' des deux courbes se correspondent deux à deux, de telle sorte que le point M soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M' et que le point M' soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M.

THÉORÈME.

546. *Dans tout triangle sphérique : 1° la somme des angles est comprise entre deux et six angles droits; 2° le plus petit angle augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres angles.*

La démonstration est la même que pour les angles trièdres (379), et les propriétés énoncées peuvent être elles-mêmes considérées comme une conséquence des propriétés correspondantes des trièdres.

Il résulte de là qu'un triangle sphérique peut avoir un, deux ou trois angles droits. Quand le triangle est *birectangle*, le sommet de l'angle qui n'est pas droit est le pôle du côté opposé, et les côtés qui comprennent cet angle sont des qua-

drants. Dans le triangle sphérique *trirectangle*, tous les côtés sont des quadrants; *le triangle trirectangle est le huitième de la sphère sur laquelle il est tracé :* on le voit immédiatement en prolongeant les arcs de grand cercle qui forment les côtés du triangle.

THÉORÈME.

547. *Deux triangles sphériques tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux dans toutes leurs parties : 1° lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; 2° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; 3° lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun; 4° lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun. — Dans tous les cas, ils sont égaux ou symétriques, suivant que la disposition des éléments donnés est la même ou est inverse.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des propriétés analogues (381, 382) des angles trièdres. On peut aussi le démontrer directement.

SCOLIE.

548. Un trièdre, dont le sommet est placé au centre de deux sphères concentriques, détermine évidemment sur ces sphères deux triangles sphériques dont les angles sont respectivement égaux et les côtés proportionnels (231). Deux triangles sphériques de cette nature sont dits *semblables*.

THÉORÈME.

549. *Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points.*

1° Il faut, avant tout, définir *la longueur d'un arc de courbe gauche*, c'est-à-dire dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan. Cette longueur se définit comme celle d'un arc de courbe plane. *C'est la limite du périmètre d'une ligne brisée qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.* Nous allons prouver que cette limite existe et qu'elle est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi sui-

vant laquelle on fait tendre vers zéro les divers côtés de la ligne brisée ([1]).

Soient (*fig.* 316) AB un arc de courbe gauche, *ab* sa projection orthogonale sur un plan quelconque P, M un point quelconque de AB et *m* la projection de ce point. Dans un

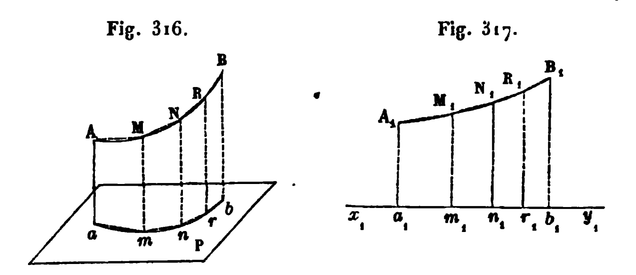


Fig. 316. Fig. 317.

plan pris à volonté, menons une droite indéfinie x_1y_1 (*fig.* 317) et prenons sur cette droite, à partir d'un point a_1, une longueur a_1m_1 égale à la longueur de l'arc *am*; puis, au point m_1 élevons sur x_1y_1 la perpendiculaire m_1M_1 égale à la projetante M*m*. A tout point M de la courbe AB répondra ainsi un point M_1, et, lorsque le point M décrira l'arc AB, le point M_1 décrira un arc de courbe plane A_1B_1, dont nous désignerons la longueur par *l*.

Cela posé, soient AMNRB une ligne brisée quelconque inscrite dans l'arc AB, et *amnrb*, $A_1M_1N_1R_1B_1$, les lignes brisées correspondantes inscrites dans la projection *ab* et dans la ligne plane A_1B_1. La valeur du rapport

$$(1)\qquad \frac{AM + MN + NR + RB}{A_1M_1 + M_1N_1 + N_1R_1 + R_1B_1}$$

est comprise entre les valeurs de deux des rapports

$$(2)\qquad \frac{AM}{A_1M_1},\quad \frac{MN}{M_1N_1},\quad \frac{NR}{N_1R_1},\quad \frac{RB}{R_1B_1}$$ (t. I, *Alg. élém.*, 66).

Par suite, si l'on peut prouver que chacun de ces rapports a l'unité pour limite, il en sera de même du rapport (1), et, comme le dénominateur de ce rapport a pour limite la quan-

---

([1]) Nous empruntons textuellement cette importante démonstration au TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition (1879).

tité bien définie l, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés de la ligne brisée AMNRB tendent vers zéro (221, 222), son numérateur aura aussi l pour limite, quelle que soit cette loi.

Prenons donc l'un quelconque des rapports (2), $\frac{MN}{M_1N_1}$ par exemple. Désignons par δ la différence $Nn - Mm$ ou son égale $N_1n_1 - M_1m_1$. Le carré du rapport considéré aura pour expression

$$\frac{\overline{mn}^2 + \delta^2}{\overline{m_1n_1}^2 + \delta^2}.$$

La valeur de ce carré est donc comprise entre

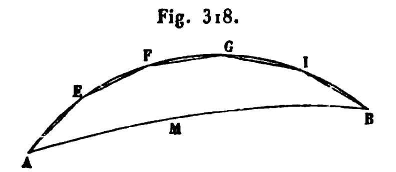
$$\left(\frac{mn}{m_1n_1}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2}{\delta^2} \text{ ou } 1.$$

Mais, m_1n_1 étant égal à l'arc de courbe plane dont mn est la corde, le rapport $\frac{mn}{m_1n_1}$ a l'unité pour limite (226) quand mn tend vers zéro. La limite de $\frac{MN}{M_1N_1}$ est donc égale à 1.

2° *La longueur d'un arc de courbe sphérique est égale à la limite du périmètre d'une ligne brisée sphérique qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.*

En effet, soient AGB (*fig.* 318) un arc de courbe quelconque

Fig. 318.



tracé sur la sphère, et AEFGIB une ligne brisée sphérique inscrite dans cet arc, c'est-à-dire une ligne formée de portions d'arcs de grand cercle, ayant ses extrémités en A et en B et ses sommets intermédiaires situés sur l'arc de courbe AGB.

Si les arcs de grand cercle, dont la longueur de la ligne brisée sphérique est la somme, tendent séparément vers zéro, suivant une loi d'ailleurs quelconque, le rapport de chacun de ces arcs à sa corde aura l'unité pour limite (226). Il en sera donc de même du rapport de la longueur de la ligne brisée à la

somme des cordes. Et, comme (1°) la somme des cordes a pour limite la longueur de l'arc de courbe AGB, on voit que la longueur de la ligne brisée sphérique inscrite dans l'arc de courbe quelconque AGB a aussi pour limite la longueur de cet arc.

3° Nous pouvons maintenant trouver le plus court chemin entre deux points A et B sur la surface de la sphère (*fig.* 318).

Soient AMB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit les points A et B, et AGB une courbe sphérique quelconque tracée entre ces deux points. AEFGIB étant une portion de polygone sphérique inscrite dans cette courbe, on aura (536)

$$AMB < AE + EF + FG + GI + IB.$$

Or, si l'on fait tendre vers zéro les côtés du polygone inscrit, le second membre a pour limite (2°) la longueur de l'arc de courbe AGB. Donc, l'arc de grand cercle AMB est moindre que toute autre courbe sphérique allant de A à B; c'est le plus court chemin du point A au point B sur la sphère.

D'après cela, on appelle *distance sphérique* de deux points A et B d'une sphère, la longueur de l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit ces deux points.

THÉORÈME.

550. *Pour qu'un grand cercle soit perpendiculaire à un petit cercle* AMB, *il faut et il suffit que le grand cercle passe par les pôles* P *et* P′ *du petit cercle* (*fig.* 301).

En d'autres termes, si l'on désigne par O le centre de la sphère et, respectivement, par MS et par MT les tangentes au grand cercle et au petit cercle au point commun M, pour que l'angle SMT soit droit, il faut et il suffit que les plans OMS, MPP′, coïncident.

En effet, le plan MPP′ est perpendiculaire à MT, puisqu'il contient deux droites OM et PP′ qui sont à angle droit sur MT. Donc, si l'angle SMT est droit, MS est dans le plan MPP′ qui, par suite, coïncide avec le plan OMS. Inversement, si les plans OMS, MPP′, coïncident, la droite MS contenue dans le plan MPP′ est à angle droit sur la perpendiculaire MT à ce plan.

COROLLAIRE.

551. *Par un point* O *de la sphère, on peut mener un grand cercle perpendiculaire à un cercle donné* AB *et l'on ne peut en mener qu'un :* c'est le grand cercle OPI′ P′I qui passe par le point O et par les pôles P et P′ du cercle AB (*fig.* 319).

Fig. 319.

Il y aurait toutefois indétermination si le point O coïncidait avec l'un des pôles P et P′.

En laissant de côté ce cas singulier, on voit que, du point O, on peut mener deux *arcs* de grand cercle, OI et OPI′, *normaux* à un cercle donné AB.

THÉORÈME.

552. *Si, d'un point* O *d'une sphère, on mène, sur un cercle* AB, *le plus petit,* OI, *des deux arcs de grand cercle normaux et plusieurs arcs de grand cercle obliques* OC, OD, OE (*fig* 319) :

1° *L'arc perpendiculaire* OI *est moindre que tout arc oblique* OC;

2° *Deux arcs obliques,* OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont équidistants du pied* I *de l'arc normal, sont égaux;*

3° *De deux arcs obliques,* OC *et* OD *ou* OE *et* OD, *celui dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de l'arc normal est le plus long.*

En effet, le cercle AB divise la sphère en deux calottes dont l'une contient le point O; soit P le pôle de AB qui est situé dans cette calotte. Menons les arcs de grand cercle PC, PD, et désignons par K l'intersection des arcs OD et PC.

1° Dans le triangle sphérique POC, on a

$$PC - PO < OC,$$

c'est-à-dire

$$PI - PO \quad \text{ou} \quad OI < OC.$$

2° Dans les triangles sphériques OIC, OIE, les angles OIC, OIE, sont égaux comme droits, le côté OI est commun et l'on a IC = IE par hypothèse. Ces deux triangles sont donc égaux dans toutes leurs parties (547, 2°) et, par suite, les arcs obliques OC et OE sont eux-mêmes égaux.

3° Les triangles sphériques OKC, PKD, donnent

$$OC < OK + KC, \quad PD < PK + KD,$$

d'où, en ajoutant,

$$OC + PD < OD + PC,$$

et enfin, à cause de PD = PC,

$$OC < OD.$$

COROLLAIRES.

553. Si le point C décrit le cercle AB en partant du point I, l'arc de grand cercle OC, d'abord égal à OI, croît, devient égal à OPI′, puis décroît jusqu'à la valeur primitive OI. Parmi les chemins qui conduisent du point O au cercle AB, le plus court est donc le plus petit, OI, des deux arcs normaux qu'on peut mener du point O au cercle AB. Aussi donne-t-on à la longueur de cet arc OI le nom de *distance sphérique* du point O au cercle AB.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies (40).

554. On peut se contenter d'énoncer les théorèmes qui suivent, en se reportant aux théorèmes analogues démontrés précédemment :

Le lieu géométrique des points de la sphère équidistants de deux points de cette surface est le grand cercle perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui unit les deux points (45, 305).

Deux triangles sphériques rectangles sont égaux ou symétriques : 1° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle oblique égal; 2° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal (47).

L'arc de grand cercle bissecteur de l'angle de deux grands cercles est le lieu des points de la sphère équidistants des deux côtés de cet angle (48).

THÉORÈME.

555. *L'arc de grand cercle, tangent à un petit cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon sphérique qui aboutit au point de contact.*

Car le rayon sphérique, étant compté sur un grand cercle passant par le pôle du petit cercle, est perpendiculaire (550) à ce petit cercle et, par suite, au grand cercle tangent.

SCOLIE.

556. Les propositions suivantes se démontrent sans difficulté, en se reportant, s'il est nécessaire, à la Géométrie plane :

Lorsque deux petits cercles d'une sphère se coupent, l'arc de grand cercle qui passe par leurs pôles est perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui passe par leurs deux points d'intersection.

Lorsque deux petits cercles d'une sphère sont tangents, leur point de contact est situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles, et l'arc de grand cercle mené par le point de contact à angle droit sur celui qui unit les pôles est tangent à chacun des deux petits cercles.

557. On dit qu'un *point* de la sphère est *intérieur* ou *extérieur à un petit cercle,* suivant qu'il est situé dans la plus petite ou dans la plus grande des deux calottes que ce cercle détermine sur la sphère. Sa distance sphérique (549) au pôle du petit cercle est, dans le premier cas, inférieure et, dans le second, supérieure au rayon sphérique (516) de ce cercle.

Étant donnés deux petits cercles d'une sphère, on dit : 1° que les deux cercles sont *extérieurs*, lorsque tout point de chacun d'eux est extérieur à l'autre; 2° que le premier est *intérieur* au second, lorsque tout point du premier est intérieur au second; et alors, tout point du second est extérieur au premier.

Cela posé, soient R et r les rayons sphériques de deux petits cercles, et D la distance sphérique de leurs pôles. Le quart d'un grand cercle étant pris pour unité, R et r sont moindres que 1, et D est inférieur à 2 (549).

Si les cercles sont extérieurs, on a

$$D > R + r;$$

Si les cercles sont tangents extérieurement, on a

$$D = R + r;$$

Si les cercles se coupent, on a à la fois

$$R + r > D > R - r;$$

Si le cercle r touche intérieurement le cercle R, on a

$$D = R - r;$$

Enfin, *si le cercle r est intérieur au cercle* R, on a

$$D < R - r.$$

Les réciproques sont vraies (40).

III. — Problèmes graphiques relatifs à la sphère.

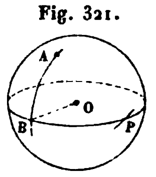
PROBLÈME.

558. *Tracer sur la sphère un grand cercle passant par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 320).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or, la distance de ce pôle P à chacun des points A et B est égale à la corde du quadrant (515); on l'obtiendra donc en décrivant successivement deux arcs de cercle, des points A et B comme pôles, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant.

Fig. 320.

Fig. 321.



PROBLÈME.

559. *Mener par un point donné* A *sur la sphère un arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné* BP (*fig.* 321).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé.

Or ce pôle P doit se trouver sur le cercle BP (530) et être à une distance du point A égale à la corde du quadrant. On l'obtiendra donc en décrivant, du point A comme pôle, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant, un arc de cercle qui rencontre en P le cercle donné BP.

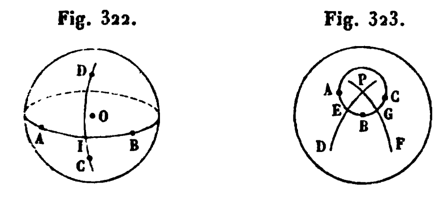
PROBLÈME.

560. *Mener un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné* AB, *en son milieu*, ou *diviser un arc de grand cercle* AB *en deux parties égales* (*fig.* 322).

Il suffit de décrire des points A et B comme pôles, avec la même ouverture de compas, deux arcs qui se coupent en C et D; puis, de faire passer un grand cercle par C et D.

Remarquons que ce grand cercle CD divise aussi en deux parties égales tous les arcs de petit cercle dont les extrémités sont A et B (305).

Fig. 322. Fig. 323.



PROBLÈME.

561. *Trouver le pôle d'un petit cercle passant par trois points donnés* A, B, C, *sur la sphère* (*fig.* 323).

Ce pôle P, étant équidistant de A, B, C, est à l'intersection des arcs de grand cercle élevés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AB et BC (560).

Le pôle P une fois connu, on tracera le petit cercle avec une ouverture de compas égale à PA.

PROBLÈME.

562. *Par un point* A *donné sur la sphère, mener un grand cercle faisant un angle donné avec un grand cercle donné* DED' (*fig.* 324).

Soit P celui des deux pôles du grand cercle donné qui se trouve dans le même hémisphère que le point A, et soit α l'arc

de grand cercle qui mesure l'angle donné, lequel peut toujours être supposé aigu.

Le pôle Q du cercle inconnu doit se trouver sur le grand cercle EIE', dont A est le pôle, puisque le grand cercle demandé passe par A. Le pôle Q doit aussi appartenir au petit cercle décrit du point P comme pôle avec un rayon sphérique égal à α, puisque ce petit cercle est le lieu des pôles des grands cercles qui coupent, sous l'angle donné, le grand cercle DED' (529).

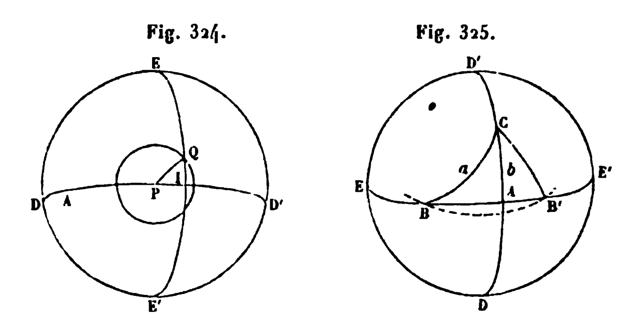
On décrira donc deux cercles, l'un du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde du quadrant, l'autre du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α. Tout point commun Q à ces deux cercles sera le pôle d'un grand cercle satisfaisant à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que les cercles auxiliaires se coupent, il faut et il suffit, puisque l'angle donné est aigu, que l'on ait

$$PQ > PI \quad \text{ou} \quad \alpha > \delta,$$

en désignant par δ la distance sphérique AD du point donné A au grand cercle donné DED'.

Lorsque le point A est sur le grand cercle donné DED', le grand cercle EIE' passe par P, et il suffit, pour avoir le point Q, de porter sur le grand cercle EPE', à partir de P, une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α.



PROBLÈME.

563. *Construire un triangle sphérique rectangle, connaissant : 1° un côté de l'angle droit et l'hypoténuse; 2° un angle et le côté opposé.*

1° Après avoir tracé (*fig.* 325) deux grands cercles perpendiculaires l'un à l'autre, c'est-à-dire deux grands cercles DAD', EAE', tels que le pôle de l'un soit sur l'autre, on portera sur l'un d'eux DD', à partir du point commun A, un arc AC égal au côté donné b; puis, du point C comme pôle, avec un rayon sphérique égal à l'hypoténuse donnée a, on décrira un cercle BB' qui coupera le grand cercle EE' en deux points B et B'; en menant les arcs de grand cercle CB, CB', on aura deux triangles sphériques symétriques BAC, B'AC, qui répondent à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le nombre a qui mesure l'hypoténuse soit compris entre les nombres b et $2 - b$, qui mesurent les distances sphériques minimum et maximum du point C au grand cercle EE'.

2° On commencera par tracer deux grands cercles BAB', BCB' (*fig.* 326) faisant entre eux l'angle donné B; soient P le pôle du premier et EPE' le grand cercle qui est perpendiculaire à la fois sur BAB' et BCB'. Le problème se réduit à mener un grand cercle perpendiculaire à BAB', c'est-à-dire passant par P, et tel que la partie CA, interceptée dans le fuseau BEB'D, soit égale au côté donné b. Or PC sera égal alors à $1 - b$. On décrira donc du point P, avec un rayon sphérique égal à $1 - b$, un cercle qui coupera BDB' en deux points; C étant l'un quelconque de ces points, le triangle BCA satisfera à la question, ainsi que le triangle B'CA.

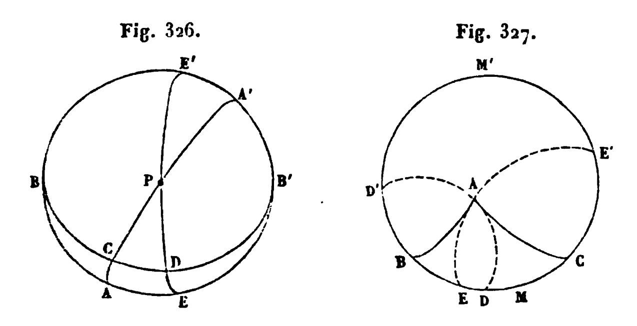


Fig. 326. Fig. 327.

La condition de possibilité consiste dans l'inégalité

$$PC > PD \quad \text{ou} \quad 1 - b > 1 - B,$$

c'est-à-dire

$$b < B.$$

Nous avons supposé l'angle B aigu ; s'il était obtus, on aurait

$$PC = b - 1, \quad PD = B - 1,$$

et la condition de possibilité serait $b > B$.

PROBLÈME.

564. *Construire un triangle sphérique, connaissant trois quelconques de ses six éléments* (angles ou côtés).

Ce problème offre six cas distincts ; on peut donner : 1° les trois côtés ou les trois angles ; 2° deux côtés et l'angle compris ou un côté et les deux angles adjacents ; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Dans cette énumération, nous avons réuni chaque fois les deux cas corrélatifs, c'est-à-dire qui se ramènent l'un à l'autre par la considération du triangle polaire. Il n'y a donc que trois cas à traiter directement.

1° *On donne les trois côtés a, b, c.*

Supposons, pour fixer les idées, $a > b > c$.

Pour que le problème soit possible, il faut (536, 540) que l'on ait à la fois

$$a < b + c, \quad a + b + c < 4.$$

Ces conditions sont suffisantes. En effet, sur un grand cercle MM′ de la sphère, prenons un arc BMC égal à a (*fig.* 327) ; du point B comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc c, décrivons un arc de cercle DD′, et, du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc b, décrivons un second arc de cercle EE′. Puisque l'arc BC est plus grand que chacun des arcs BD et CE, les points D et E sont situés dans la portion BMC du grand cercle MM′, et, comme BC est moindre que la somme BD + CE, les arcs BD et CE empiètent l'un sur l'autre : le point E tombe donc entre B et D. D'ailleurs, la somme BD′ + BC + CE′ étant moindre qu'une circonférence de grand cercle, le point E′ est situé sur l'arc CM′D′ entre C et D′. Il résulte de là que le point E et le point E′ sont, le premier intérieur, le second extérieur à la calotte qui, déterminée par le cercle DD′, a pour pôle B. L'arc EE′, qui, par rapport à cette calotte, unit un point inté-

rieur à un point extérieur, doit donc couper la base DD′ de cette calotte en un certain point A, lequel est le troisième sommet du triangle demandé ABC.

Les cercles DD′ et EE′ se coupent en un second point A′, sommet d'un second triangle A′BC, symétrique du premier.

Ainsi, *pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres et que la somme des côtés soit inférieure à une circonférence de grand cercle.*

Dans les applications, il peut se faire que l'une de ces conditions soit remplie d'elle-même; il ne reste plus alors qu'à considérer l'autre. Par exemple, au n° 557, lorsqu'on cherche les conditions pour que deux petits cercles se coupent, on n'a pas à faire intervenir la relation

$$D + R + r < 4,$$

parce que, d'après la manière dont D, R et r sont définis, cette relation est satisfaite d'elle-même.

Souvent, on ignore l'ordre relatif de grandeur des côtés donnés. Dans ce cas, on exprime que le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, en écrivant que chaque côté est moindre que la somme des deux autres.

Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés, il faut et il suffit que le plus petit angle augmenté de deux droits soit plus grand que la somme des deux autres et que la somme des trois angles soit supérieure à deux angles droits; car, en prenant les suppléments de ces angles comme côtés, on peut construire le triangle supplémentaire, d'où l'on déduit ensuite le triangle demandé par le tracé indiqué au n° 542.

2° *On donne deux côtés a et b et l'angle compris* C.

Même solution qu'en *Géométrie plane* (117).

3° *On donne deux côtés a et b et l'angle* A *opposé au côté a* (*fig.* 328).

Construisons sur la sphère deux grands cercles formant un angle égal à A (562). Prenons, à partir du sommet, sur l'un des côtés de cet angle, un arc AC égal à b, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde

de *a*, décrivons un arc de cercle; B étant l'intersection de ce cercle avec le second côté de l'angle, le triangle ABC sera le triangle demandé.

La discussion de ce problème exige quelque attention.

Nous commencerons par établir que, *dans tout triangle sphérique rectangle, le nombre des côtés supérieurs à un quadrant est pair* (2 *ou* 0), *et que chaque angle oblique est de même espèce que le côté opposé.*

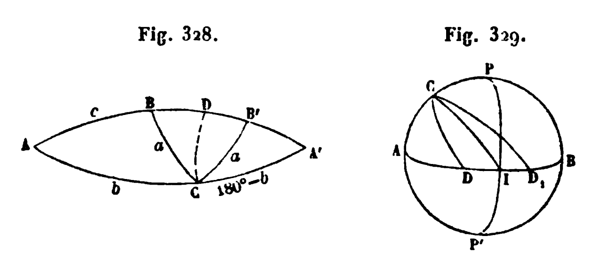


Fig. 328. Fig. 329.

Soient, en effet (*fig.* 329), trois grands cercles APB, AIB, PIP′, perpendiculaires entre eux deux à deux, de sorte que le point I est le pôle de APB; sur AP, prenons un arc AC moindre qu'un quadrant, et joignons le point C à un point quelconque de l'arc AIB par un arc de grand cercle CD ou CD_1.

Dans le triangle rectangle CAD, le côté AC est aigu, et, tant que le côté AD reste aigu ou moindre que le quadrant AI, CD reste moindre que le quadrant CI. Le triangle proposé a alors ses trois côtés aigus.

Dans le triangle rectangle CAD_1, AD_1 devenant obtus, il en est de même du côté CD_1, et ce triangle a alors un côté aigu et deux obtus.

Si l'on prenait, au contraire, comme point de départ, l'arc BC, plus grand qu'un quadrant, on aurait à considérer les triangles rectangles CBD et CBD_1, qui présentent chacun deux côtés obtus et un aigu.

On voit, en même temps, que, pour les deux premiers triangles, l'angle ACI étant droit, l'angle ACD est aigu, tandis que l'angle ACD_1 est obtus; or, le côté AD est aigu, et le côté AD_1 est obtus. Pour les deux autres triangles, l'angle BCI étant droit, l'angle DCB est obtus, tandis que l'angle D_1CB est aigu; or, le côté DB est obtus, et le côté D_1B est aigu. La démonstration est analogue pour les autres angles. Ainsi, dans un triangle sphérique rectangle, chaque angle oblique et le côté

opposé sont toujours de même espèce, c'est-à-dire ensemble aigus ou obtus.

Cela posé, revenons à la *fig.* 328. Prolongeons les côtés AB et AC du triangle ABC obtenu par la construction indiquée, jusqu'à leur nouvelle rencontre en A'. Les arcs ABA' et ACA' seront des demi-circonférences (511). Du point C, abaissons l'arc CD perpendiculaire sur ABA'.

Dans le triangle sphérique rectangle ADC, l'arc perpendiculaire CD est aigu ou obtus, d'après ce qui précède, suivant que l'angle donné A est lui-même aigu ou obtus. Si l'arc CD est aigu, il est le plus petit de tous les arcs menés du point C aux différents points de l'arc ABA', et ces mêmes arcs obliques augmentent à mesure qu'ils s'éloignent du pied de l'arc perpendiculaire CD. C'est l'inverse si l'arc CD est obtus, c'est-à-dire que cet arc perpendiculaire est un maximum et que les arcs obliques diminuent à mesure qu'ils s'éloignent de son pied (552).

Pour que le triangle à construire soit possible, il faut donc *d'abord que le côté a soit au moins égal à l'arc perpendiculaire* CD *si l'angle* A *est aigu, et plus petit que cet arc si l'angle* A *est obtus.*

Cette première condition de possibilité est évidemment satisfaite, *lorsque* A *et a sont d'espèces différentes.* Dans cette hypothèse, *le problème, s'il est possible, n'admet qu'une solution.*

En effet, supposons, par exemple, A aigu et a obtus : l'arc perpendiculaire CD sera aigu. Si l'on peut alors mener par le point C, jusqu'à l'arc ABA', un arc oblique CB égal au côté a, cet arc tombera nécessairement du même côté de l'arc CD que celui des deux arcs obliques extrêmes, b ou $180° - b$, qui est de même espèce que a. *Pour qu'il y ait une solution,* il faut que a soit moindre que cet arc extrême; cette solution disparaît et *le problème est impossible* si a surpasse ce même arc.

Si l'on suppose A obtus et a aigu, l'arc perpendiculaire CD est obtus, et l'on parvient aux mêmes conclusions en renversant les signes d'inégalité.

Lorsque A *et a sont de même espèce, le problème, s'il est possible, admet une ou deux solutions.*

En effet, supposons, par exemple, A et a aigus : l'arc per-

pendiculaire CD sera aigu. On pourra donc mener du point C jusqu'à l'arc ABA′, un premier arc oblique égal à *a*, tombant du même côté de l'arc CD que celui des deux arcs obliques extrêmes, *b* ou 180° — *b*, qui est de même espèce que *a*; mais on pourra aussi, à plus forte raison, mener un second arc oblique égal à *a*, du côté de celui des deux arcs extrêmes qui est obtus. *Les deux solutions* indiquées *existent,* lorsque *a* est moindre que le plus petit des deux arcs *b* et 180° — *b*; *elles se réduisent à une seule,* lorsque *a* devient au moins égal à ce plus petit arc; enfin, *le triangle* à construire *devient impossible* lorsque *a* est inférieur à l'arc perpendiculaire CD, comme on l'a déjà remarqué.

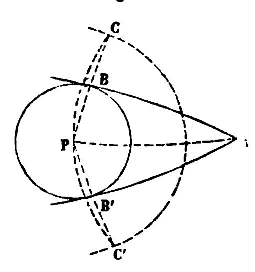
Si l'on suppose A et *a* obtus, l'arc perpendiculaire CD est lui-même obtus, et l'on parvient aux mêmes conclusions en renversant les signes d'inégalité.

PROBLÈME.

565. *Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné* (*fig.* 330).

Si le point donné est sur le cercle, il suffit d'élever par ce point un arc de grand cercle perpendiculaire au rayon sphérique correspondant (555).

Fig. 330.



Supposons, en second lieu, que le point donné A soit extérieur au petit cercle donné, c'est-à-dire situé dans la plus grande des deux calottes sphériques séparées par ce petit cercle. Considérons le problème comme résolu; nommons P le pôle du petit cercle donné, B le point de contact de l'arc BA, et prolongeons le rayon sphérique PB d'une quantité BC = PB. Le point C se trouve d'abord sur un cercle décrit du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde d'un arc de grand cercle double du rayon sphérique *r* du petit cercle. Il se trouve en outre sur un second cercle décrit du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc PA = D, car, BA étant perpendiculaire sur le milieu de PBC, le point A est équidistant de P et de C.

Le point C une fois obtenu à l'aide de ces deux cercles auxiliaires, on mènera l'arc de grand cercle PC qui coupera le petit cercle en B, et, en joignant B et A par un arc de grand cercle, on aura l'arc tangent demandé.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le triangle APC,

dont on a les trois côtés, existe, c'est-à-dire qu'on ait (564, 1°)

$$D < D + 2r, \quad 2r < D + D, \quad D + D + 2r < 4.$$

La première condition est toujours remplie, et les deux autres équivalent à

$$r < D < 2 - r;$$

elles expriment que le point A doit être situé hors de la calotte sphérique PB et hors de la calotte symétrique.

Les cercles auxiliaires se coupent en deux points C et C'; de là, deux solutions AB et AB'.

Observons enfin que, lorsque deux cercles de la sphère ont deux points communs, les symétriques de ces points par rapport au centre de la sphère appartiennent évidemment à la fois aux deux cercles symétriques des premiers. Si les deux points considérés se confondent, c'est-à-dire si les deux cercles proposés se touchent, les deux cercles symétriques se touchent au point symétrique du premier point de contact. Enfin, si l'un des cercles est un grand cercle, comme il est à lui-même son symétrique, on voit que *tout grand cercle tangent à un petit cercle est aussi tangent au petit cercle symétrique du premier par rapport au centre de la sphère*. Ainsi, dans le problème qui nous occupe, les grands cercles trouvés AB et AB' touchent non-seulement le cercle donné PB, mais encore son symétrique.

PROBLÈME.

566. *Décrire un grand cercle tangent à deux petits cercles donnés.*

Soient P et P' les pôles des deux petits cercles, R et R' leurs rayons sphériques, D la distance sphérique des deux pôles P et P'. Nous supposerons, pour fixer les idées, $R > R'$.

Le grand cercle cherché X peut laisser les deux cercles R et R' dans un même hémisphère ou dans des hémisphères opposés.

Dans le premier cas (*fig.* 331), nous prendrons pour inconnue le pôle Q du grand cercle X, qui est dans le même hémisphère que les cercles R et R'. Si A et A' sont les points où le cercle X touche respectivement les cercles R et R', le pôle Q est à la fois sur les grands cercles PA et PA'; il est donc le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP', dont on connaît deux sommets P et P' et les trois côtés

$$PP' = D, \quad PQ = QA - AP = 1 - R, \quad P'Q = QA' - A'P' = 1 - R'.$$

Les conditions de possibilité sont (536, 540)

$$\begin{aligned}
D < 1 - R + 1 - R' &\quad \text{ou} \quad 2 - D > R + R', \\
1 - R' < D + 1 - R &\quad \text{ou} \quad D > R - R', \\
1 - R < D + 1 - R' &\quad \text{ou} \quad D > R' - R, \\
D + 1 - R + 1 - R' < 4 &\quad \text{ou} \quad D < 2 + R + R'.
\end{aligned}$$

Supprimant les deux dernières relations, qui sont satisfaites d'elles mêmes, puisque l'on a $D < 2$ et $R' < R$, il ne reste plus que les conditions

$$D > R - R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R + R'.$$

La première exprime que la calotte R' n'est pas contenue dans la calotte R. Quant à la seconde, comme $2 - D$ est la distance sphérique de P au symétrique de P', elle signifie que la calotte R et la calotte symétrique de la calotte R' sont extérieures l'une à l'autre.

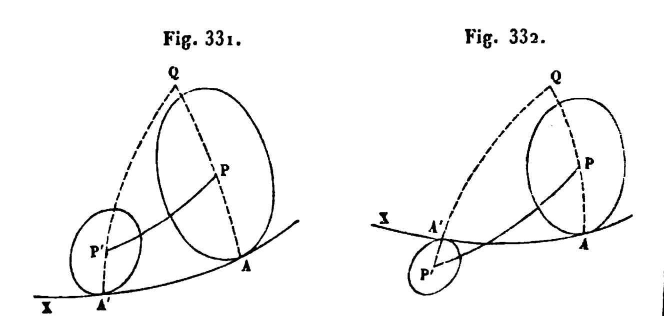


Fig. 331. Fig. 332.

Dans le second cas (*fig.* 332), on voit, d'une manière analogue, que le pôle Q du grand cercle X qui se trouve dans le même hémisphère que le cercle R est le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP' dont on a les deux sommets P et P' et les longueurs D, $1 - R$, $1 + R'$ des trois côtés. Les conditions de possibilité sont

$$D > R + R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R - R'.$$

Elles expriment que les calottes R et R' sont extérieures l'une à l'autre et que la calotte R ne contient pas la calotte symétrique de la calotte R'.

IV. — Aire de la sphère.

THÉORÈME.

367. *Lorsqu'une droite* AB *tourne autour d'un axe* xy *situé dans son plan, l'aire qu'elle engendre a pour mesure le produit de la projection* CD *de cette droite sur l'axe, par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire* IO *élevée au milieu* I *de la droite* AB *jusqu'à la rencontre de l'axe* xy (*fig.* 333).

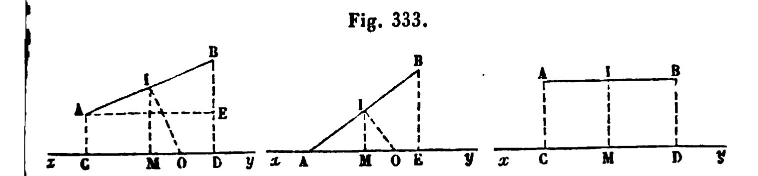
Nous supposerons que la droite AB est située tout entière d'un même côté de l'axe xy. Quelles que soient alors les

positions relatives de AB et de xy, l'aire engendrée par AB a pour mesure (497)

(1) $$2\pi . \mathrm{IM} . \mathrm{AB},$$

IM étant la perpendiculaire abaissée du point I sur xy.

Fig. 333.



Si la droite AB est parallèle à xy, le théorème proposé est tout démontré; sinon, il faut transformer l'expression (1). A cet effet, menons AE parallèle à xy jusqu'à la rencontre de la projetante BD; les triangles ABE, IMO, sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, et l'on a

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{AB}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{IM}.\mathrm{AB} = \mathrm{IO}.\mathrm{AE}.$$

L'expression (1) peut donc être remplacée par

$$2\pi.\mathrm{IO}.\mathrm{AE} \quad \text{ou} \quad 2\pi.\mathrm{IO}.\mathrm{CD},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où le point A est situé sur l'axe xy, le raisonnement subsiste; seulement la droite AE se confond avec l'axe.

COROLLAIRE.

568. Remarquons que, dans les trois positions indiquées sur la *fig.* 333, AB engendre l'aire d'un tronc de cône, d'un cône ou d'un cylindre, dont sa projection sur l'axe xy représente la hauteur.

On peut donc dire que *l'aire d'un quelconque de ces trois corps est égale au produit de sa hauteur par la circonférence ayant pour rayon la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté générateur et prolongée jusqu'à la rencontre de cette même hauteur.*

THÉORÈME.

569. *L'aire engendrée par une ligne brisée régulière qui tourne autour d'un diamètre qui ne la traverse pas a pour*

mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection de cette ligne sur l'axe choisi.

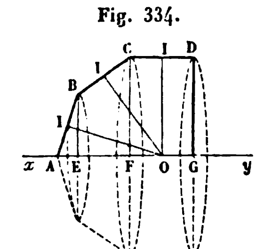
On appelle *ligne brisée régulière* une ligne brisée, plane et convexe, dont les côtés forment des angles égaux et sont égaux.

Une ligne brisée régulière jouit de toutes les propriétés d'un polygone régulier : elle est inscriptible et circonscriptible au cercle, elle a un centre, un rayon, un apothème. Seulement, l'angle au centre d'une ligne brisée régulière n'est pas, en général, une partie aliquote de quatre angles droits. On appelle *diamètre* d'une ligne brisée régulière toute droite passant par son centre.

Pour inscrire une ligne brisée régulière dans un arc de cercle, il suffit de diviser cet arc en parties égales et de joindre les points de division par des cordes.

Cela posé, soient (*fig.* 334) O le centre et OI l'apothème de la ligne brisée régulière ABCD tournant autour du diamètre xy. L'aire engendrée par cette ligne est la somme des aires engendrées par les côtés AB, BC, CD, dont le dernier est parallèle à l'axe. Ces côtés engendrent respectivement les aires convexes d'un cône, d'un tronc de cône et d'un cylindre, pour chacun desquels la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté générateur jusqu'à la rencontre de l'axe n'est autre chose que l'apothème OI de la ligne brisée régulière. On peut donc écrire (568)

Fig. 334.



$$\text{aire}\,AB = AE.\text{circ}\,OI,$$

$$\text{aire}\,BC = EF.\text{circ}\,OI,$$

$$\text{aire}\,CD = FG.\text{circ}\,OI.$$

Si l'on ajoute les égalités précédentes membre à membre, on a, en mettant circ OI en facteur commun,

$$\text{aire}\,ABCD = (AE + EF + FG).\text{circ}\,OI,$$

c'est-à-dire

$$\text{aire}\,ABCD = AG.\text{circ}\,OI.$$

COROLLAIRE.

570. Cherchons, comme exercices, les aires engendrées par un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés et par un demi-polygone régulier d'un nombre impair de côtés.

Si l'on désigne par R le rayon du polygone et par r son apothème, on a dans le premier cas, pour l'aire engendrée,

$$S = 2R.2\pi r = 4\pi Rr.$$

Dans le second cas (*fig.* 335), le diamètre xy de la ligne brisée régulière passe par un sommet A et coupe le côté opposé CD en son milieu, c'est-à-dire que AO est le rayon du polygone et OI son apothème. L'aire engendrée par les deux côtés AB et BC a pour expression $(R + r).2\pi r$. Le demi-côté CI engendre un cercle de rayon CI. On a donc, pour la surface cherchée,

Fig. 335.

$$S = (R + r).2\pi r + \pi \overline{CI}^2.$$

Mais le triangle rectangle OCI donne $\overline{CI}^2 = R^2 - r^2$. En substituant dans l'égalité précédente et en simplifiant, il vient

$$S = 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi R^2,$$

c'est-à-dire

$$S = \pi(R + r)^2.$$

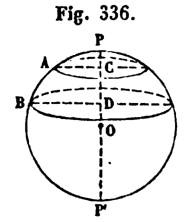
Les deux expressions qu'on vient de calculer conduiraient immédiatement à l'expression de l'aire de la sphère, si l'on supposait les polygones réguliers considérés remplacés par leurs circonférences limites : on devrait, dans cette hypothèse, faire $r = R$, et l'on trouverait $S = 4\pi R^2$.

THÉORÈME.

571. *L'aire d'une zone sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

On appelle *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles dont les plans sont *parallèles*. Ces cercles sont les *bases* de la zone, et la distance de leurs plans est sa *hauteur*. Ainsi, tandis que la demi-circonférence PABP′ engendre une sphère en tournant autour du diamètre PP′ (*fig.* 336), l'arc AB décrit une zone dont les bases sont les cercles AC et BD décrits par les points A et B, et dont la hauteur est la projection CD de l'arc AB sur l'axe PP′.

Fig. 336.



Si l'un des plans considérés devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à un point, et la zone, qui n'a plus alors qu'une base, devient une *calotte sphérique*. Ainsi, l'arc PA, en tournant autour de PP′, engendre une calotte sphérique dont le cercle AC est la base et dont PC est la hauteur.

Cela posé, l'aire d'une zone est, par définition, la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur de la zone, lorsque le nombre des côtés de cette ligne brisée croît indéfiniment.

Désignons alors par S l'aire de la zone, par H sa hauteur et par R le rayon de l'arc générateur, c'est-à-dire le rayon de la sphère à laquelle la zone appartient; soient de même s l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (569), puisque la projection de la ligne brisée sur l'axe est aussi égale à H,

$$s = \mathrm{H}.2\pi a.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, H reste invariable, s tend vers S, et a vers R. On a donc, à la limite,

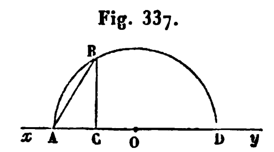
$$\mathrm{S} = \mathrm{H}.2\pi \mathrm{R}.$$

COROLLAIRES.

572. *Dans des sphères égales, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs*, et, par suite, *deux zones de même hauteur sont équivalentes*.

573. Considérons la calotte sphérique engendrée par l'arc AB tournant autour du diamètre AD (*fig.* 337). En vertu du théo-

Fig. 337.



rème précédent, l'aire de cette calotte a pour mesure

$$2\pi.\mathrm{AO}.\mathrm{AC} = \pi.\mathrm{AD}.\mathrm{AC} \quad \text{ou} \quad (167) \quad \pi.\overline{\mathrm{AB}}^2.$$

Donc, *une calotte sphérique quelconque équivaut au cercle*

dont le rayon est égal à la corde de l'arc générateur de la calotte.

THÉORÈME.

574. *L'aire de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.*

Car cette aire peut être considérée comme celle d'une zone dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. D'ailleurs, le raisonnement fait pour la zone s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

575. S étant l'aire d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$S = 2R.2\pi R = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

L'aire de la sphère est donc *égale à quatre grands cercles.* On peut dire encore qu'elle équivaut à l'aire d'un cercle dont le rayon serait égal au diamètre de la sphère.

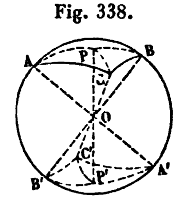
576. *Les aires de deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres.*

THÉORÈME.

577. *Deux triangles sphériques symétriques* ABC, A'B'C', *sont équivalents* (*fig.* 338).

Prenons le pôle P du petit cercle qui passerait par les points A, B, C, et menons les arcs de grand cercle PA, PB, PC, qui sont égaux entre eux (515). Traçons le diamètre POP' et les arcs de grand cercle P'A', P'B', P'C'. L'égalité des angles POA, P'OA', entraîne celle des arcs PA et P'A'; on voit de même que PB = P'B' et PC = P'C'; par suite, comme PA = PB = PC, il faut qu'on ait P'A' = P'B' = P'C'. D'après cela, les triangles PAB, P'A'B', sont symétriques et isocèles; ils sont donc superposables, comme les angles trièdres correspondants. De même, les triangles PAC, P'A'C', sont égaux entre eux, ainsi que les triangles PBC, P'B'C'. Donc, enfin, le triangle ABC, somme de PAB, PAC et PBC, est équivalent au triangle A'B'C', somme de P'A'B', P'A'C' et P'B'C'.

Fig. 338.



Si le pôle P tombait à l'extérieur du triangle ABC, ce triangle ne serait plus une somme, mais une différence.

THÉORÈME.

578. *Lorsqu'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle qui est le huitième de la surface sphérique* (546), *un fuseau a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle.*

On appelle *fuseau* la portion de surface sphérique comprise entre deux demi-circonférences de grand cercle terminées au même diamètre. L'angle de ces deux demi-circonférences est l'*angle* du fuseau.

Deux fuseaux, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont évidemment *égaux*, c'est-à-dire superposables, *lorsque leurs angles sont égaux.*

Le rapport d'un fuseau à la surface sphérique est égal au rapport de l'angle du fuseau à quatre angles droits.

En effet, soit (*fig.* 339) le fuseau APP'B, compris entre les deux demi-circonférences PAP', PBP'. Du point P comme pôle, décrivons la circonférence de grand cercle ABC : l'arc AB est la mesure de l'angle du fuseau (528). Admettons qu'il y ait une commune mesure entre cet arc et la circonférence entière dont il fait partie, qu'on ait, par exemple,

Fig. 339.

$$\frac{AB}{\text{circ}OA} = \frac{2}{15}.$$

Si l'on divise alors la circonférence OA en quinze parties égales, l'arc AB contiendra deux de ses parties.

Par le diamètre PP' et chacun des points de division obtenus, faisons passer des plans. Nous décomposerons ainsi la surface sphérique en quinze fuseaux tous égaux entre eux comme ayant même angle, et le fuseau APP'B contiendra deux de ces fuseaux. Son rapport à la surface sphérique sera donc aussi égal à $\frac{2}{15}$. On pourra écrire, par conséquent,

$$\frac{\text{fus}APP'B}{\text{surf.sph.}} = \frac{AB}{\text{circ}OA} = \frac{AOB}{4^{dr}},$$

et la remarque énoncée est établie.

[Si l'arc AB et la circonférence ABC n'avaient pas de commune mesure, on emploierait le mode de démonstration précédemment indiqué (105).]

Cela posé, *deux fuseaux quelconques d'une même sphère sont entre eux comme leurs angles*, puisque, lorsque deux proportions ont les mêmes conséquents, leurs antécédents forment proportion (t. I, *Arithm.*, 391).

Soient donc F et F' les nombres qui mesurent les deux fuseaux considérés, et A et A' les nombres qui mesurent leurs angles, dans le système d'unités adopté. On aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}.$$

Si l'on suppose alors $A' = 1$, le fuseau correspondant, ayant son angle droit, sera égal au quart de la sphère ou au double du triangle trirectangle, et l'on aura $F' = 2$. La proportion ci-dessus deviendra donc

$$\frac{F}{2} = \frac{A}{1}, \quad \text{d'où} \quad F = 2A.$$

THÉORÈME.

579. *Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un triangle sphérique quelconque a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de 2.*

Soit (*fig.* 340) le triangle sphérique ABC. Ce triangle se trouve sur l'hémisphère limité par la circonférence à laquelle appartient le côté AB. Achevons de même les circonférences auxquelles appartiennent les deux autres côtés AC et BC.

Fig. 340.

Le triangle ABC, augmenté du triangle BCA', forme évidemment le fuseau limité par les deux demi-circonférences ACA', ABA', c'est-à-dire le fuseau dont l'angle est l'angle A du triangle proposé.

Le triangle ABC, augmenté du triangle ACB', forme de même le fuseau dont l'angle est l'angle B du triangle proposé.

Si l'on considère enfin le triangle ABC, augmenté du triangle A'CB', on voit qu'on peut remplacer le triangle A'CB'

par le triangle symétrique $AC'B$, qui lui est équivalent (577
Par conséquent, la somme indiquée revient au fuseau limi
par les deux demi-circonférences CAC', CBC', c'est-à-dire
fuseau dont l'angle est l'angle C du triangle proposé.

On peut donc écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} ABC + BCA' &= \text{fus}A, \\ ABC + ACB' &= \text{fus}B, \\ ABC + A'CB' &= \text{fus}C. \end{aligned}$$

La somme des premiers membres de ces trois égalités équ
vaut évidemment à la demi-sphère, plus deux fois le triang
ABC. Comme, dans le système adopté, la demi-sphère est me
surée par le nombre 4, si l'on désigne par S, A, B, C, le
nombres qui mesurent l'aire et les angles du triangle ABC, o
a finalement, en se reportant à la mesure du fuseau (578),

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

d'où

$$S = A + B + C - 2. \tag{1}$$

SCOLIES.

580. Soient R le rayon de la sphère évalué en mètres, σ l'ai
du triangle en mètres carrés, et α, β, γ, les angles de ce trian
évalués en degrés; on aura, en observant que le triangle tr
rectangle est égal au huitième $\frac{1}{2}\pi R^2$ de la sphère,

$$A = \frac{\alpha}{90}, \quad B = \frac{\beta}{90}, \quad C = \frac{\gamma}{90}, \quad S = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2},$$

et, par suite, en vertu de la relation (1),

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180}\pi R^2. \tag{2}$$

581. En Analyse, on évalue généralement les angles en pa
ties du rayon (232); alors l'angle droit répond à $\frac{\pi}{2}$, et, si l'o
désigne par A', B', C', les angles du triangle évalués en parti
du rayon, on a

$$A = \frac{A'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2A'}{\pi}, \quad B = \frac{2B'}{\pi}, \quad C = \frac{2C'}{\pi};$$

et, par suite,

$$A + B + C - 2 = \frac{2}{\pi}(A' + B' + C' - \pi).$$

D'ailleurs, le rayon de la sphère étant 1, l'aire du triangle trirectangle est alors mesurée par $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on a, S' étant le nombre qui mesure l'aire du triangle dans ce nouveau système d'unités,

$$S = \frac{S'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2S'}{\pi}.$$

On a donc enfin (579), à cause de la formule (1),

$$S' = A' + B' + C' - \pi.$$

On donne à ce nombre abstrait $A' + B' + C' - \pi$ le nom d'*excès sphérique* du triangle, et l'on peut dire alors que *l'aire d'un triangle sphérique a pour mesure son excès sphérique.*

THÉORÈME.

582. *Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un polygone sphérique de n côtés a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de* $2(n-2)$.

On arrive à ce résultat en décomposant le polygone en triangles à l'aide d'arcs de grand cercle diagonaux issus d'un même sommet, et en appliquant la formule (1) du n° 579 aux $(n-2)$ triangles ainsi obtenus.

En se reportant au numéro précédent, on voit ce qu'on doit entendre par l'*excès sphérique* du polygone proposé.

L'aire d'un polygone sphérique convexe a pour mesure son excès sphérique.

V. — Volume de la sphère.

THÉORÈME.

583. *Lorsqu'un triangle tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface, il engendre un volume qui a pour mesure le produit*

de l'aire que décrit le côté opposé au sommet fixe, par le tiers de la hauteur relative à ce côté.

Soit le triangle ABC ayant son sommet A sur l'axe xy et AE pour hauteur relative à ce sommet : nous distinguerons trois cas :

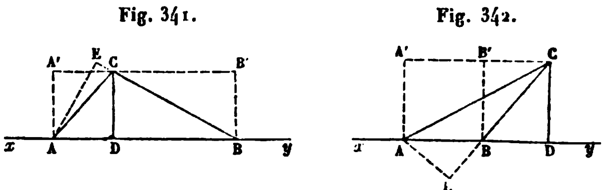


Fig. 341. Fig. 342.

1° Supposons l'un des côtés AB du triangle ABC confondu avec l'axe xy. Suivant que la hauteur CD qui correspond au côté AB tombe à l'intérieur (*fig.* 341) ou à l'extérieur (*fig.* 342) du triangle ABC, le volume engendré par ce triangle est la somme ou la différence des cônes engendrés par les triangles rectangles ACD, BCD.

En même temps, le cylindre engendré par la rotation du rectangle ABB'A', qui a même base et même hauteur que le triangle donné ABC, est la somme (*fig.* 341) ou la différence (*fig.* 342) des cylindres engendrés par la rotation des rectangles ADCA', BDCB', dont le rectangle ABB'A' est lui-même la somme ou la différence. D'ailleurs, le cône ACD est le tiers du cylindre ADCA', et le cône BCD, le tiers du cylindre BDCB' (479). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est le tiers du cylindre ABB'A', et l'on a

$$\text{vol}\,\text{ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{CD}}^2.\text{AB} \quad \text{ou} \quad \text{vol}\,\text{ABC} = \frac{1}{3}\pi\text{CD}.\text{BC}.\text{AE},$$

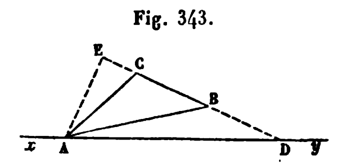
puisque les produits CD.AB et BC.AE représentent tous deux le double de l'aire du triangle donné. Or, π.CD.BC exprime (476) l'aire latérale du cône BCD ou l'aire de la surface engendrée par le côté BC dans la rotation du triangle ABC. Par suite,

$$\text{vol}\,\text{ABC} = \text{aire}\,\text{BC}\cdot\frac{\text{AE}}{3}.$$

2° Supposons (*fig.* 343) que, le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC prolongé vienne rencontrer l'axe au point D.

Le triangle ABC étant la différence des triangles ACD, ABD, le volume qu'il engendre est la différence des volumes engen-

Fig. 343.



drés par ces triangles. On a donc (1°)

$$\text{vol}\,ABC = (\text{aire}\,DC - \text{aire}\,DB)\frac{AE}{3} = \text{aire}\,BC \cdot \frac{AE}{3}.$$

3° Supposons enfin que, le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC soit parallèle à cet axe.

Le volume engendré par le triangle ABC est la somme (*fig.* 344) ou la différence (*fig.* 345) des volumes engendrés par les triangles ABE, ACE. Or, le volume engendré par le

Fig. 344.

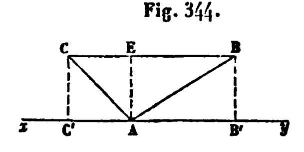
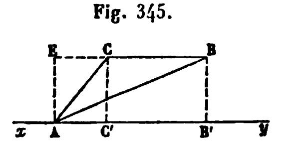


Fig. 345.



triangle ABE est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AB'BE, et le volume engendré par le triangle ACE, les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AC'CE (481). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB, somme (*fig.* 344) ou différence (*fig.* 345) des rectangles AB'BE, AC'CE, et l'on a encore

$$\text{vol}\,ABC = \frac{2}{3}\pi\overline{AE}^2.BC = \text{aire}\,BC \cdot \frac{AE}{3};$$

$2\pi.AE.BC$ exprime en effet l'aire latérale du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB ou l'aire de la surface décrite par le côté BC de ce rectangle.

THÉORÈME.

584. *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface a pour mesure le produit de l'aire que décrit la ligne brisée qui lui sert de base, par le tiers de l'apothème de cette ligne brisée.*

On appelle *secteur polygonal régulier* la surface comprise entre une ligne brisée régulière et les rayons qui correspondent à ses extrémités.

Fig. 346.

Soit (*fig.* 346) le secteur polygonal régulier OABCD, tournant autour du diamètre xy. Décomposons ce secteur en triangles, en joignant au centre O les sommets de sa base ABCD, et appelons a l'apothème de cette base. Le volume engendré par le secteur sera la somme des volumes engendrés par les triangles qui le constituent. Or (583)

$$\text{vol AOB} = \text{aire AB} \cdot \frac{a}{3},$$

$$\text{vol BOC} = \text{aire BC} \cdot \frac{a}{3},$$

$$\text{vol COD} = \text{aire CD} \cdot \frac{a}{3}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{vol OABCD} = (\text{aire AB} + \text{aire BC} + \text{aire CD})\,\frac{a}{3}$$

ou

$$\text{vol OABCD} = \text{aire ABCD} \cdot \frac{a}{3}.$$

SCOLIE.

585. Si l'on se reporte au n° 570, on voit que les volumes engendrés par les demi-polygones réguliers considérés dans ce numéro ont pour expressions, suivant que le nombre de côtés des polygones est pair ou impair,

$$\frac{4}{3}\pi R r^2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}\pi r^2 (R + r).$$

Ces deux expressions conduiraient immédiatement à l'expression du

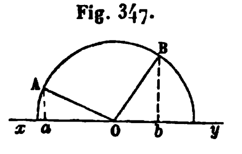
volume de la sphère, si l'on supposait les polygones réguliers considérés remplacés par leurs cercles limites : on devrait, dans cette hypothèse, faire $r = R$, et l'on trouverait, pour le volume de la sphère, $\frac{4}{3}\pi R^3$.

THÉORÈME.

586. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de l'aire de la zone qui lui sert de base, par le tiers du rayon de la sphère.*

Soient (*fig.* 347) $xABy$ le demi-cercle générateur d'une sphère et, dans ce demi-cercle, le secteur AOB dont la projection de la base AB sur xy est ab. Pendant que la demi-circonférence $xABy$ engendre la surface sphérique, l'arc AB engendre une zone (571), et les rayons OA et OB qui limitent le secteur engendrent les surfaces latérales de deux cônes de révolution ayant pour bases les cercles Aa et Bb. La portion du volume de la sphère comprise entre les surfaces latérales de ces deux cônes et la zone AB est le *secteur sphérique* correspondant au secteur circulaire AOB.

Fig. 347.



Un secteur sphérique est donc le volume engendré par la rotation d'un secteur circulaire autour d'un diamètre extérieur à sa surface ; la zone engendrée par l'arc du secteur circulaire est la *base* du secteur sphérique.

Cela posé, le volume d'un secteur sphérique est, par définition, la limite des volumes engendrés par les secteurs polygonaux réguliers inscrits dans le secteur circulaire correspondant, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases.

D'après cela, soient v le volume engendré par un secteur polygonal régulier inscrit, s l'aire de la surface décrite par sa base, a son apothème; soient de même V le volume du secteur sphérique, S l'aire de la zone qui lui sert de base, R le rayon de la sphère. On a (584)

$$v = s \cdot \frac{a}{3}.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du secteur polygonal, v tend vers V, s vers S et a

vers R. On a donc, à la limite,

$$V = S \cdot \frac{R}{3}.$$

COROLLAIRE.

587. *Dans des sphères égales, deux secteurs sphériques sont entre eux comme les zones qui leur servent de bases,* et, par suite, *deux secteurs sphériques dont les bases ont même hauteur sont équivalents.*

THÉORÈME.

588. *Le volume de la sphère a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon.*

Car ce volume peut être considéré comme celui d'un secteur sphérique ayant pour secteur circulaire correspondant un demi-cercle ou pour base l'aire de la surface sphérique elle-même. D'ailleurs, le raisonnement fait pour le secteur sphérique s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

589. V étant le volume d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

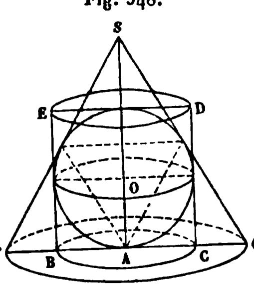
$$V = 4\pi R^2 \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

590. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons ou des diamètres.*

THÉOREME.

591. *L'aire d'une sphère et les aires totales du cylindre droit et du cône équilatéral circonscrits à cette sphère sont proportionnelles aux nombres 4, 6 et 9; les volumes de ces trois corps sont proportionnels aux mêmes nombres* (*fig.* 348).

Fig. 348.



Soient le cercle OA, le carré et le triangle équilatéral circonscrits BCDE et SFG. Pendant que le cercle tournant autour de l'axe SA engendrera la sphère, le carré engendrera le cylindre circonscrit et

le triangle équilatéral engendrera le cône équilatéral circonscrit à la sphère.

Si l'on désigne par R le rayon OA, on a

$$\text{aire surf. sph.} = 4\pi R^2.$$

La base du cylindre circonscrit étant égale à un grand cercle de la sphère et sa hauteur étant le diamètre de la sphère, son aire totale est

$$2\pi R . 2R + 2\pi R^2.$$

On a donc

$$\text{aire tot. cyl.} = 6\pi R^2.$$

Le côté du cône circonscrit, qui est celui du triangle équilatéral circonscrit au cercle OA, est égal à $2R\sqrt{3}$; le rayon de sa base, moitié du côté du triangle équilatéral circonscrit, est égal à $R\sqrt{3}$. On a donc, pour l'aire totale du cône équilatéral circonscrit,

$$\pi R\sqrt{3} . 2R\sqrt{3} + 3\pi R^2,$$

et l'on peut écrire

$$\text{aire tot. cône} = 9\pi R^2.$$

Le théorème est donc vérifié quant aux surfaces.

Le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$, celui du cylindre à $2\pi R^3$. La hauteur du cône, qui est celle du triangle équilatéral circonscrit au cercle OA, est égale à 3R; par suite, son volume a pour expression $3\pi R^3$. Les volumes des trois corps sont donc proportionnels aux nombres $\frac{4}{3}$, 2 et 3, c'est-à-dire aux nombres 4, 6 et 9, comme les aires totales correspondantes.

COROLLAIRE.

592. Si l'on remarque que 6 est la moyenne proportionnelle entre 4 et 9, on peut énoncer les propositions suivantes :

L'aire totale du cylindre droit circonscrit à la sphère est moyenne proportionnelle entre l'aire de la sphère et l'aire totale du cône équilatéral circonscrit; il en est de même du volume du cylindre droit circonscrit par rapport aux volumes des deux autres corps.

Le théorème du n° 591 n'est d'ailleurs qu'un cas particuli d'un théorème plus général que nous allons établir.

THÉORÈME.

593. *Les volumes des polyèdres circonscrits à la mê sphère ou à des sphères égales sont proportionnels aux ai de ces mêmes polyèdres.*

Un polyèdre est *inscrit* dans une sphère, lorsque tous s sommets appartiennent à la surface de cette sphère; polyèdre est *circonscrit* à une sphère, lorsque toutes ses fa sont tangentes à cette sphère. Dans le premier cas, la sph est *circonscrite* au polyèdre; dans le second cas, elle lui e *inscrite*.

Cela posé, décomposons les polyèdres circonscrits don en pyramides, en prenant pour centres de décomposition l centres mêmes des sphères considérées. Chaque polyèd aura pour mesure de son volume son aire multipliée par tiers du rayon de la sphère inscrite (466). En désignant p V et v les volumes de deux quelconques des polyèdr par S et s leurs aires, par R le rayon commun des sphères, aura donc

$$V = S \cdot \frac{R}{3}, \quad v = s \cdot \frac{R}{3},$$

et, par suite,

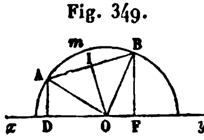
$$\frac{V}{v} = \frac{S}{s}.$$

THÉORÈME.

594. *Le volume engendré par un segment circulaire tou nant autour d'un diamètre extérieur à sa surface équiva au sixième du cylindre qui a pour rayon la corde du segme et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe.*

Le segment AmB (*fig.* 349) est la différence du secteur circulaire AOB et du triangle isocèle AOB; la portion du volume de la sphère engendrée par la rotation de ce segment sera donc égale à la différence des volumes du secteur sphérique AOB et du triangle tournant AOB.

Fig. 349.



DF étant la projection de AB sur xy et OI la hauteur du

triangle AOB, on aura (586, 571, 583, 567)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB} \cdot \frac{OA}{3} = \frac{2}{3}\pi\overline{OA}^2 . DF,$$

$$\text{vol AOB} = \text{aire AB} \cdot \frac{OI}{3} = \frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2 . DF.$$

Par suite,

$$\text{vol A}m\text{B} = \frac{2}{3}\pi\left(\overline{AO}^2 - \overline{OI}^2\right) DF.$$

Le triangle rectangle OIA donnant

$$\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4},$$

il vient, en réduisant,

$$\text{vol A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . DF,$$

ce qui vérifie l'énoncé.

THÉORÈME.

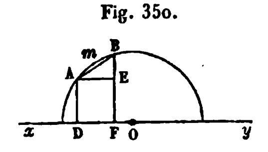
595. *Le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant pour hauteur commune celle du segment et pour bases respectives les bases du segment.*

On appelle *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans sécants *parallèles*. Les cercles déterminés par ces plans parallèles sont les *bases* du segment sphérique, et leur distance en est la *hauteur*.

Lorsqu'un des plans parallèles devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à un point, et l'on a un segment sphérique à *une base*.

Cela posé, si l'on se reporte à la *fig.* 350, on voit que, tandis que le demi-cercle OA engendre la sphère en tournant autour de son diamètre xy, le trapèze mixtiligne DAmBF, obtenu en abaissant sur l'axe les perpendiculaires AD et BF, engendre un segment sphérique ayant pour bases les cercles DA et FB et pour hauteur DF. Ce segment est donc la somme des volumes engendrés par le segment

Fig. 350.



circulaire AmB et le trapèze rectangulaire DABF. On a d'abord (594)

$$\text{vol}\,AmB = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2.DF.$$

Le trapèze DABF engendrant un tronc de cône de révolution, on a aussi (498)

$$\text{vol}\,DABF = \frac{1}{3}\pi DF\left(\overline{BF}^2 + \overline{AD}^2 + BF.AD\right).$$

Par suite,

$$\text{vol}\,DAmBF = \frac{1}{6}\pi DF\left(\overline{AB}^2 + 2\overline{BF}^2 + 2\overline{AD}^2 + 2\,BF.AD\right).$$

D'ailleurs, la corde AB est liée à la hauteur DF et aux rayons BF et AD des bases du segment sphérique par la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{DF}^2 + (BF - AD)^2$$

ou

$$\overline{AB}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,BF.AD.$$

En substituant cette valeur de $\overline{AB}^2$ et en simplifiant, il vient

$$\text{vol}\,DAmBF = \frac{1}{6}\pi DF\left(\overline{DF}^2 + 3\overline{BF}^2 + 3\overline{AD}^2\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{vol}\,DAmBF = \frac{1}{6}\pi\overline{DF}^3 + \frac{1}{2}\left(\pi\overline{BF}^2.DF + \pi\overline{AD}^2.DF\right),$$

de manière à vérifier l'énoncé (589, 443).

Si le segment considéré n'a qu'une base, c'est-à-dire si (*fig.* 350) le point D vient occuper l'une des extrémités du diamètre xy, on a simplement

$$\text{vol}\,DmBF = \frac{1}{6}\pi\overline{DF}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BF}^2.DF.$$

SCOLIE.

596. Quand le segment sphérique n'a qu'une base (*fig.* 350), on peut exprimer son volume V en fonction de sa hauteur $DF = h$ et du rayon R de la sphère. On a alors, d'après la formule précédente,

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BF}^2.h.$$

D'ailleurs (167),

$$\overline{BF}^2 = h(2R - h),$$

d'où

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2(2R - h)$$

ou, en simplifiant,

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)\cdot$$

THÉORÈME.

597. *Le volume d'une pyramide sphérique a pour mesure le produit de sa base par le tiers du rayon de la sphère.*

Une *pyramide sphérique* est la portion du volume de la sphère comprise entre les faces d'un angle polyèdre dont le sommet est au centre de la sphère; le polygone sphérique correspondant à cet angle polyèdre est la *base* de la pyramide. Deux pyramides sphériques sont dites *symétriques* lorsqu'elles ont pour bases des polygones sphériques symétriques.

On appelle *onglet* la portion du volume de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles PAP′, PBP′ (*fig.* 339); le fuseau correspondant est la *base* de l'onglet, et son angle est l'*angle* de l'onglet.

On démontre que :

1° *Deux pyramides sphériques triangulaires symétriques sont équivalentes* (577);

2° *Lorsqu'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité de volume la pyramide trirectangle qui est le huitième du volume de la sphère, un onglet a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle* (578);

3° *Dans le même système d'unités, le volume d'une pyramide sphérique triangulaire a pour mesure le nombre* $A + B + C - 2$, A, B, C, *étant les mesures des angles du triangle sphérique qui sert de base à la pyramide* (579).

Il résulte de là que le rapport du volume d'une pyramide sphérique triangulaire à l'aire de sa base est égal au rapport de la pyramide sphérique trirectangle au triangle trirectangle; mais ce dernier rapport est égal à celui du volume de la sphère à son aire, c'est-à-dire au tiers du rayon. Donc le volume de la pyramide sphérique triangulaire est égal au produit de

sa base par le tiers du rayon ; et ce théorème s'étend à l pyramide sphérique polygonale, en décomposant sa base e triangles.

VI. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

598. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques* CD *ayant une base fixe* DE *et dans lesquels la différence entre l'angle* *sommet* C *et la somme* D + E *des angles à la base demeure constant est un petit cercle passant par les points* D *et* E (*fig.* 351).

Soient DCE un des triangles satisfaisant aux conditions de l'énoncé P le pôle du petit cercle circonscrit à ce triangle; l trois triangles PCD, PDE, PEC, sont alors isocèles. en résulte immédiatement, en se reportant aux no tions de la figure,

Fig. 351.

$$C - (D + E) = 2\delta.$$

Par conséquent, l'angle δ est constant et le trian isocèle PDE est fixe, de sorte que la distance PC = est elle-même constante. Le sommet C, dont on cherch le lieu, est donc toujours sur le petit cercle décrit du point P comme pô avec le rayon sphérique PD, ce qui justifie l'énoncé.

THÉORÈME.

599. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques* AB *ayant une base fixe* AB *et une aire constante, est un petit cercle passa par les points* D *et* E, *qui sont diamétralement opposés aux extrémités* *et* B *de la base* AB (*fig.* 351).

Ce théorème est une conséquence du précédent.

En effet, si l'aire du triangle ABC est constante, la fonction de se angles A + B + C — 2 est elle-même constante (579). Mais, si l'on achève les demi-circonférences ACE, BCD, en considérant l'hémisphère limit par le grand cercle dont la base AB fait partie, on obtient un triang CDE dans lequel on a, d'après les fuseaux formés, A = 2 — E, B = 2 — D. Par suite, l'expression A + B + C — 2 revenant à C — (D + E) + 2, l'expression C — (D + E) est elle-même constante, et l'on est précisément ramené à la question du n° 598, puisque, la base AB étant fixe, il en est de même de la base DE.

Le théorème qu'on vient de démontrer est souvent désigné par le nom de son auteur, le géomètre Lexell.

On peut proposer sur la sphère un grand nombre de problèmes inté-

essants, où l'Algèbre intervient utilement. Nous allons en résoudre quelques-uns par cette voie.

PROBLÈME.

600. *Inscrire dans une sphère un cône dont l'aire convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique terminée au même cercle* (*fig.* 352).

Désignons par x la hauteur AS du cône et par R le rayon de la sphère. La hauteur AD de la calotte sphérique aura pour expression $2R - x$. L'énoncé du problème exige qu'on ait

$$\pi . AB . SB = 2\pi R(2R - x),$$

d'où

$$AB^2 . SB^2 = 4R^2(2R - x)^2.$$

Mais

$$AB^2 = x(2R - x) \quad \text{et} \quad SB^2 = 2Rx.$$

En substituant, il vient

$$2Rx^2(2R - x) = 4R^2(2R - x)^2,$$

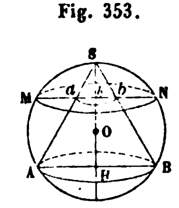
d'où, en supprimant le facteur commun $2R(2R - x)$ et en écartant la solution $x = 2R$, qui convient en ce sens que le cône et la calotte cessent alors en même temps d'exister,

$$x^2 = 2R(2R - x).$$

Cette équation prouve immédiatement que l'inconnue x est le plus grand segment du diamètre divisé en moyenne et extrême raison (190). Deux zones étant proportionnelles à leurs hauteurs, on voit que le plan de la base du cône cherché partage aussi la surface de la sphère en moyenne et extrême raison.

Fig. 352.

Fig. 353.



PROBLÈME.

601. *Un cône équilatéral étant inscrit dans une sphère, chercher entre quelles limites peut varier la différence des sections déterminées dans ces deux corps par un plan parallèle à la base du cône* (*fig.* 353).

Le cône étant équilatéral, sa hauteur SH est $\frac{3R}{2}$, et le rayon AH de sa base, moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle qui

engendre la sphère, est $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, R désignant le rayon de la sphère donnée.

A une distance $Sh = x$ du sommet S, menons un plan sécant parallèle à la base du cône. La section faite dans la sphère aura pour expression $\pi.\overline{Mh}^2$; celle faite dans le cône aura pour expression $\pi.\overline{ah}^2$. On a d'ailleurs, d'après la figure,

$$\overline{Mh}^2 = x(2R - x) \quad \text{et} \quad \frac{ah}{AH} = \frac{Sh}{SH},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ah}{\frac{R}{2}\sqrt{3}} = \frac{x}{\frac{3R}{2}}, \quad \text{d'où} \quad \overline{ah}^2 = \frac{x^2}{3}.$$

La différence des deux sections est donc

$$\pi x(2R - x) - \frac{\pi x^2}{3},$$

et, si on la désigne par D, on a la relation

$$D = 2\pi.x\left(R - \frac{2x}{3}\right).$$

Cette différence s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \frac{3R}{2}$. En effet, dans le premier cas, le plan sécant est tangent à la sphère au point S; dans le second, il se confond avec la base du cône. Entre ces deux valeurs égales à zéro, D doit nécessairement passer par un *maximum*, c'est-à-dire que, le rayon de la section faite dans la sphère croissant d'abord plus rapidement que le rayon de la section faite dans le cône, D commence par croître à partir de zéro, pour diminuer ensuite et revenir à zéro.

Pour trouver le maximum de D, nous poserons $\frac{2x}{3} = y$, d'où $x = \frac{3y}{2}$. En substituant, il vient

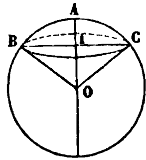
$$D = 3\pi.y(R - y).$$

Le maximum de D ne dépend que de celui du produit $y(R - y)$, et, la somme de ces deux facteurs étant égale à la constante R, leur produit est maximum lorsqu'on a $y = \frac{R}{2}$ (t. I, *Alg. élém.*, 285), c'est-à-dire $x = \frac{3R}{4}$. D est donc maximum lorsque le plan sécant passe par le milieu de la hauteur du cône SAB, et cette valeur maximum de D est égale aux $\frac{3}{4}$ de l'aire d'un grand cercle. Lorsque le plan sécant passe par le centre de la sphère, D est égal aux $\frac{2}{3}$ de l'aire d'un grand cercle.

PROBLEME.

602. *Couper une sphère par un plan de manière que le segment sphérique déterminé par ce plan et le secteur sphérique ayant pour base la calotte qui termine le segment soient dans un rapport donné* (*fig.* 354).

Fig. 354.



Soient x la hauteur AI du segment, c'est-à-dire la distance du plan sécant au point A, et R le rayon de la sphère. Le volume du secteur a pour expression $\frac{2}{3}\pi R^2 x$; le volume du segment est représenté par $\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$. Si le rapport du secteur au segment est désigné par $\frac{p}{q}$, on doit avoir

$$\frac{\frac{2}{3}\pi R^2 x}{\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)} = \frac{p}{q}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2R^2}{x(3R - x)} = \frac{p}{q}.$$

En chassant les dénominateurs, on arrive à l'équation du second degré

$$px^2 - 3pRx + 2qR^2 = 0,$$

et l'on en déduit

$$x = \frac{3pR \pm \sqrt{9p^2R^2 - 8pqR^2}}{2p}.$$

En divisant ses deux termes par p, on peut mettre cette valeur sous la forme

$$x = \frac{R\left(3 \pm \sqrt{9 - 8\frac{q}{p}}\right)}{2}.$$

Pour que la valeur de x soit réelle, il faut qu'on ait $9 - 8\frac{q}{p} > 0$, c'est-à-dire $\frac{p}{q} > \frac{8}{9}$.

Si l'on suppose $\frac{p}{q} = 1$, il vient

$$x = \frac{R(3 \pm 1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$x' = 2R \quad \text{et} \quad x'' = R.$$

Dans le premier cas, le segment et le secteur se confondent avec la sphère; dans le second, avec la moitié de la sphère.

Si l'on suppose $\frac{p}{q} = 2$, c'est-à-dire si le plan sécant divise le secteur sphérique en deux parties équivalentes, on a

$$x = \frac{R(3 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

La première valeur surpasse le diamètre de la sphère et doit être rejetée. La seconde valeur $x = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2}$ est seule admissible et représente le plus petit segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

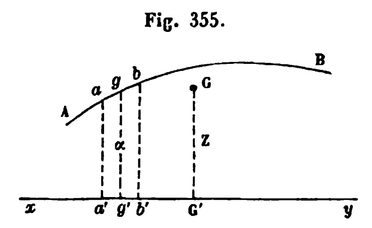
THÉORÈME.

603. *L'aire engendrée par une ligne plane quelconque, tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan, a pour mesure le produit de sa longueur* (221) *par la circonférence que décrit son centre des moyennes distances.*

Nous avons défini précédemment (86) le *centre des moyennes distances* d'une série de points donnés dans un plan. D'après cette définition, on entend par *centre des moyennes distances d'une ligne plane quelconque* le centre qu'on obtient en considérant les points milieux des *éléments égaux* infiniment petits dans lesquels on peut supposer que cette ligne a été divisée.

Cela posé, soient (*fig.* 355) la courbe plane AB de longueur L et l'axe xy.

Fig. 355.



Divisons cette courbe en éléments égaux tels que ab, et représentons par α l'ordonnée du milieu g de ab par rapport à xy.

ab, étant infiniment petit, peut être regardé comme rectiligne (226); cet élément, en tournant autour de l'axe, engendre ainsi l'aire d'un tronc de cône, et cette aire a pour expression (497)

$$ab \cdot 2\pi\alpha.$$

Si l'on désigne par S l'aire totale engendrée par la rotation complète de la courbe AB, on peut donc poser

$$S = \Sigma ab \cdot 2\pi\alpha.$$

Mais, les éléments ab étant égaux entre eux, on peut faire sortir du signe Σ le facteur $2\pi.ab$ et écrire

$$S = 2\pi.ab\,\Sigma\alpha.$$

D'ailleurs, si n est le nombre des éléments ab et si Z est l'ordonnée du centre G des moyennes distances de la courbe AB par rapport à xy, on a, par définition,

$$Z = \frac{\Sigma\alpha}{n} \quad \text{ou} \quad \Sigma\alpha = nZ.$$

Il en résulte

$$S = n.ab.2\pi Z,$$

c'est-à-dire, puisque l'on a à la limite $n.ab = L$,

$$S = L.2\pi Z.$$

Le centre G reçoit souvent le nom de *centre de gravité de la courbe* AB (*voir* la Mécanique).

*SCOLIE.

604. Proposons-nous, comme application, de trouver l'*expression de l'aire engendrée par une circonférence de rayon r, tournant autour d'un axe xy qui est situé dans son plan et qui ne la coupe pas.*

Soit d la distance du centre de cette circonférence à l'axe xy. Le centre d'une circonférence est évidemment le centre des moyennes distances de ses éléments égaux ou son centre de gravité; car, dans la recherche du centre des moyennes distances, il est clair qu'on peut remplacer plusieurs points par leur centre particulier, et le centre qui correspond aux extrémités d'un diamètre quelconque est le centre même de la circonférence. L'aire de la surface engendrée, qui est celle d'un *tore*, a donc pour expression

$$2\pi r.2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

THÉORÈME.

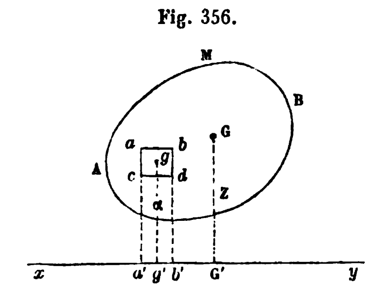
605. *Le volume engendré par une surface plane quelconque tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan a pour mesure le produit de l'aire génératrice par la circonférence que décrit son centre des moyennes distances.*

On entend par *centre des moyennes distances d'une aire plane quelconque* le centre qu'on obtient en considérant les centres des *éléments rectangulaires égaux* infiniment petits dans lesquels on peut supposer que la surface donnée a été divisée par deux séries de droites parallèles, menées à angle droit.

Cela posé, soient (*fig.* 356) la surface AMB, dont l'aire est S, et l'axe xy. Divisons cette surface en éléments rectangulaires égaux tels que $abcd$,

dont les côtés soient les uns parallèles, les autres perpendiculaires à xy, et représentons par α la distance du centre g du rectangle $abcd$ à l'axe xy.

Fig. 356.



$abcd$, en tournant autour de l'axe, engendre un volume qui est la dif-férence des deux cylindres décrits par les rectangles $aba'b'$, $cda'b'$. Ce volume a donc pour expression

$$\pi ab\left(\overline{aa'}^2 - \overline{ca'}^2\right) = 2\pi ab\frac{aa' + ca'}{2}(aa' - ca').$$

Mais $aa' - ca' = ac$, et le produit $ab.ac$ exprime l'aire du rectangle $abcd$. De plus, on a évidemment $\frac{aa' + ca'}{2} = gg' = \alpha$.

Le volume élémentaire engendré par $abcd$ est donc égal à

$$abcd.2\pi\alpha.$$

Par suite, V étant le volume engendré par la rotation complète de l'aire totale S, on peut poser

$$V = \Sigma\, abcd.2\pi\alpha.$$

Mais, les éléments $abcd$ étant supposés égaux entre eux, on peut faire sortir du signe Σ le facteur $2\pi.abcd$ et écrire

$$V = 2\pi.abcd\,\Sigma\alpha.$$

D'ailleurs, si n est le nombre des éléments $abcd$ et si Z est l'ordonnée du centre G des moyennes distances de la surface AMB par rapport à xy, on a, par définition,

$$Z = \frac{\Sigma\alpha}{n} \quad \text{ou} \quad \Sigma\alpha = nZ.$$

Il en résulte

$$V = n.abcd.2\pi Z,$$

c'est-à-dire, puisqu'on a à la limite $n.abcd = S$,

$$V = S.2\pi Z.$$

Le centre G reçoit souvent le nom de *centre de gravité de la surface* AMB (*voir* la Mécanique).

SCOLIES.

606. Proposons-nous, comme application, de trouver le volume du *tore*. n conservant les notations du n° 604, on a immédiatement, pour l'expres-on de ce volume,

$$\pi r^2 . 2\pi d = 4\pi^2 r^2 d.$$

Le volume du tore est donc égal à son aire multipliée par le rayon du rcle générateur.

607. Les deux propositions qui précèdent constituent le *théorème* de LDIN.

Les anciens les connaissaient déjà, et on les trouve mentionnées dans *collections* de PAPPUS.

CHAPITRE V.

SIMILITUDE ET SYMÉTRIE DANS L'ESPACE.

I. — Des polyèdres semblables.

608. On donne le nom de *polyèdres semblables* aux polyèd qui ont leurs angles polyèdres égaux et qui sont compris so un même nombre de faces semblables chacune à chacune.

L'égalité des angles polyèdres entraîne évidemment l'é lité des angles dièdres homologues.

On appelle *homologues* les éléments (faces, arêtes, di dres, etc.) qui se correspondent dans deux polyèdres se blables.

609. *Les arêtes homologues de deux polyèdres sembla sont proportionnelles.*

Car les faces semblables de ces polyèdres ayant le mê rapport de similitude, puisqu'une même arête appartient s chaque polyèdre à deux faces adjacentes, le rapport de de arêtes homologues quelconques est constant.

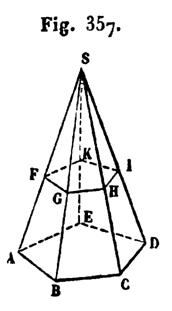
THÉORÈME.

610. *En coupant une pyramide par un plan parallèle base, on détermine une seconde pyramide semblable à première.*

Soit (*fig.* 357) la pyramide SABCDE, dans laquelle un parallèle à la base a déterminé la section FGHIK. Les d pyramides SABCDE, SFGHIK, ont leurs faces semblables, les polygones ABCDE, FGHIK, sont semblables (456), et faces latérales SAB et SFG, SBC et SGH, ..., le sont aussi suite du parallélisme des côtés de ces deux polygones.

Quant aux angles polyèdres, l'angle polyèdre S est commun, et deux angles trièdres homologues, tels que A et F, sont

Fig. 357.



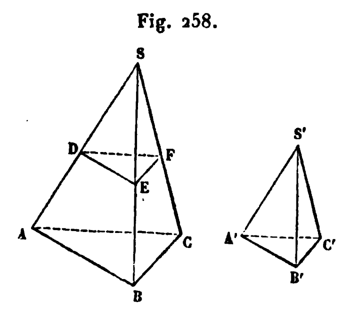
égaux comme ayant un angle dièdre commun compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, savoir : l'angle dièdre SA commun, la face SAB égale à la face SFG et la face SAE égale à la face SFK.

THÉORÈME.

611. *Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Soient (*fig.* 358) les pyramides SABC, S'A'B'C', dans lesquelles l'angle dièdre SA est égal à l'angle dièdre S'A', et les

Fig. 258.



faces SAB, SAC, semblables aux faces S'A'B', S'A'C', et semblablement placées.

Portons la seconde pyramide sur la première, de manière qu'elles aient même sommet et que les faces homologues de leurs angles dièdres égaux coïncident. Le triangle S'A'B' étant semblable au triangle SAB et le point A' tombant en D sur SA,

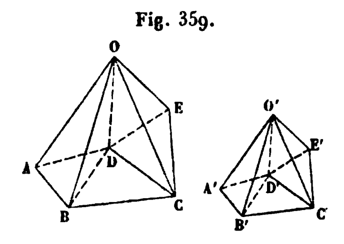
S′B′ se confondra avec SB, et le point B′ viendra en un point E tel, que DE soit parallèle à AB. De même, le triangle S′A′C′ étant semblable au triangle SAC, S′C′ se confondra avec SC, et le point C′ viendra en un point F tel, que DF soit parallèle à AC. La base A′B′C′ occupera donc alors la position DEF, et son plan sera parallèle au plan de la base ABC (320). La pyramide SDEF étant semblable à la pyramide SABC (610), il en est de même de la pyramide S′A′B′C′ qu'elle représente.

THÉORÈME.

612. *Deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés sont semblables.*

Soient (*fig.* 359) OABD, OBCD, OCDE, ..., O′A′B′D′, O′B′C′D′, O′C′D′E′, ..., deux séries de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés; le polyèdre

Fig. 359.



formé par les premiers tétraèdres est semblable au polyèdre formé par les seconds.

En effet :

1° Les faces homologues des deux polyèdres sont semblables comme composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés. Considérons, par exemple, la face ABCD du premier polyèdre. Les triangles ABD, BCD, qui la constituent, sont semblables aux triangles A′B′D′, B′C′D′, comme faces homologues de tétraèdres semblables. De plus, les triangles ABD, BCD, étant dans un même plan, les angles dièdres OBDA, OBDC, des deux tétraèdres OABD, OBCD, sont supplémentaires; il en est donc de même des angles dièdres homologues O′B′D′A′, O′B′D′C′, des tétraèdres semblables O′A′B′D′, O′B′C′D′. Par suite, les deux triangles A′B′D′, B′C′D′, sont aussi dans un même plan, et

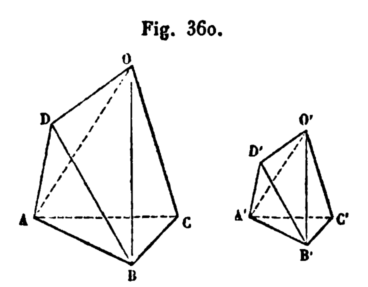
constituent sur le second polyèdre une face A′B′C′D′ semblable à la face ABCD.

2° Les angles polyèdres des deux polyèdres sont égaux comme ayant tous leurs éléments égaux et semblablement disposés; car, les faces homologues des deux polyèdres étant semblables et semblablement disposées, leurs angles polyèdres ont d'abord toutes leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées. De plus, les angles dièdres homologues de ces angles polyèdres sont égaux, soit comme dièdres homologues de deux tétraèdres semblables, soit comme somme d'angles dièdres égaux. L'angle dièdre BCDE, par exemple, formé par les deux faces ABCD, CDE, du premier polyèdre, est la somme des deux angles dièdres BCDO, ECDO, qui appartiennent aux deux tétraèdres OBCD, OCDE; et l'angle dièdre B′C′D′E′, formé par les deux faces A′B′C′D′, C′D′E′, du second polyèdre, est la somme des deux angles dièdres homologues B′C′D′O′, E′C′D′O′, qui appartiennent aux deux tétraèdres semblables O′B′C′D′, O′C′D′E′.

613. Réciproquement, *deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

Soit (*fig.* 360) un point O pris dans l'intérieur du premier polyèdre; décomposons-le en tétraèdres en prenant le point O

Fig. 360.



pour centre de décomposition (466), et soit OABC l'un des tétraèdres obtenus. Les points A, B, C, ayant pour homologues sur le second polyèdre les points A′, B′, C′, menons un plan O′A′B′ faisant au-dessus de A′B′C′ un angle dièdre égal à celui que forme le plan AOB au-dessus de ABC, et, dans ce plan O′A′B′, construisons le triangle O′A′B′ semblable au

triangle OAB. En prenant le point O′ pour centre de décomposition, on décompose donc le second polyèdre en tétraèdres qui correspondent à ceux du premier polyèdre, et il reste seulement à prouver que ces tétraèdres sont semblables deux à deux.

Soit D un quatrième sommet du premier polyèdre, tel que les deux triangles ABC, ABD, aient un côté commun et soient situés sur la même face ou sur deux faces adjacentes. Comparons les deux tétraèdres OABD, O′A′B′D′. Les faces OAB, O′A′B′, sont semblables comme faces homologues des deux tétraèdres semblables OABC, O′A′B′C′; les faces ABD, A′B′D′, le sont aussi comme triangles homologues de deux faces semblables des polyèdres donnés. De plus, si les deux triangles ABC, ABD, sont dans un même plan, les deux dièdres OABD, O′A′B′D′, sont égaux comme suppléments des angles dièdres égaux OABC, O′A′B′C′; si les deux triangles ABC, ABD, ne sont pas dans un même plan, les deux angles dièdres OABD, O′A′B′D′, sont encore égaux comme différences des angles dièdres égaux, DABC et OABC d'une part, D′A′B′C′ et O′A′B′C′ d'autre part. Dans les deux cas, les tétraèdres OABD, O′A′B′D′, sont semblables (611).

La même démonstration s'appliquera de proche en proche. La similitude des deux tétraèdres considérés en dernier lieu permettra toujours de vérifier la similitude des deux tétraèdres suivants.

SCOLIE.

614. Deux points O et O′ rapportés à deux polyèdres semblables sont dits *homologues*, lorsque, en joignant l'un d'eux O aux sommets consécutifs A, B, C, de l'un des polyèdres et l'autre O′ aux sommets homologues A′, B′, C′, de l'autre polyèdre, on obtient deux tétraèdres OABC, O′A′B′C′, semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polyèdres.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polyèdres semblables, en tétraèdres semblables et semblablement disposés.

Si le point O est extérieur au premier polyèdre, son homologue O′ est aussi extérieur au second polyèdre; il faut alors considérer les deux polyèdres comme composés de tétraèdres additifs et de tétraèdres soustractifs.

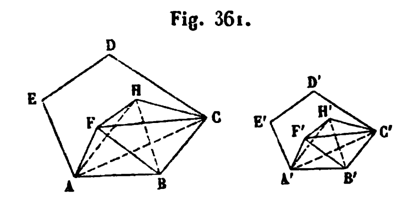
Si le point O coïncide avec l'un des sommets A du premier polyèdre, son homologue O' coïncide avec le sommet A' du second polyèdre, et les diagonales homologues des deux polyèdres, relatives aux sommets A et A', se confondent avec les arêtes latérales de leurs tétraèdres homologues.

615. Deux droites rapportées à deux polyèdres semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues. Telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des faces homologues des deux polyèdres.

Soient (*fig.* 361) ABCDE, A'B'C'D'E', deux faces homo-

Fig. 361.



logues quelconques des polyèdres donnés, et FH, F'H', deux droites homologues quelconques. Formons les tétraèdres homologues FABC, F'A'B'C', HABC, H'A'B'C'. La similitude de ces tétraèdres entraîne celle des tétraèdres FHAC, F'H'A'C'. En effet, les faces FAC, HAC, sont respectivement semblables aux faces F'A'C', H'A'C', et l'angle dièdre FACH, différence des angles dièdres FACB, HACB, est égal à l'angle dièdre F'A'C'H', différence des angles dièdres égaux F'A'C'B', H'A'C'B'. Les deux tétraèdres FHAC, F'H'A'C', étant semblables, on a (609)

$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

THÉORÈME.

616. *Les volumes de deux tétraèdres* SABC, S'A'B'C', *qui ont un angle trièdre égal* (S = S'), *sont proportionnels aux produits des arêtes qui comprennent les angles trièdres égaux* (*fig* 362).

Les deux tétraèdres proposés ayant un même angle trièdre,

on peut toujours les supposer placés l'un dans l'autre, comme l'indique la figure. Faisons alors passer un plan par les som-

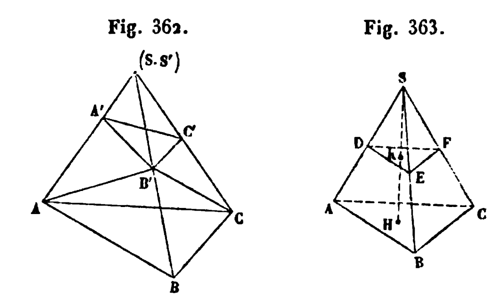


Fig. 362. Fig. 363.

mets A, B', C. Les deux tétraèdres B'A'C'S' et B'ACS, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases S'A'C', SAC qui ont un angle commun. On peut donc écrire (265)

(1) $$\frac{B'A'C'S'}{B'ACS} = \frac{S'A'C'}{SAC} = \frac{S'A'.S'C'}{SA.SC}.$$

De même, les tétraèdres CS'AB' et CSAB ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases S'AB', SAB, qui ont encore un angle commun. Il en résulte

(2) $$\frac{CS'AB'}{CSAB} = \frac{S'AB'}{SAB} = \frac{S'A.S'B'}{SA.SB} = \frac{S'B'}{SB}.$$

Multiplions alors membre à membre les égalités (1) et (2), et simplifions le résultat en remarquant que les deux tétraèdres B'ACS et CS'AB' ne font qu'un. Il vient alors, en changeant simplement l'ordre des lettres dans les termes du premier membre,

$$\frac{S'A'B'C'}{SABC} = \frac{S'A'.S'B'.S'C'}{SA.SB.SC}.$$

THÉORÈME.

617. *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de similitude de leurs faces homologues,* ou *deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Soient d'abord (*fig.* 363) deux tétraèdres semblables SABC, SDEF, qu'on peut toujours supposer placés l'un dans l'autre,

comme l'indique la figure (611), de manière que leurs bases ABC, DEF, soient parallèles.

On a alors à la fois (616, 609)

$$\frac{SABC}{S'A'B'C'} = \frac{SA.SB.SC}{S'A'.S'B'.S'C'} = \frac{SA}{S'A'}.\frac{SB}{S'B'}.\frac{SC}{S'C'}$$

et

$$\frac{SA}{S'A'} = \frac{SB}{S'B'} = \frac{SC}{S'C'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{SABC}{S'A'B'C'} = \frac{\overline{SA}^3}{\overline{S'A'}^3}.$$

Soient maintenant deux polyèdres semblables P et P'. Le rapport de similitude de leurs faces homologues sera (609) celui de deux arêtes homologues quelconques AB et A'B'. Ces deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés (613), et le rapport de similitude des faces homologues de deux tétraèdres homologues est égal (615) au rapport $\frac{AB}{A'B'}$. Si le polyèdre P est composé des tétraèdres T, T_1, T_2, et le polyèdre P' des tétraèdres homologues T', T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui précède,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T + T_1 + T_2}{T' + T'_1 + T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}.$$

SCOLIE.

618. *Les aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes homologues.*

619. De la relation démontrée (617), on déduit réciproquement

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Donc, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polyèdre dans un rapport donné, l'*échelle* à adopter pour amplifier ou

réduire les arêtes de ce polyèdre est égale à la racine cubique du rapport donné. Par exemple, si le volume du nouveau polyèdre doit être la millième partie de celui du polyèdre donné, il faut faire ses arêtes dix fois plus petites que les arêtes homologues du polyèdre donné.

II. — Des figures homothétiques.

THÉORÈME.

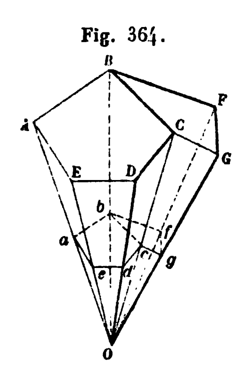
620. *Si l'on joint un point* O *quelconque aux sommets d'un polyèdre* P, *et si l'on prend sur les rayons vecteurs* OA, OB, OC, ..., *des longueurs* Oa, Ob, Oc, ..., *telles qu'on ait*

$$\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}=\frac{OC}{Oc}=\ldots,$$

le polyèdre p, qui a pour sommets les points a, b, c, ..., est semblable au polyèdre P (*fig.* 364).

Considérons la face ABCDE du polyèdre donné et le point a. Si l'on menait par le point a un plan parallèle au plan ABCDE, ce plan couperait en parties proportionnelles les arêtes latérales de la pyramide OABCDE (456) et passerait, par conséquent, par les sommets a, b, c, d, e. Ces sommets forment donc, dans le polyèdre p, une face $abcde$ semblable à la face ABCDE. Les faces correspondantes des deux polyèdres P et p sont donc semblables.

Fig. 364.



Remarquons ensuite que, les arêtes homologues des deux polyèdres étant, d'après ce qu'on vient de dire, parallèles et dirigées dans le même sens, les angles polyèdres homologues des deux polyèdres ont leurs faces égales et leurs angles dièdres égaux chacun à chacun (359); la disposition des parties égales étant d'ailleurs la même dans les deux polyèdres, ces angles polyèdres sont égaux. Les polyèdres P et p sont, par suite, semblables.

Le point O est un *centre de similitude directe.*

Si les longueurs Oa, Ob, Oc, ..., sont portées sur les prolongements des rayons vecteurs OA, OB, OC, ..., on obtient

un polyèdre p', dont les faces sont encore semblables aux faces correspondantes du polyèdre P, mais dont les angles polyèdres sont *symétriques* (371) des angles polyèdres du polyèdre P, par suite du parallélisme en sens inverse des arêtes homologues des deux polyèdres. Le point O est, dans ce cas, un *centre de similitude inverse.*

Pour abréger, on donne le nom d'*homothétie* à la similitude de *forme* et de *position* qu'on vient d'examiner. Les deux polyèdres considérés sont dits *homothétiques,* le point O est le *centre d'homothétie directe* ou *inverse,* le rapport constant $\frac{OA}{Oa}$ est le *rapport de similitude* ou d'*homothétie.* En faisant varier ce rapport de o à $\pm\infty$, on obtient tous les polyèdres directement ou inversement semblables à un polyèdre donné (12, 136).

SCOLIES.

621. Ce qu'on vient de dire par rapport aux sommets d'un polyèdre peut évidemment s'appliquer à un système quelconque de points.

Ainsi, d'une manière générale, étant donné un système de points A, B, C, ..., situés d'une manière quelconque dans l'espace, si, sur les rayons SA, SB, SC, ..., issus d'un point S pris à volonté, on prend à partir de ce point des segments SA′, SB′, SC′, ..., tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = k,$$

k étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A′, B′, C′, .., est *homothétique* au système primitif A, B, C, ... Suivant que le *rapport k d'homothétie* est positif ou négatif, les points homologues tels que A et A′ sont situés d'un même côté ou de côtés différents par rapport au *centre* S *d'homothétie,* et les deux systèmes A, B, C, ..., A′, B′, C′, ... sont dits *homothétiques directs* ou *homothétiques inverses.*

La définition de l'homothétie est donc la même pour les figures de l'espace et pour les figures planes (160).

Suivant que le système proposé est formé de points isolés ou se succédant d'une manière continue, le système homothétique du système donné est lui-même formé de points

isolés ou se succédant d'une manière continue. Les propriétés précédentes s'étendent ainsi aux surfaces courbes.

622. Lorsqu'on transporte l'un des deux systèmes homothétiques parallèlement à lui-même, l'homothétie n'est évidemment pas altérée.

Par conséquent, *les extrémités de droites concourantes et les extrémités d'autres droites concourantes respectivement parallèles et proportionnelles aux premières forment deux systèmes homothétiques.*

L'homothétie des deux systèmes est *directe* ou *inverse*, suivant que les droites parallèles sont dirigées dans le même sens ou en sens contraires.

De plus, si A et B sont deux points du premier système, A′ et B′ les deux points homothétiques du second système, les deux droites AB et A′B′ sont parallèles, et leur rapport est égal au rapport d'homothétie des deux systèmes, c'est-à-dire qu'elles sont de même sens ou de sens contraires, suivant que l'homothétie est directe ou inverse.

623. Les propriétés que nous allons énoncer résultent immédiatement de ce qui précède.

La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première.

L'angle de deux droites est donc égal à celui de leurs droites homothétiques, et une droite qui passe par le centre d'homothétie est à elle-même son homothétique.

La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle au premier; car, si l'on considère dans le plan donné une droite qui tourne autour d'un point A, dans chacune de ses positions cette droite aura pour homothétique une droite parallèle passant par un point fixe A′, homothétique de A. Il résulte de là: 1° qu'*un plan qui passe par le centre d'homothétie est à lui-même son homothétique;* 2° que *l'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs homothétiques.*

Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles, comme limites de sécantes parallèles.

Deux sphères quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses (162); les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres

les deux sphères; ces centres sont, en outre, les sommets des deux cônes qu'on peut circonscrire aux deux sphères. Lorsque les deux sphères sont tangentes, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur*, *inverse* si le contact est *extérieur*.

Comme un cercle peut toujours être considéré comme l'intersection de deux sphères, *la figure homothétique d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace est une circonférence.*

624. *Deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie sont sur une même ligne droite*, qu'on nomme *axe d'homothétie des trois systèmes* (164).

Trois sphères considérées deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse (165). Elles ont donc quatre axes d'homothétie : un *axe d'homothétie directe*, qui contient les trois centres d'homothétie directe, et trois *axes d'homothétie inverse*, qui renferment chacun deux centres d'homothétie inverse et le centre direct qui répond au troisième centre inverse. Ces *quatre axes d'homothétie* sont ceux des trois cercles (165) que l'on obtient en coupant les trois sphères par le plan qui passe par leurs centres.

THÉORÈME.

625. *Lorsque quatre systèmes* P, P′, P″, P‴, *sont homothétiques deux à deux, leurs six centres d'homothétie sont situés dans un même plan.*

En effet, soient respectivement O_1, O_2, O_3, les centres d'homothétie de P et P′, de P et P″, de P et P‴; le plan $O_1O_2O_3$ est à lui-même son homologue dans les systèmes P et P′, puisqu'il contient leur centre O_1; il est aussi à lui-même son homologue dans les systèmes P et P″, puisqu'il contient leur centre O_2. Donc ce même plan est encore à lui-même son homologue dans les systèmes P′ et P″ (624), et, par suite, il contient leur centre d'homothétie. On prouverait de même que ce plan passe par les centres d'homothétie de P′ et P‴, et de P″ et P‴. Il a reçu le nom de *plan d'homothétie* des quatre systèmes P, P′, P″, P‴.

626. Considérons en particulier le *cas de quatre sphères.*

Comme deux sphères sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses, on aura *douze centres d'homothétie*, dont *six directs* et *six inverses*. Il est aisé de voir qu'il y a *huit plans d'homothétie*. En effet, imaginons le tétraèdre dont les sommets sont les centres des quatre sphères; sur chaque face de ce tétraèdre, il y a six centres d'homothétie, trois directs et trois inverses (624). Considérons l'un O des six centres qui sont sur l'une des faces; ce point O appartient à deux droites A et B, dont chacune passe par deux autres centres de la même face. D'ailleurs, ce même point O est commun à une autre face du tétraèdre, et, par suite, il appartient également à deux autres droites C et D situées sur cette seconde face. En combinant les deux droites A et B de la première face avec les deux droites C et D de la seconde, on obtient quatre plans AOC, AOD, BOC, BOD, dont chacun, passant par cinq centres d'homothétie, renferme nécessairement le sixième centre correspondant. Ainsi, par chaque centre O de la première face passent quatre plans d'homothétie; mais chacun de ces plans est commun à trois centres de cette même face. Donc le nombre total des plans d'homothétie est égal à huit.

627. Deux figures de l'espace sont *semblables* lorsque, par un déplacement convenable, on peut amener la seconde sur l'une des homothétiques *directes* de la première. Or, d'après le n° 624, pour avoir tous les systèmes homothétiques à un système donné, il n'est pas nécessaire de faire varier le centre; il suffit, en prenant un centre arbitraire, de faire varier k de o à ∞. Donc on obtiendra toutes les figures semblables à une figure donnée en construisant, avec un centre pris à volonté, les surfaces homothétiques qui répondent à toutes les valeurs du rapport k, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Ainsi, *deux sphères quelconques sont semblables* (622).

La seule figure semblable à une surface conique est cette surface conique elle-même, car, si l'on prend le sommet O pour centre d'homothétie, l'homologue A′ d'un point quelconque A de la surface conique proposée est situé sur la génératrice OA (623).

Enfin, *deux surfaces cylindriques sont homothétiques, lorsque leurs génératrices sont parallèles et leurs directrices deux courbes homothétiques;* car la figure homothétique d'une

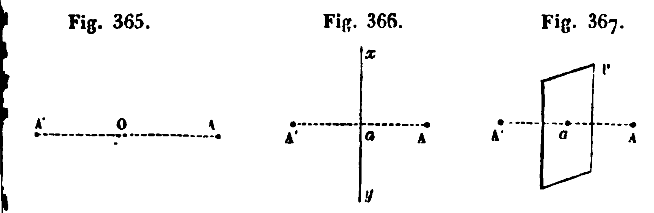
roite est une droite parallèle. Par suite, *les sections par un même plan de deux cylindres homothétiques sont deux courbes homothétiques* dont le centre est à la rencontre du plan sécant et de la parallèle aux génératrices menée par le centre d'homothétie des deux cylindres (623).

III. — Des figures symétriques.

628. Deux points A et A' sont *symétriques par rapport à un centre* O, lorsque ce centre O est le milieu de la droite AA' (*fig.* 365).

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à un axe (*fig.* 366) ou à un plan P (*fig.* 367), lorsque cet axe ou ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite AA'.

Deux figures sont symétriques par rapport à un centre, à un



axe ou à un plan, lorsque leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Les points symétriques des deux figures sont dits *homologues*.

Deux figures symétriques par rapport à un axe sont égales, car une rotation de 180° autour de l'axe, imprimée à l'une des deux figures, amène évidemment cette figure sur l'autre.

La symétrie par rapport à un axe n'offre donc rien de particulier. Aussi, dans la suite de ce paragraphe, ne sera-t-il question que de la symétrie relative à un point ou à un plan.

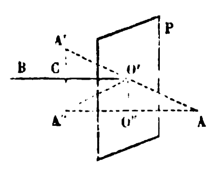
THÉORÈME.

629. *Deux figures* F' *et* F'', *symétriques d'une même figure* F *par rapport à deux centres différents* O' *et* O'', *sont égales* (*fig.* 368) (¹).

(¹) Bravais, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

Soient A un point quelconque de la figure F, A′ son homologue dans la figure F′ et A″ son homologue dans la figure F″. O′ étant le milieu de AA′ et O″ le milieu de AA″, la droite A′A″

Fig. 368.



est parallèle à O′O″ et égale à 2 O′O″. La figure F″ n'est donc que la figure F′ transportée parallèlement à la direction O′O″, d'une quantité égale à 2 O′O″.

COROLLAIRE.

630. La position du centre de symétrie n'influe ni sur la *forme* ni même sur l'*orientation* de la figure symétrique d'une figure donnée.

THÉORÈME.

631. *Si deux figures* F *et* F″ *sont symétriques par rapport à un plan* P, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un centre* O′ *pris à volonté dans ce plan,* et, réciproquement, *si deux figures* F *et* F′ *sont symétriques par rapport à un centre* O′, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un plan quelconque* P *passant par ce centre* (*fig.* 368) [1].

Il suffit de faire tourner la figure F″ dans le premier cas, la figure F′ dans le second, de 180° autour de la perpendiculaire O′CB élevée en O′ au plan P.

En effet, considérons une figure F, un plan P et un point quelconque O′ de ce plan; soient F′ la figure symétrique de F par rapport au point O′, et F″ la figure symétrique de F par rapport au plan P. Le théorème direct et sa réciproque seront démontrés à la fois, si l'on fait voir que les figures F′ et F″ sont symétriques par rapport à la perpendiculaire O′B élevée en O′ au plan P (628). Or, soient A, A′, A″, trois points homo-

(1) Bravais, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

ogues des figures F, F′, F″, et O″ le point où la droite AA″ rencontre le plan P. O′ étant le milieu de AA′ et O″ le milieu de AA″, la droite A′A″ est parallèle à O′O″ et, par suite, perpendiculaire sur O′B. D'ailleurs O′B, étant menée parallèlement à AA″ par le milieu de AA′, passe par le milieu C de A′A″. Donc, enfin, les points A′ et A″ sont symétriques par rapport à la droite O′B.

COROLLAIRES.

632. Deux figures symétriques d'une même figure F, par rapport à deux plans différents P et Q, ne sont autre chose, quant à la *forme*, que la figure symétrique de F par rapport à un centre quelconque (629); elles sont donc superposables. Mais leur *orientation* dans l'espace n'est pas la même, à moins que les plans P et Q ne soient parallèles.

633. En résumé, si l'on fait abstraction de l'orientation pour n'avoir égard qu'à la forme, on voit qu'*une figure* F *n'a qu'une seule figure symétrique*. Toutes les figures obtenues en prenant la figure symétrique de F par rapport à tel centre ou à tel plan qu'on veut sont superposables.

SCOLIE.

634. Telle propriété de deux figures *symétriques* (628) est plus ou moins aisée à démontrer, suivant que l'on considère la symétrie relative à un plan ou à un centre. Le théorème précédent (631) permet de choisir le mode de symétrie qui facilite le plus les raisonnements. C'est généralement la symétrie relative à un centre qui rend les démonstrations plus simples, parce qu'en déplaçant le centre de symétrie, on n'altère pas même l'orientation de la figure symétrique (630).

D'ailleurs, deux figures symétriques par rapport à un centre constituent, relativement à ce centre, deux figures homothétiques inverses dont le rapport d'homothétie ou de similitude est égal à — 1. La proportionnalité se change donc ici en égalité, sauf ce qui peut résulter de l'inversion, et cette remarque permet d'énoncer immédiatement, sans démonstration, les propositions suivantes :

635. (*a*) *La figure symétrique d'une ligne droite est une ligne droite.*

(*b*) *La distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques.*

(*c*) *L'angle de deux droites est égal à l'angle de leurs symétriques.*

(*d*) *La figure symétrique d'un plan est un plan.*

(*e*) *La figure symétrique d'un polygone plan est un polygone égal au premier.*

(*f*) *L'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs symétriques.*

(*g*) *Deux polyèdres symétriques ont : 1° leurs faces égales chacune à chacune* [d'après *e*]; 2° *leurs angles dièdres homologues égaux* [d'après *f*]; 3° *leurs angles polyèdres homologues symétriques* [d'après le parallélisme en sens contraires des arêtes homologues des deux polyèdres (371, 620)].

636. Il importe de se figurer nettement la situation de deux droites symétriques par rapport à un centre ou par rapport à un plan.

Soit AB (*fig.* 369) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un centre donné O'. Prenons d'abord la

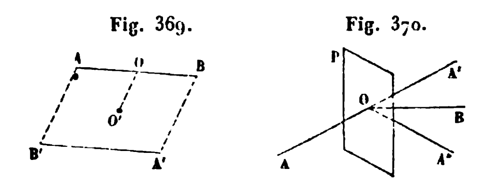


Fig. 369. Fig. 370.

droite symétrique de AB par rapport à son milieu O : le point A aura son symétrique en B et le point B son symétrique en A, de sorte que la droite symétrique de AB, par rapport à son milieu O pris pour centre, sera BA. Pour passer ensuite du centre O au centre O', il suffira (629) de faire décrire, aux points A et B, des droites BA' et AB' parallèles à OO' et doubles de OO'. On trouve ainsi, pour symétrique de AB, la droite A'B' *parallèle à* AB, *de sens contraire, et située à la même distance du centre* O' *de symétrie.*

Soit OA (*fig.* 370) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un plan P qu'elle rencontre en O. En prenant d'abord la droite symétrique de OA par rapport au point O,

on trouve son prolongement OA′, et il suffit (631) de faire tourner OA′ de 180° autour de la perpendiculaire OB au plan P pour avoir la droite OA″ demandée. On voit que *les deux droites* OA *et* OA″, *symétriques par rapport au plan* P, *sont également inclinées de part et d'autre de ce plan, qu'elles rencontrent d'ailleurs au même point* O.

637. Deux plans symétriques par rapport à un centre sont évidemment parallèles et équidistants de ce centre.

Deux plans symétriques par rapport à un plan sont également inclinés de part et d'autre de ce plan, qu'ils coupent d'ailleurs suivant la même droite.

THÉORÈME.

638. *Deux polyèdres symétriques* P *et* P′ *sont équivalents.*

Si l'on décompose le polyèdre P en tétraèdres, à chacun de ces tétraèdres répond un tétraèdre symétrique, et l'ensemble de ces tétraèdres symétriques forme le polyèdre P′. Deux polyèdres symétriques P et P′ étant d'après cela composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux, il suffit de démontrer que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Or, soit (*fig.* 371) SABC un tétraèdre quelconque. Formons

Fig. 371.

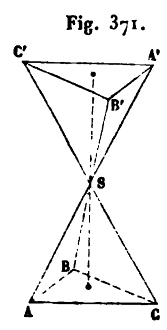
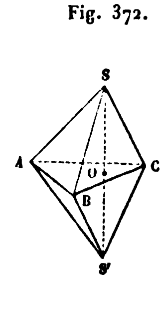


Fig. 372.



son symétrique SA′B′C′ par rapport au point S. Les triangles ABC, A′B′C′, sont égaux (635), et leurs plans sont équidistants du point S (637). Par suite, les deux tétraèdres SABC, SA′B′C′, ayant des bases et des hauteurs égales, sont équivalents.

La symétrie relative à un plan fournirait dans ce cas une

démonstration tout aussi simple; car, comme la propriété dont il s'agit concerne la *grandeur* et non la *situation*, on peut prendre à volonté le plan de symétrie (632). Or, en construisant (*fig.* 372) la figure S'ABC symétrique de SABC par rapport au plan ABC, on voit que les deux tétraèdres SABC, S'ABC, ont même base ABC et des hauteurs égales SO et S'O; d'où résulte leur équivalence.

SCOLIE.

639. Les deux prismes dans lesquels un parallélipipède est décomposé par un plan diagonal sont évidemment symétriques par rapport au centre O du parallélipipède (*fig.* 247). C'est pourquoi ils ont même volume (421), bien qu'ils ne soient pas en général superposables. On ne peut les faire coïncider que lorsqu'ils sont droits.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYÈDRES.

I. — Des polyèdres convexes quelconques.

THÉORÈME.

640. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de 2 est égal au nombre des faces augmenté de celui des sommets.*

Soient A le nombre des arêtes, F celui des faces et S celui des sommets du polyèdre proposé; il faut démontrer l'égalité

(1) $$A + 2 = F + S.$$

Considérons d'abord une surface polyédrale convexe *ouverte*, terminée à une ligne brisée plane ou gauche. Si l'on conserve les notations précédentes, les éléments analogues de cette surface satisferont à la relation

$$A + 1 = F + S.$$

En effet, cette formule est vraie dans le cas d'une seule face; car, pour un polygone, le nombre des arêtes est égal à celui des sommets. D'après un mode de démonstration connu, il suffit donc de prouver que, la formule étant vérifiée dans le cas de F faces, elle l'est encore dans le cas de $F+1$ faces.

Pour cela, modifions la ligne brisée qui termine la surface polyédrale en ajoutant à cette surface un polygone ayant m côtés et m sommets. Cette nouvelle face laissant toujours la surface ouverte, son contour ne pourra coïncider entièrement avec celui de la ligne terminale primitive; et, si elle a avec cette ligne p arêtes communes, elle aura avec elle $p + 1$ sommets communs. En désignant par F′, A′, S′, les nombres de faces, d'arêtes et de sommets de la nouvelle surface polyédrale, on aura donc

$$F' = F + 1,\quad A' = A + m - p,\quad S' = S + m - (p + 1).$$

Ces valeurs satisfaisant encore à la relation $A + 1 = F + S$, la généralité de cette relation est établie.

Cela posé, revenons au cas d'un polyèdre convexe et à l'égalité (1). Pour passer de ce polyèdre à une surface polyédrale ouverte, il suffit d'en enlever une face. Les nombres d'arêtes et de sommets ne seront pas modifiés et resteront A et S; mais le nombre des faces, diminué d'une unité, deviendra $F - 1$. En appliquant la relation trouvée à ces valeurs, on aura donc

$$A + 1 = (F - 1) + S,$$

c'est-à-dire

$$A + 2 = F + S.$$

Le remarquable théorème exprimé par cette égalité a été découvert par Euler. La démonstration qui précède appartient à Cauchy.

COROLLAIRES.

641. Soient, dans le polyèdre proposé, t le nombre des faces triangulaires, q le nombre des faces quadrangulaires, p celui des faces pentagonales, h, h', o, ..., ceux des faces hexagonales, heptagonales, octogonales, ... Chaque arête étant commune à deux faces, on aura évidemment

$$(2) \qquad F = t + q + p + h + h' + o + \ldots,$$

$$(3) \qquad 2A = 3t + 4q + 5p + 6h + 7h' + 8o + \ldots.$$

Soient T, Q, P, H, H', O, ..., les nombres d'angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres, ..., du polyèdre proposé; chaque arête unissant deux sommets, on aura de même

$$(4) \qquad S = T + Q + H + H' + O + \ldots,$$

$$(5) \qquad 2A = 3T + 4Q + 5P + 6H + 7H' + 8O + \ldots.$$

D'après l'égalité (3), *le nombre des faces dont le nombre des côtés est impair* (c'est-à-dire le nombre $t + p + h' + \ldots$) *est toujours pair;* d'après l'égalité (5), *le nombre des angles polyèdres ou des sommets dont le nombre des arêtes est impair* (c'est-à-dire le nombre $T + P + H' + \ldots$) *est toujours pair.*

642. On peut exprimer F en fonction de T, Q, P, H, H', O, ...; il suffit d'éliminer S et A entre les relations (1), (4) et (5). On trouve

$$(6) \qquad 2F = 4 + T + 2Q + 3P + 4H + 5H' + 6O + \ldots.$$

De même, on peut exprimer S en fonction de $t, q, p, h, h', o, \ldots$; il suffit d'éliminer F et A entre les relations (1), (2) et (3). On trouve

$$(7) \qquad 2S = 4 + t + 2q + 3p + 4h + 5h' + 6o + \ldots.$$

SCOLIE.

643. *Si l'on conçoit la surface d'un polyèdre convexe décomposé en plusieurs portions, chaque portion étant une face seule ou le système de plusieurs faces voisines, le théorème d'Euler a encore lieu entre le nombre des portions dont il s'agit, le nombre des arêtes qui servent de limites à ces mêmes portions, et le nombre des sommets compris entre ces arêtes.*

En effet, que les droites qui terminent chaque portion soient ou non dans un même plan, les nombres considérés ne varient pas. Or, dans la première hypothèse, sans rien changer à ces mêmes nombres, on pourrait former un nouveau polyèdre en substituant à chaque portion une face plane terminée au même contour, et le théorème d'Euler serait applicable à ce polyèdre.

Toutes les formules que nous venons d'établir subsistent dans ce cas; seulement, t est alors le nombre des portions de la surface terminées par un contour triangulaire, $q, p, \ldots$, les nombres des portions dont le contour est quadrangulaire, pentagonal, etc.

THÉORÈME.

644. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces triangulaires augmenté de celui des angles trièdres, est au moins égal à huit.*

En effet, si dans la relation (1), qu'on peut écrire

$$4F + 4S = 4A + 8,$$

on remplace F par la valeur (2), S par la valeur (4), et 4A par la somme des valeurs (3) et (5), on trouve

$$t + T = 8 + (p + P) + 2(h + H) + 3(h' + H') + 4(o + O) + \ldots.$$

D'après cela, *il n'existe aucun polyèdre convexe qui ne renferme ni face triangulaire, ni angle trièdre.*

THÉORÈME.

645. 1° *Il n'existe aucun polyèdre convexe dont toutes les faces aient plus de cinq côtés;* 2° *il n'existe aucun polyèdre convexe dont tous les angles polyèdres aient plus de cinq arêtes.*

En effet :

1° Si dans l'inégalité $2A > 3S$, qui résulte de la comparaison des relations (4) et (5), on remplace A et S par les valeurs (3) et (7), on trouve la formule

$$3t + 2q + p > 12 + (h' + 2o + \ldots),$$

qui prouve que t, q et p ne peuvent être nuls à la fois.

2° Si dans l'inégalité $2A > 3F$, qui résulte de la comparaison des

relations (2) et (3), on remplace A et F par les valeurs (5) et (6), o
trouve la formule

$$3T + 2Q + P > 12 + (H' + 2O + \ldots),$$

qui prouve que T, Q et P ne peuvent être nuls à la fois.

SCOLIE.

646. La symétrie de la formule d'Euler par rapport aux nombres F et
et la similitude des équations (2) et (4), (3) et (5), imposent aux rela-
tions qu'on peut en déduire une corrélation remarquable.

THÉORÈME.

647. *Il ne peut exister que cinq espèces de polyèdres convexes don*
toutes les faces aient le même nombre n de côtés et dont tous les angl
polyèdres aient le même nombre m d'arêtes.

En effet, chaque arête appartenant à deux faces et joignant deu
sommets, on a

$$2A = nF = mS.$$

L'élimination de A et de S entre ces équations et la formule d'Eule
donne

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

Pour $n = 3$, cette relation devient

$$F = \frac{4m}{6 - m},$$

et l'on ne peut donner alors à m que les valeurs 3, 4 et 5, auxquell
répondent respectivement les valeurs $F = 4$, $F = 8$, $F = 20$.

Pour $n = 4$ ou $n = 5$, on a

$$F = \frac{2m}{4 - m} \quad \text{ou} \quad F = \frac{4m}{10 - 3m}.$$

On ne peut donner dans les deux cas à m que la valeur 3, et il en résult
$F = 6$ ou $F = 12$.

Pour $n = 6$, on a

$$F = \frac{m}{3 - m},$$

et l'on ne peut donner à m aucune valeur. Il en est de même *a fortior*
pour $n > 6$; ce résultat était d'avance indiqué par le théorème du n° 645

Il n'y a donc que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les
faces aient le même nombre de côtés et tous les angles polyèdres le même

nombre d'arêtes : ce sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre à faces triangles ; l'hexaèdre à faces quadrilatères ; le dodécaèdre à faces pentagones.

THÉORÈME.

648. *L'angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre des sommets diminué de 2.*

L'angle droit étant l'unité d'angle, on sait que, pour une face quelconque de n côtés, la somme des angles est $2n - 4$. En désignant par n, n', n'', ..., les nombres de côtés des différentes faces, on aura donc pour toutes les faces

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) + \ldots .$$

Cette suite contiendra d'ailleurs F termes. La somme cherchée a donc pour expression

$$2(n + n' + n'' + \ldots) - 4F.$$

Chaque côté appartenant à deux faces, la parenthèse est égale à $2A$, et l'on obtient la formule

$$4(A - F) \quad \text{ou} \quad 4(S - 2),$$

d'après le théorème d'Euler.

SCOLIE.

649. On démontre que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces égales, sont égaux ou symétriques, suivant que les faces égales sont ou non semblablement placées.*

On démontre de même que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces semblables, sont semblables ou que le second est semblable à un troisième polyèdre symétrique du premier,* suivant que les faces semblables sont ou non semblablement placées.

Nous renverrons, pour le développement de ces propositions, au *Traité de Géométrie* par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, et nous terminerons ce paragraphe par la résolution du problème suivant, d'après Legendre.

PROBLÈME.

650. *Chercher le nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre convexe.*

1° Le polyèdre est d'une nature déterminée, c'est-à-dire que l'on connaît pour ce polyèdre les nombres A, F, S, t, q, p, h, h', ...

Prenons pour base une des faces du polyèdre. Si elle a n côtés, il faut $2n - 3$ conditions pour la déterminer. Il y a hors de cette base $S - n$ sommets. Pour déterminer un point dans l'espace, il faut trois conditions.

On aurait donc en tout $2n - 3 + 3(S - n)$ ou $3S - n - 3$ conditions. Mais les sommets qui répondent à une même face sont dans un même plan, et trois points suffisent pour déterminer un plan. Par conséquent, pour tous les sommets d'une même face, en sus des trois premiers, il ne faut réellement que deux conditions. On doit donc diminuer $3(S - n)$ de la somme $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) + \ldots$, en désignant par n', n'', n''', ..., les nombres de côtés des $F - 1$ faces qui restent en dehors de la base choisie. Le nombre de conditions demandé est donc finalement

$$3(F + S - 2) - (n + n' + n'' + n''' + \ldots);$$

mais (640, 641)

$$n + n' + n'' + n''' + \ldots = 2A \quad \text{et} \quad S + F - 2 = A.$$

Le nombre cherché se réduit donc à A. Ainsi, *le nombre des données nécessaires pour déterminer un polyèdre*, dans les conditions indiquées, *est égal au nombre de ses arêtes.*

« Remarquez cependant que les données dont il s'agit ne doivent pas » être prises au hasard parmi les lignes et les angles qui constituent les » éléments du polyèdre; car, quoiqu'on eût autant d'équations que d'in- » connues, il pourrait se faire que certaines relations entre les quantités » connues rendissent le problème indéterminé. Ainsi, il semblerait, d'après » le théorème qu'on vient de trouver, que la connaissance des arêtes » seules suffit en général pour déterminer un polyèdre; mais il y a des » cas où cette connaissance n'est pas suffisante. Par exemple, étant donné » un prisme non triangulaire quelconque, on pourra former une infinité » d'autres prismes qui auront des arêtes égales et placées de la même ma- » nière. Car, dès que la base a plus de trois côtés, on peut, en conser- » vant les côtés, changer les angles et donner ainsi à cette base une infi- » nité de formes différentes; on peut aussi changer la position de l'arête » longitudinale du prisme par rapport au plan de la base; enfin, on peut » combiner ces deux changements l'un avec l'autre, et il en résultera » toujours un prisme dont les arêtes ou côtés n'auront pas changé. D'où » l'on voit que les arêtes seules ne suffisent pas dans ce cas pour déter- » miner le polyèdre. Les données qu'il convient de prendre sont celles » qui ne laissent aucune indétermination [1]. »

2° La nature du polyèdre n'est pas déterminée, et l'on connaît seulement le nombre de ses sommets.

Prenons trois de ces sommets à volonté, en construisant un triangle où il entre trois des éléments donnés. Si l'on considère ce triangle comme base, il y a $S - 3$ sommets hors de cette base, et la détermination de chacun d'eux exige trois conditions. Le nombre cherché est donc ici $3 + 3(S - 3)$ ou $3S - 6$.

---

(1) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, 14e édition. Note VIII.

SCOLIE.

651. Si un côté et A — 1 angles déterminent un polyèdre de nature nnée, un autre côté pris à volonté et les mêmes angles déterminent un lyèdre semblable au premier. Donc, *pour que deux polyèdres de même ture soient semblables, il faut* A — 1 *conditions.*

Si les deux polyèdres ne sont pas de nature déterminée, et s'ils ont lement le même nombre S d'angles polyèdres, il faut 3S — 7 condis pour qu'ils soient semblables.

II. — Des polyèdres réguliers convexes.

652. Un *polyèdre régulier* est un polyèdre dont toutes les faces sont s polygones réguliers égaux et dont tous les angles polyèdres sont aux entre eux.

THÉORÈME.

653. *Il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle du n° 647. On ut d'ailleurs la démontrer directement en quelques mots.

La somme des faces d'un angle polyèdre convexe devant être inférieure quatre angles droits (374), si les faces sont des triangles équilatéraux, ne peut assembler autour d'un même point, pour former un angle lyèdre, que *trois* ou *quatre* ou *cinq* de ces triangles. On construit nsi : le *tétraèdre* régulier, compris sous quatre triangles équilatéraux ; *ctaèdre* régulier, compris sous huit triangles équilatéraux ; l'*icosaèdre* gulier, compris sous vingt triangles équilatéraux. Au delà, *six* triangles uilatéraux assemblés autour d'un même point donnent six angles plans nt la somme est égale à quatre angles droits ; il n'y a plus d'angle lyèdre : les six triangles se trouvent développés dans un même plan.

On ne peut employer les carrés et les pentagones réguliers qu'en les semblant par *trois,* puisque l'angle d'un carré est droit et que celui d'un ntagone régulier est égal à $\frac{6}{5}$ d'angle droit. On a ainsi l'*hexaèdre* réguer ou cube, compris sous six carrés égaux, et le *dodécaèdre* régulier, mpris sous douze pentagones réguliers.

Aucun autre polyèdre régulier convexe n'est possible, puisque, l'angle d'un hexagone régulier étant égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit, trois angles d'hexagone régulier font en somme quatre angles droits.

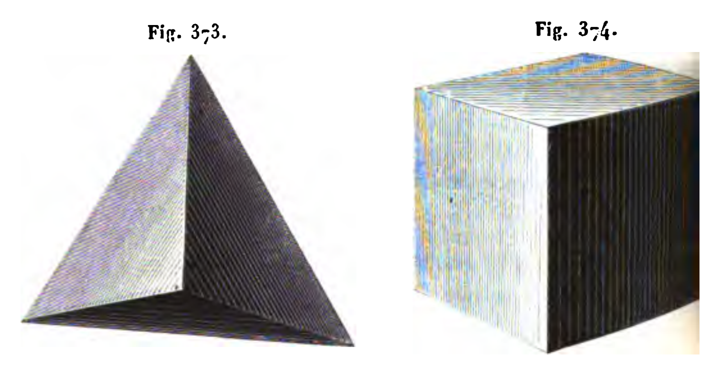
Nous prouverons l'existence des cinq polyèdres réguliers énoncés, en montrant comment on peut effectuer leur construction.

PROBLÈME.

654. *Construire un polyèdre régulier, connaissant son arête.*

La construction du tétraèdre régulier (*fig.* 373) et celle du cube (*fig.* 374) ne peuvent offrir aucune difficulté, d'après ce qui a été dit aux

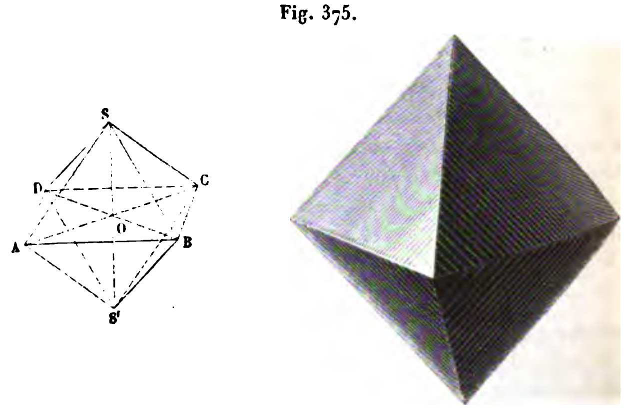
n°s 398 et 465. Nous ne nous occuperons donc que de l'octaèdre, du do-
caèdre et de l'icosaèdre.


Fig. 373. Fig. 374.

Octaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 375) un carré ABCD de côté a. Élevons en son centre
une perpendiculaire indéfinie, et portons de part et d'autre du point O, s

Fig. 375.



cette perpendiculaire, une longueur égale au rayon du carré ABCD, c'est-
à-dire à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. En joignant les points S et S' ainsi obtenus aux sommet
A, B, C, D, on forme un octaèdre régulier SABCDS'. En effet, les hui
arêtes SA, SB, ..., S'D, sont égales entre elles et à

$$\sqrt{\overline{OS}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = a.$$

Les huit faces du polyèdre construit sont donc des triangles équilatéraux
égaux. De plus, les six angles polyèdres sont égaux entre eux; car les
angles S et B, par exemple, sont les angles au sommet de deux pyramides

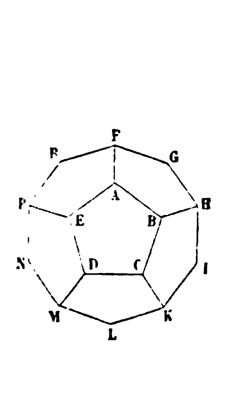
quadrangulaires régulières SABCD, BASCS′, évidemment superposables comme ayant même base et même hauteur.

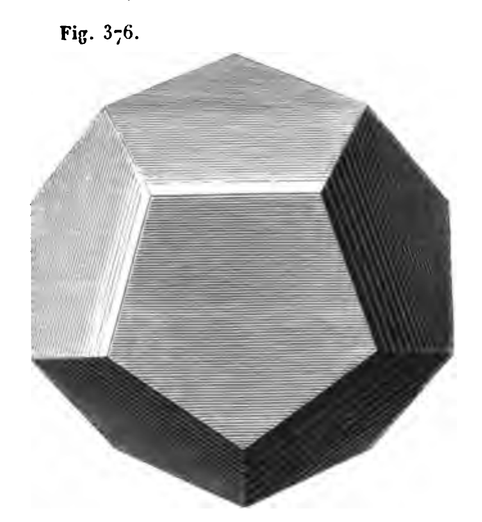
On peut résumer la construction de l'octaèdre régulier en remarquant que trois droites égales et perpendiculaires entre elles en leur milieu, telles que AC, BD, SS′, ont pour extrémités les six sommets d'un pareil polyèdre.

Dodécaèdre régulier.

Soit (*fig.* 376) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Prenons d'autres pentagones réguliers de côté a. Avec deux de ces pentagones joints au pentagone ABCDE, formons en A un angle trièdre qui, ayant ses faces égales, aura aussi ses angles dièdres égaux. Les trois côtés BA, BC, BH,

Fig. 376.





déterminent alors un angle trièdre B, égal à l'angle trièdre A, comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. On peut donc former à tous les sommets du pentagone ABCDE des angles trièdres égaux à A, en employant des pentagones réguliers égaux à ce pentagone et disposés comme l'indique la figure. Le pentagone ABCDE est commun à tous les angles trièdres : le deuxième, le troisième et le quatrième trièdre nécessitent l'addition d'un nouveau pentagone; le dernier angle trièdre en E se trouve tout construit.

On obtient ainsi un assemblage de six pentagones réguliers égaux et également inclinés. Cet assemblage constitue une surface polyédrale ouverte, moitié du dodécaèdre, et les sommets du décagone *gauche* (¹)

(¹) Ce décagone est *gauche;* car si les quatre points R, F, G, H, étaient dans un même plan, ce plan contenant aussi le point A, il n'y aurait plus d'angle trièdre en A.

FGHIKLMNPR qui la termine, correspondent successivement à *un* et à *deux* pentagones. D'ailleurs, les angles de ce décagone sont égaux entre eux; en effet, les deux angles trièdres en A et en F sont égaux, comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. L'angle RFG est donc égal à l'angle EAB et, par suite, à l'angle FGH. On peut alors faire tourner le polygone FGHIKLMNPR sur lui-même, en faisant passer le sommet F en G, le sommet G en H, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié du dodécaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra, d'après cela, rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les décagones qui les terminent, en établissant la coïncidence des sommets du premier, où il n'y a qu'*un* pentagone, et des sommets du second, qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces pentagones ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour composer un angle trièdre égal à l'angle A, l'ensemble obtenu sera bien un dodécaèdre régulier compris sous douze pentagones réguliers égaux formant vingt angles trièdres égaux.

Icosaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 377) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Élevons en son centre O une perpendiculaire, et, dans le plan déterminé par le rayon OA et cette perpendiculaire, décrivons du point A comme centre, avec a pour rayon, un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire au point S; car a est plus grand que $OA = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Les arêtes SA, SB, ..., SE, seront égales entre elles et à a. Par suite, la surface latérale de la pyramide pentagonale SABCDE sera formée de cinq triangles équilatéraux égaux entre eux et également inclinés, puisque les angles trièdres isocèles en A, B, ..., E, sont égaux entre eux, comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune.

Cela posé, en chacun des sommets A et B du triangle SAB, plaçons (comme l'indique la seconde figure) le sommet d'une pyramide identique à la première SABCDE, de manière que les deux nouvelles pyramides ABSEFG, BASCHG, aient respectivement avec la première les faces communes ASB et ASE, BAS et BSC, et entre elles les faces communes ASB et ABG. Nous aurons ainsi un assemblage de dix triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

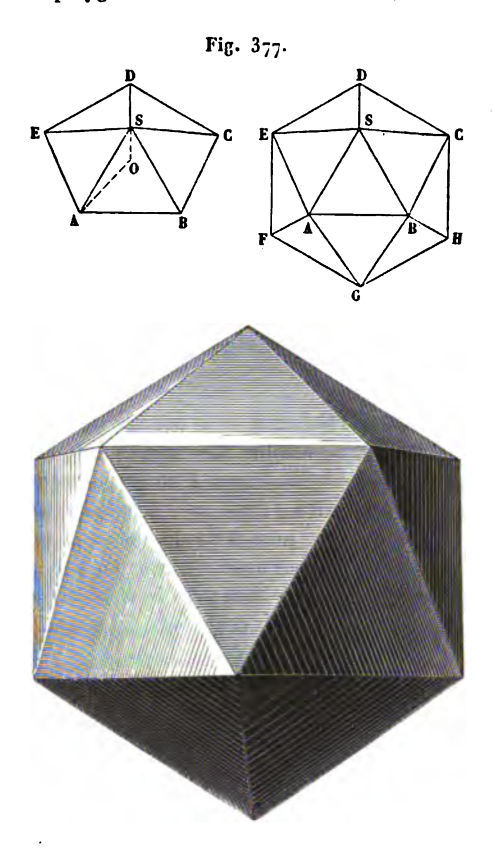
Cet assemblage forme une surface polyédrale ouverte, moitié de l'icosaèdre, et les sommets de l'hexagone *gauche* [1] CDEFGH qui la termine,

---

[1] Le contour CDEFGH est gauche; car, si les quatre points C, D, E, F, étaient dans un même plan, les deux pentagones ABCDE, BSEFG, qui ont déjà dans le plan CDE les sommets B et E communs, seraient tous deux dans ce même plan, qui contiendrait le point A en même temps que les points B, E, F; ce qui est impossible, d'après ce qui précède.

réunissent successivement *deux* et *trois* triangles. D'ailleurs, les angles de cet hexagone sont égaux : l'angle DEF, par exemple, est égal à l'angle EFG, car tous deux sont évidemment égaux à l'angle EAG. On peut donc faire tourner le polygone CDEFGH sur lui-même, en faisant passer le

Fig. 377.



sommet C en H, le sommet H en G, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié de l'icosaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra donc rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les hexagones qui les limitent, en faisant correspondre les sommets de l'un, qui réunissent *trois* triangles, aux sommets de l'autre, qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces triangles ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour constituer alors en chaque sommet un angle polyèdre égal à l'angle S, l'ensemble obtenu sera bien un icosaèdre régulier compris sous vingt triangles équilatéraux égaux, formant douze angles pentaèdres égaux.

SCOLIE.

655. En ayant recours aux formules $S = \frac{nF}{m}$ et $A = \frac{nF}{2}$ du n° 647, forme facilement le Tableau suivant, qui renferme les nombres des éléments des cinq polyèdres réguliers convexes, dont nous connaissons les nombres de faces :

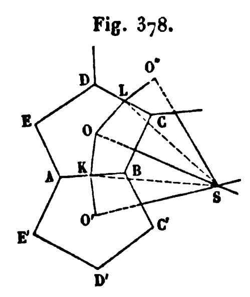
	F	n	S	m	A
Tétraèdre régulier...	4	3	4	3	6
Hexaèdre régulier...	6	4	8	3	12
Octaèdre régulier....	8	3	6	4	12
Dodécaèdre régulier.	12	5	20	3	30
Icosaèdre régulier...	20	3	12	5	30

Le nombre des faces de l'hexaèdre et le nombre de côtés de ses faces sont respectivement égaux au nombre des sommets de l'octaèdre et au nombre d'arêtes de ses angles polyèdres. Il en est de même réciproquement pour l'octaèdre comparé à l'hexaèdre; le nombre d'arêtes reste le même de part et d'autre. Les mêmes conditions sont remplies par le dodécaèdre et l'icosaèdre. On peut donc regarder les polyèdres réguliers convexes comme *conjugués* deux à deux; car le tétraèdre régulier, ayant autant de faces que de sommets, est conjugué à lui-même.

THÉORÈME.

656. *Tout polyèdre régulier convexe est inscriptible et circonscriptible à la sphère.*

Fig. 378.



Soient (*fig.* 378), dans le polyèdre régulier considéré, deux faces adjacentes ABCDE, ABC'D'E', dont O et O' sont les centres.

Les perpendiculaires OK et O'K au côté commun AB se couperont en un même point K; les perpendiculaires OS et O'S aux deux faces ABCDE

ABC'D'E', lieux respectifs des points à égale distance de leurs sommets, se couperont en un point S, car elles sont situées dans le plan OKO', perpendiculaire à AB au point K. Les deux triangles rectangles KOS, KO'S, seront d'ailleurs égaux entre eux, puisqu'ils ont l'hypoténuse KS commune et le côté KO égal au côté KO' comme apothèmes de deux polygones réguliers égaux. L'angle OKO' mesurant l'inclinaison constante de deux faces adjacentes du polyèdre, l'angle OKS, égal à l'angle O'KS, sera la moitié de cette inclinaison, et le triangle KOS sera, par suite, constant pour toutes les faces.

Si l'on considère une troisième face O", contiguë à la face ABCDE par le côté CD, dont le milieu est L, la perpendiculaire élevée à cette face par son centre O" coupera donc la droite OS au point S, de manière que le triangle LO"S soit identique au triangle KOS ou à son égal OLS.

En continuant de proche en proche, on voit que les perpendiculaires élevées aux différentes faces du polyèdre par leurs centres se coupent mutuellement en un même point S, situé à la même distance de toutes les faces et à la même distance de tous les sommets.

Il en résulte que la sphère de centre S et de rayon SA passe par tous les sommets du polyèdre régulier ou lui est *circonscrite*; la sphère de même centre S et de rayon SO est tangente à toutes les faces du polyèdre en leurs centres ou lui est *inscrite*.

Le point S est le *centre* du polyèdre régulier; SA est son *rayon*, SO son *apothème*.

COROLLAIRES.

657. Si l'on décompose un polyèdre régulier en pyramides en prenant pour centre de décomposition le centre même du polyèdre, les pyramides obtenues sont régulières : *tout polyèdre régulier peut donc être partagé en autant de pyramides régulières qu'il a de faces.*

Les faces latérales de ces pyramides, étant prolongées, décomposent évidemment la sphère inscrite ou circonscrite en autant de polygones sphériques réguliers égaux que le polyèdre considéré a de faces.

Le volume d'un polyèdre régulier a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon de la sphère inscrite (466).

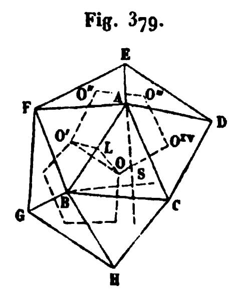
Deux polyèdres réguliers de même ordre étant nécessairement semblables, *le rapport des côtés*, *des aires* ou *des volumes de ces polyèdres est* aussi *celui des rayons*, *des carrés* ou *des cubes des rayons des sphères inscrites* ou *circonscrites*.

658. *Les centres des faces d'un polyèdre régulier sont les sommets d'un autre polyèdre régulier conjugué du premier* (*fig.* 379).

Soient A l'un des sommets du polyèdre donné et S le centre commun des sphères inscrite et circonscrite à ce polyèdre. Désignons par O, O', O", ..., les centres des faces réunies autour du point A. Ces points, étant également distants des points S et A, sont situés dans un même

plan perpendiculaire à SA en un point qui est le centre du cercle circon scrit au polygone OO'O" .... De plus, L étant le milieu du côté AB, l triangle OLO' est constant, et le polygone inscrit OO'O" ... ayant se

Fig. 379.



côtés égaux, est régulier. Le polyèdre formé en joignant les centres des faces du polyèdre proposé a donc déjà pour faces des polygones régulie égaux, et le nombre de ces polygones est égal à celui des sommets d polyèdre donné. Il reste seulement à prouver que ces polygones so également inclinés. Or, si l'on considère les deux faces du nouvea polyèdre qui s'appuient sur le côté OO', l'angle dièdre qu'elles comprenne est le supplément de l'angle constant ASB des deux perpendiculaires SA et SB à ces deux faces.

La réciproque de ce théorème est évidente.

On voit qu'en appliquant la construction indiquée sous l'une ou so l'autre forme, le tétraèdre régulier conduit à un nouveau tétraèdre; l'hexaèdre régulier à un octaèdre régulier, et, réciproquement, le dodé caèdre régulier à un icosaèdre régulier, et réciproquement : ce qui jus tifie la dénomination de *conjugués* donnée à ces polyèdres (655).

PROBLÈME.

659. *Un polyèdre régulier convexe étant donné, trouver* : 1° *l'incli naison de deux faces adjacentes;* 2° *les rayons des sphères inscrite e circonscrite* (¹).

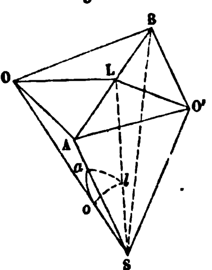
1° Soient (*fig.* 380) S le centre de la sphère inscrite ou circonscri AB le côté commun aux deux faces adjacentes dont les centres sont O O', L son milieu : l'angle OLO' mesure l'inclinaison cherchée I.

AB étant perpendiculaire au plan OLO', les plans OLO' et ASB so

(¹) La résolution de cette question exige la connaissance de formules de *Trigonométrie sphérique,* qu'on trouvera démontrées plus loin dans ce même volume. Mais nous avons cru devoir, à cause des résultats numériques que ce problème fournit et qui complètent la théorie des polyèdres réguliers, la maintenir à cette place.

perpendiculaires. Par suite, si du point S comme centre nous décrivons une sphère, sa rencontre avec l'angle trièdre SAOL déterminera un triangle sphérique *aol*, rectangle en *l*.

Fig. 380.



Soient, dans le polyèdre considéré, *n* le nombre de côtés de chaque face, *m* le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre. On aura évidemment

$$\text{angle}\, aol = \text{angle}\,\text{AOL} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

$$\text{angle}\, oal = \text{angle}\,\text{OAL} = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}.$$

Le triangle sphérique rectangle *aol* donne d'ailleurs

$$\cos oal = \cos ol . \sin aol.$$

Mais

$$\cos ol = \cos \text{OSL} = \sin \text{OLS} = \sin \frac{1}{2}\text{I}.$$

On a donc la formule générale

$$\sin \frac{1}{2}\text{I} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

En l'appliquant aux différents polyèdres réguliers convexes, on trouve pour l'inclinaison I les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier........	70°31'43",6
Hexaèdre régulier........	90°
Octaèdre régulier..........	109°28'16",4
Dodécaèdre régulier......	116°35'54",2
Icosaèdre régulier........	138°11'22",75

Les valeurs indiquées sont exactes pour l'hexaèdre et l'icosaèdre, approchées pour les trois autres polyèdres. Les inclinaisons des faces du tétraèdre et de l'octaèdre régulier sont supplémentaires l'une de l'autre.

2° Soient a le côté du polygone donné, r son apothème, R son rayon. Le triangle OLA donne

$$OL = AL \cot AOL = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n}.$$

Le triangle rectangle SOL donne à son tour

$$SO = OL \operatorname{tang} OLS,$$

c'est-à-dire

(1) $$r = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{1}{2} I.$$

Le triangle sphérique aol donne enfin

$$\cos oa = \cot aol . \cot oal.$$

Or

$$\cos oa = \cos OSA = \frac{SO}{SA}.$$

On a donc

$$\frac{SA}{SO} = \operatorname{tang} aol . \operatorname{tang} oal$$

ou

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{m}.$$

On en déduit

(2) $$R = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{\pi}{m} \operatorname{tang} \frac{1}{2} I.$$

En appliquant les formules (1) et (2) aux différents polyèdres réguliers convexes, on obtient les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier....... $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Hexaèdre régulier....... $r = \frac{a}{2}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Octaèdre régulier....... $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dodécaèdre régulier...... $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}$, $R = \frac{a(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{4}$.

Isocaèdre régulier....... $r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}$, $R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

SCOLIE.

660. Pour deux polyèdres *conjugués*, les nombres n et m ne faisant que s'échanger (655), le rapport $\frac{R}{r}$ demeure constant. Donc, si R est le même

pour ces deux polyèdres, r est aussi le même. En d'autres termes, si les deux polyèdres conjugués sont inscrits à une même sphère, ils sont aussi circonscrits à une même sphère, et réciproquement.

661. Il nous resterait à parler des polyèdres réguliers d'espèce supérieure, c'est-à-dire des *polyèdres réguliers étoilés* découverts par Poinsot; mais nous renverrons sur ce sujet au Traité de Géométrie par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, où il est présenté avec tous les développements désirables, et où les auteurs ont généralisé la *formule d'Euler* et donné pour la première fois la représentation graphique des nouveaux polyèdres.

LIVRE CINQUIÈME.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE QUELQUES COURBES USUELLES.

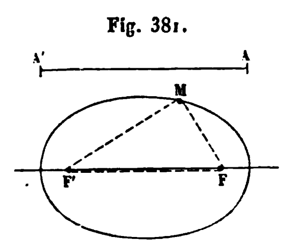
I. — Propriétés fondamentales de l'ellipse.

662. *L'ellipse* est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 381), les deux points fixes étant F et F' et la longueur donnée étant représentée par la droite AA', on a pour tout point M de l'ellipse

$$MF + MF' = AA'.$$

D'après cela, pour décrire une ellipse d'*un mouvement continu*, on plante sur la feuille de dessin, en F et en F', deux

Fig. 381.



épingles qu'on entoure d'un fil sans fin (c'est-à-dire dont les deux bouts sont réunis), auquel on donne la longueur totale FF' + AA'. On tend constamment ce fil à l'aide d'un crayon que l'on fait mouvoir sur le papier jusqu'à ce qu'on soit ramené au point de départ. La pointe du crayon trace évidemment l'ellipse demandée; car, pour une position quelconque

M de cette pointe, on a

$$FF' + MF + MF' = FF' + AA' \quad \text{ou} \quad MF + MF' = AA'.$$

Le procédé qu'on vient d'indiquer est surtout applicable sur le terrain : on remplace alors les épingles par des piquets, le fil par une corde et le crayon par un jalon. Nous mentionnerons plus loin d'autres tracés bien préférables au point de vue de l'exécution des épures.

663. Les points F et F' sont les *foyers* de l'ellipse, les droites MF et MF' sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur constante AA' est ordinairement représentée par $2a$.

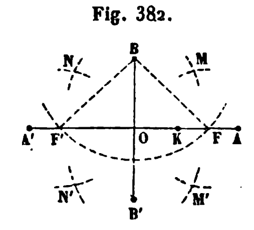
La distance FF' ou *distance focale* est représentée par $2c$. L'existence du triangle MFF' entraîne alors la condition $2c < 2a$ ou $c < a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'ellipse. Cette excentricité peut varier de 0 à 1. Pour $c = 0$, elle est nulle, les foyers se confondent et l'ellipse devient un cercle de rayon a. Pour $c = a$, l'excentricité est égale à 1, et l'ellipse se réduit à la portion de droite $FF' = 2a$. Entre ces deux limites, l'ellipse se rapproche d'autant plus de la droite FF' que son excentricité est plus grande.

664. On peut aussi tracer l'ellipse par points.

En effet, marquons (*fig.* 382) le milieu O de la distance focale

Fig. 382.



FF', et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$; puis, un point quelconque K sur AA'. Si, des points F et F' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et A'K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs points d'intersection M et M' appartiendront à l'ellipse, puisqu'on aura

$$MF + MF' = M'F + M'F' = AK + A'K = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours moindre que la somme $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit plus grande que la différence des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' > A'K - AK \quad \text{ou} \quad 2c > 2a - 2AK.$$

La condition cherchée est donc $AK > a - c$ ou $AK > AF$.

D'ailleurs, on peut échanger les centres F et F′ sans modifier les rayons employés, de manière à obtenir pour chaque point K quatre points M et M′, N et N′, de l'ellipse. Les limites des positions du point K sont alors l'un des foyers F et le point O. Tout cela résulte immédiatement de la symétrie de l'équation de condition $MF + MF' = 2a$ par rapport aux deux rayons vecteurs d'un même point.

Si le point K est en O, les points correspondants de l'ellipse sont en B et en B′ sur la perpendiculaire élevée à la droite FF′ par son milieu. Si le point K est en F, les deux points correspondants de l'ellipse sont en A et en A′. Le rayon vecteur minimum est AF ou $a - c$, le rayon vecteur maximum est A′F ou $a + c$.

THÉORÈME.

665. *L'ellipse a : 1° pour axes, la droite* AA′ *qui passe par ses deux foyers et la droite* BB′ *perpendiculaire au milieu de la première ; 2° pour centre, l'intersection de ces deux droites.*

On appelle *axe* d'une courbe toute droite par rapport à laquelle les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux ; on appelle *centre* d'une courbe tout point par rapport auquel les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux (628).

1° Soit M un point de l'ellipse (*fig.* 383) ; on aura

$$MF + MF' = 2a.$$

Supposons alors que le plan de la figure fasse une demi-révolution autour de AA′. Dans ce mouvement, les foyers restent fixes, le point M vient dans la position symétrique M_1, et, comme le triangle MFF′ ne se déforme pas, on a

$$M_1F + M_1F' = 2a,$$

c'est-à-dire que le point M_1 appartient à l'ellipse. Donc, à tout

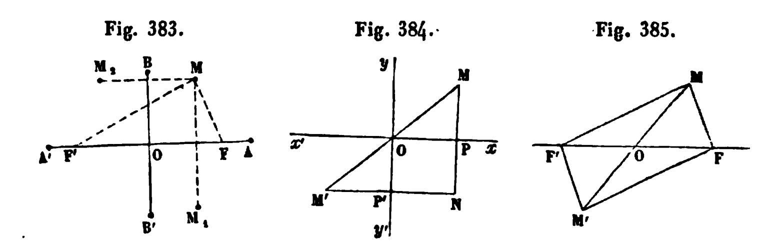
point M de l'ellipse correspond un point M_1, symétrique de M par rapport à AA'.

Si le plan de la figure fait de même une demi-révolution autour de BB', les foyers ne font que s'échanger, le point M vient dans la position symétrique M_2, et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a encore

$$M_2F + M_2F' = 2a,$$

ce qui montre qu'à tout point M de l'ellipse correspond un autre point M_2 de la courbe, symétrique de M par rapport à BB'.

2° L'autre partie de la proposition n'est qu'un cas particu-



lier de ce théorème plus général : *Quand une courbe possède deux axes rectangulaires xx' et yy', leur intersection* O *est un centre de la courbe* (*fig.* 384).

Soient M un point de la courbe, M' son symétrique par rapport au point O, et N l'intersection des parallèles menées respectivement aux deux axes par les points M et M'. L'égalité des triangles rectangles MOP, OM'P', donne

$$MP = OP' = PN \quad \text{et} \quad M'P' = OP = P'N.$$

Le point N est donc à la fois symétrique de M par rapport à xx' et symétrique de M' par rapport à yy'. Or, le point N étant sur la courbe comme symétrique de M, le point M' en fait aussi partie comme symétrique de N. Donc, à tout point M de la courbe correspond un point M', symétrique de M par rapport à O.

Il résulte de là que le milieu O de la distance focale FF' est un centre de l'ellipse.

On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit (*fig.* 385).

Soient M un point de l'ellipse et M′ son symétrique par rapport à O; menons les rayons vecteurs de ces points. Les diagonales MM′ et FF′ se coupant mutuellement en parties égales, le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme, et le point M′ appartient à l'ellipse en vertu de l'égalité des deux contours FMF′ et FM′F′.

COROLLAIRES.

666. On appelle *longueurs* des axes de l'ellipse les longueurs AA′ et BB′ interceptées sur ces axes par la courbe (*fig.* 382). La longueur du premier axe AA′ est donc (664) égale à $2a$, la longueur du second BB′ est représentée par $2b$.

La perpendiculaire BO (*fig.* 382) étant moindre que l'oblique BF $= a$, on a

$$b < a.$$

AA′ est dit alors le *grand axe* et BB′ le *petit axe* de l'ellipse.

Les extrémités A et A′, B et B′, des deux axes sont appelées les *sommets* de la courbe.

Le triangle rectangle BOF (*fig.* 382) donne $a^2 = b^2 + c^2$, relation qui permet de déterminer l'une des trois quantités a, b, c, lorsqu'on connaît les deux autres.

667. Quand on donne les longueurs a et b, il est facile de déterminer graphiquement les foyers : on n'a qu'à décrire de l'extrémité B du petit axe comme centre (*fig.* 382), avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe le grand axe aux deux foyers F et F′.

THÉORÈME.

668. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que* $2a$.

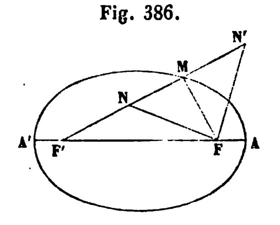
Soit d'abord (*fig.* 386) un point N intérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers, prolongeons F′N jusqu'à la rencontre de la courbe en M, et menons MF. Un théorème connu donne immédiatement

$$NF + NF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad NF + NF' < 2a.$$

Soit de même un point N′ extérieur à l'ellipse. Joignons ce

point aux deux foyers; N'F' coupant la courbe au point M,

Fig. 386.



menons MF. En s'appuyant sur le même théorème, on aura ici

$$N'F + N'F' > MF + MF' \quad \text{ou} \quad N'F + N'F' > 2a.$$

COROLLAIRE.

669. Le théorème précédent, rapproché de la définition de l'ellipse, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque du plan de la courbe, par rapport à cette courbe supposée non tracée. *Suivant que la somme des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, égale ou inférieure à 2a, ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

670. *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact, extérieurement à leur angle.*

Prenons sur l'ellipse (*fig.* 387) deux points voisins M et M'; menons la sécante MM'S et les rayons vecteurs des deux points M et M'. Portons sur F'M une longueur F'D = F'M' et sur FM une longueur FC = FM'. Le segment MD représente alors l'augmentation que subit le rayon vecteur mené du foyer F' quand on passe du point M au point M', et MC la diminution que subit le rayon vecteur mené du foyer F quand on passe du même point M au même point M'; comme la somme des rayons vecteurs d'un point de l'ellipse reste constante, MD est égal à MC.

Cela posé, d'un point quelconque G de la sécante MM'S, menons aux droites M'D et M'C des parallèles GI et GH jusqu'à la rencontre des rayons vecteurs du point M. Le quadrilatère GHMI étant semblable au quadrilatère M'CMD (153), l'égalité de MD et de MC entraîne celle de MI et de MH.

Les droites GH et GI, étant parallèles aux bases M′C et M′D des triangles isocèles CFM′, DF′M′, sont perpendiculaires aux bissectrices de leurs angles au sommet. Mais, à mesure que le point mobile M′ se rapproche du point fixe M, la sécante MM′S se rapproche de la tangente au point M. Les bissectrices des angles CFM′, DF′M′, ayant alors pour limites les rayons vecteurs FM, F′M, du point M, les droites GH et GI ont elles-mêmes pour limites les perpendiculaires abaissées du point G sur ces rayons vecteurs. D'ailleurs, pendant ce mouvement, MH varie en restant toujours égal à MI.

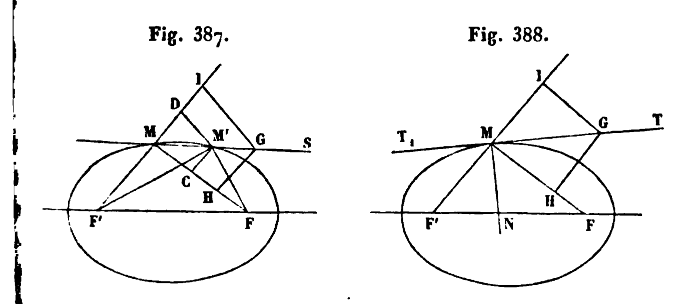


Fig. 387. Fig. 388.

La tangente MT au point M (*fig.* 388) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G de cette droite, on abaisse les perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs MF et MF′ du point M, on ait MH = MI. Les triangles rectangles MGH, MGI, sont alors égaux, et il en est de même des angles GMH, GMI. *La tangente à l'ellipse est donc bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

L'angle $F'MT_1$ étant l'opposé par le sommet de l'angle GMI, les deux angles GMH ou FMT et $F'MT_1$ sont égaux, ce qui vérifie le premier énoncé du théorème.

COROLLAIRES.

671. *La tangente à l'ellipse n'a qu'un point commun avec la courbe.*

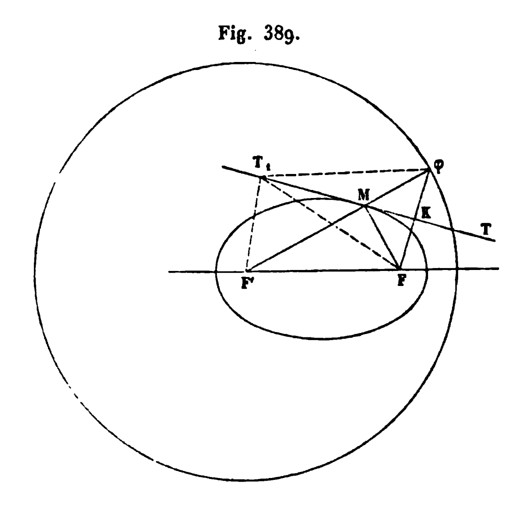
Abaissons du foyer F (*fig.* 389), sur la tangente MT au point M, une perpendiculaire FK qui vient rencontrer en φ le prolongement de F′M. La tangente étant bissectrice de l'angle $FM\varphi$, l'égalité des triangles rectangles FMK, φMK, donne $FK = \varphi K$, c'est-à-dire que le point φ est le symétrique du

foyer F par rapport à la tangente MT. L'égalité des même triangles donne MF = Mφ, et, par suite,

$$F'\varphi = MF + MF' = 2a.$$

D'ailleurs, la tangente étant perpendiculaire sur le milie

Fig. 389.



de Fφ, un point quelconque T_1 de cette droite est équidistan de F et de φ. On a donc, d'après le triangle $F'T_1\varphi$,

$$T_1F + T_1F' = T_1\varphi + T_1F' \quad \text{ou} \quad T_1F + T_1F' > F'\varphi = 2a.$$

Tous les points de la tangente MT, sauf le point M, son donc extérieurs à l'ellipse (669).

672. La tangente en un point d'une courbe peut couper la courbe en d'autres points; mais elle a nécessairement (96 avec la courbe au moins un point commun de moins que le droites qui en ont le plus. De ce qu'on vient de démontrer il résulte donc qu'une droite ne peut rencontrer l'ellipse en plus de deux points, c'est-à-dire que *l'ellipse est une courbe convexe.*

673. Si l'on mène au point M (*fig.* 388) une perpendicu laire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, F'MN, son égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normal à l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vec teurs du point de contact.*

La normale en un sommet de l'ellipse se confond avec l'axe correspondant, et la tangente est perpendiculaire à cet axe, de sorte que la courbe est *inscrite* dans le rectangle construit sur ses axes.

Les rayons vecteurs d'un point de l'ellipse, la normale et la tangente en ce point déterminent sur une sécante quelconque quatre points conjugués deux à deux (143).

SCOLIE.

674. Les propriétés précédentes justifient la dénomination de *foyer*. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion étant égaux, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F d'une ellipse, viennent, en vertu d'une loi physique et après leur réflexion sur la courbe, converger à l'autre foyer F'.

THÉORÈME.

675. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *de l'ellipse par rapport aux tangentes est un cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre, avec la longueur* $2a$ *du grand axe pour rayon* (*fig.* 389).

Le premier alinéa du n° 671 renferme la démonstration de ce théorème.

On donne au cercle $F'\varphi$ le nom de *cercle directeur relatif au foyer* F'. L'ellipse a deux cercles directeurs correspondant à ses deux foyers.

SCOLIE.

676. *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* F' *et d'un point* F *intérieur à ce cercle est une ellipse dont les points* F *et* F' *sont les foyers et qui a pour cercle directeur relatif au foyer* F' *le cercle donné* (*fig.* 389).

En effet, soit M un point du lieu. En le joignant aux deux points F et F' et en prolongeant F'M jusqu'à sa rencontre φ avec la circonférence donnée, on a par hypothèse

$$M\varphi = MF, \quad \text{d'où} \quad MF + MF' = F'\varphi.$$

Pour construire le lieu, il suffit évidemment de joindre le point F à un point quelconque φ de la circonférence donnée et d'élever une perpendiculaire TT_1 sur le milieu K de la

droite Fφ; cette perpendiculaire coupe le rayon F'φ en un point M du lieu, et elle est la tangente en ce point (670).

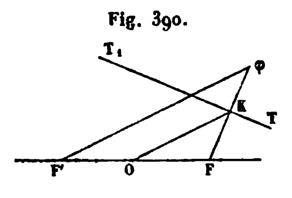
Le cercle directeur d'une ellipse peut donc servir à tracer la courbe par points lorsqu'on connaît son foyer et son grand axe. Ce nouveau procédé est plus long que celui indiqué au nº 664, mais il a le grand avantage de donner en même temps la tangente en chaque point déterminé. On peut résumer cette construction comme il suit : *Si, d'un point* F *pris à l'intérieur d'un cercle* F'φ, *on mène des droites aux divers points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux touchent ou enveloppent une ellipse, qui a pour foyers les points* F *et* F' *et pour grand axe le rayon* F'φ.

THÉORÈME.

677. *Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Soient (*fig.* 390) F et F' les deux foyers, K la projection du foyer F sur une tangente quelconque TT_1, et φ le symétrique de F par rapport à cette tangente. Le côté F'φ du triangle FF'φ étant égal à $2a$ (671), la droite OK qui joint les milieux des deux autres côtés est égale à a. Le point K appartient donc à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Fig. 390.



Réciproquement, tout point K de cette circonférence est la projection de l'un des foyers F sur une tangente; car, si l'on prolonge FK d'une quantité $K\varphi = FK$, on a évidemment

$$F'\varphi = 2OK = 2a.$$

Par suite, le point φ appartient au cercle directeur relatif au foyer F', et la perpendiculaire élevée sur Fφ par son milieu K est (676) une tangente à l'ellipse.

Le cercle OK est dit le *cercle principal* de l'ellipse.

SCOLIE.

678. *Si le sommet d'une équerre décrit le cercle principal d'une ellipse, pendant que l'un de ses côtés passe constamment par un foyer de la courbe, l'autre côté de l'équerre lui*

reste toujours tangent. C'est là un nouveau moyen (676) d'obtenir l'ellipse comme enveloppe de ses tangentes.

PROBLÈME.

679. *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe,* on le joint aux deux foyers (*fig.* 388), et l'on mène la bissectrice de l'angle FMI formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement MI de l'autre rayon MF′ (670).

2° *Si le point donné* P *est extérieur à l'ellipse* (*fig.* 391), on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée, car on aurait dès lors cette tangente en abaissant de P une perpendiculaire TT_1 sur $F\varphi$; la droite TT_1

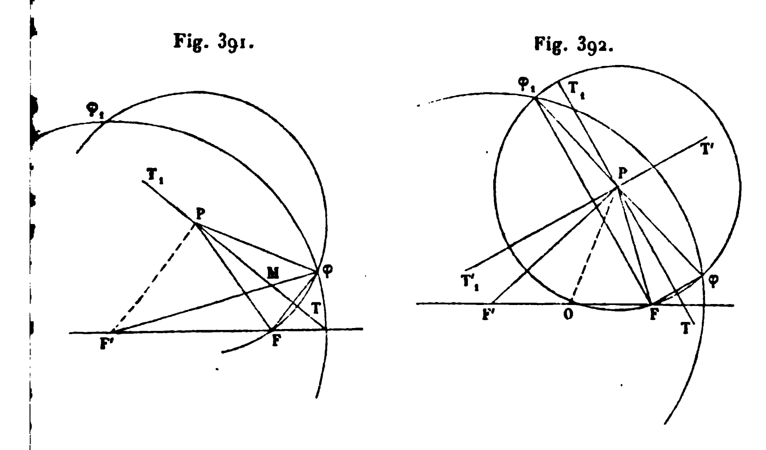


Fig. 391. Fig. 392.

couperait d'ailleurs $F'\varphi$ au point de contact M (676). Or, le point φ se trouve à la fois sur le cercle directeur relatif au foyer F′ (675) et sur le cercle de centre P et de rayon PF.

Ces deux cercles se coupent toujours quand le point P est extérieur à l'ellipse. En effet, PF′ étant la distance des centres, PF et $2a$ les deux rayons, le triangle PFF′ donne

$$PF' < PF + FF' \quad \text{et, } a\ fortiori, \quad PF' < PF + 2a.$$

Le point P étant extérieur à la courbe, on peut avoir PF plus grand ou plus petit que $2a$. Si PF est moindre que $2a$, on a

$$PF + PF' > 2a, \quad \text{d'où} \quad PF' > 2a - PF.$$

Si PF est plus grand que $2a$, le triangle PFF' permet de poser

$$PF' > PF - FF' \quad \text{et, } a\ fortiori, \quad PF' > PF - 2a.$$

Ainsi, la construction précédente réussit toujours quand le point P est extérieur à la courbe; et, comme les circonférences tracées se coupent en deux points φ et φ_1, il y a deux solutions.

COROLLAIRES.

680. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à l'ellipse soient à angle droit.

Si les deux tangentes TT_1, $T'T'_1$, menées du point P, sont à angle droit (*fig.* 392), comme elles sont respectivement perpendiculaires sur le milieu des droites $F\varphi$, $F\varphi_1$, l'angle $\varphi F \varphi_1$ de ces deux droites doit être lui-même un angle droit. Cet angle étant inscrit dans la circonférence PF, dont le centre est P, la droite $\varphi\varphi_1$ est un diamètre de cette circonférence, et P est le milieu de ce diamètre.

Le lieu du point P est donc le lieu décrit par le milieu de la corde interceptée dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit tournant autour de son sommet fixe F. Or, si l'on joint le point P aux foyers F et F', on a $P\varphi = PF$, et le triangle rectangle $F'P\varphi$ donne alors

$$\overline{PF'}^2 + \overline{P\varphi}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{F'\varphi}^2 = 4a^2.$$

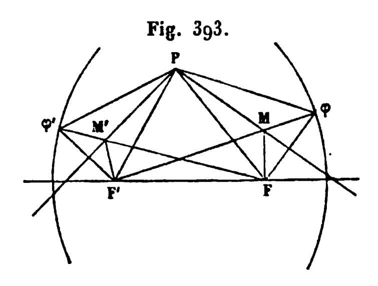
La somme des carrés des distances du point P aux points F et F' étant constante, le lieu cherché est une circonférence de cercle concentrique à l'ellipse et qui a pour rayon la médiane OP du triangle PFF' (174). Comme les sommets du rectangle construit sur les axes et circonscrit à l'ellipse (673) font nécessairement partie du lieu, le rayon OP est égal à la demi-diagonale de ce rectangle, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2+b^2}$.

681. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'ellipse par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M' (*fig.* 393).

Menons les deux cercles directeurs de l'ellipse. φ étant le

symétrique de F par rapport à la tangente PM et φ′ le symétrique de F′ par rapport à la tangente PM′, les deux triangles PFφ′ et PF′φ sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux

Fig. 393.



chacun à chacun. Les angles FPφ′ et F′Pφ sont donc égaux. Si l'on enlève la partie commune FPF′, les restes FPφ, F′Pφ′, sont égaux, ainsi que leurs moitiés MPF, M′PF′.

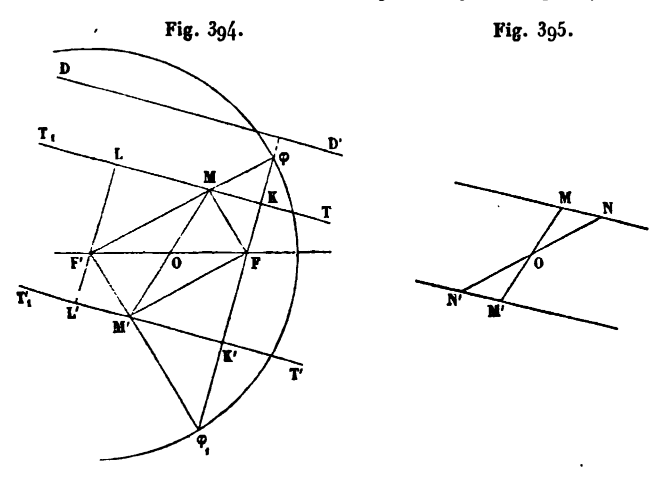
En second lieu, l'égalité des triangles PFφ′, PF′φ, entraîne celle des angles PFφ′, PφF′. Mais, les deux triangles PMφ, PMF, étant égaux, l'angle PφF′ est aussi égal à l'angle PFM, et la droite PF est la bissectrice de l'angle MFM′.

PROBLÈME.

682. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point symétrique φ de l'un

Fig. 394. Fig. 395.



des foyers F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point

est à l'intersection du cercle directeur relatif au foyer F' (675) et de la perpendiculaire menée du foyer F sur la droite donnée DD' (*fig.* 394). Cette perpendiculaire coupe toujours le cercle F' en deux points φ et φ_1, puisque le point F est intérieur à ce cercle. Les perpendiculaires TT_1 et $T'T'_1$ élevées aux droites $F\varphi$ et $F\varphi_1$ par leurs milieux sont les tangentes demandées, et leurs points de contact M et M' sont à leurs rencontres respectives avec les rayons $F'\varphi$ et $F'\varphi_1$ (676).

COROLLAIRES.

683. *Les deux points de contact,* M *et* M', *des deux tangentes parallèles* TT_1, $T'T'_1$, *sont symétriques par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

En effet, les triangles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$, $\varphi F'\varphi_1$, sont des triangles isocèles ayant tous un angle égal à la base; ils sont donc semblables et ont leurs côtés parallèles. La figure MFM'F' étant un parallélogramme, la diagonale MM' passe par le milieu O de la diagonale FF' et y est divisée en deux parties égales.

Inversement, *les tangentes menées à l'ellipse en deux points symétriques par rapport au centre sont parallèles,* car le quadrilatère MFM'F' étant dans ce cas un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en parties égales, les angles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$ ont leurs côtés parallèles et sont égaux. Il en est donc de même de leurs moitiés (670) FMT, $\varphi_1M'T'$, ce qui entraîne le parallélisme des tangentes MT, M'T', aux points M et M'.

684. La propriété précédente appartient d'ailleurs à toutes les courbes à centre. *Dans toute courbe à centre, les tangentes en deux points* M *et* M' *symétriques par rapport au centre* O *sont parallèles, et par suite équidistantes du centre.*

En effet, si N (*fig.* 395) est un point de la courbe voisin de M, et N' son symétrique par rapport à O, l'égalité des triangles MON, M'ON', prouve le parallélisme des cordes ou sécantes MN, M'N', et leur égale distance au centre. Quand N tend vers M, N' tend vers M'. Les deux sécantes tournent donc à la fois autour des points M et M', de manière à devenir ensemble tangentes, en restant toujours parallèles et équidistantes du centre.

685. Les points K et K′ (*fig.* 394) appartiennent au cercle principal de l'ellipse (677). Les deux segments FK, FK′, étant alors ceux d'une corde quelconque de ce cercle passant par le foyer F, leur produit est constant. On peut donc dire que *le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant*. Si l'on mène par le foyer F′ la corde LL′ du cercle principal qui est parallèle à KK′, on a évidemment FK′ = F′L. On peut donc dire aussi que *le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant*. Si l'on veut connaître cette constante, il suffit de considérer la tangente à l'une des extrémités du petit axe, et l'on obtient immédiatement le carré du demi-petit axe ou b^2 pour sa valeur.

SCOLIE.

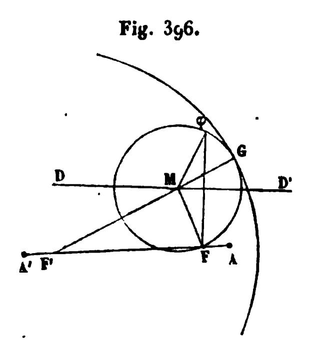
686. Les constructions des nos 679 et 682 n'exigent pas que la courbe soit tracée; il faut seulement qu'elle soit définie par ses deux foyers et la longueur du grand axe.

PROBLÈME.

687. *Étant donnés les foyers* F *et* F′ *et le grand axe* AA′ *d'une ellipse, déterminer ses points de rencontre avec une droite* DD′ (*fig.* 396).

Supposons le problème résolu, et déterminons le symé-

Fig. 396.



trique φ du foyer F par rapport à DD′. M étant l'un des points de rencontre de la droite DD′ avec l'ellipse, on aura Mφ = MF. Prolongeons F′M d'une longueur MG = MF; F′G sera égal à AA′, et le point G appartiendra au cercle directeur relatif au foyer F′. Le cercle décrit du point M comme centre avec MF

pour rayon passe donc par les deux points F et φ et est tangent au cercle directeur F′G. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à un cercle donné F′G. Nous avons résolu ce problème (**196**, 2°).

Comme le foyer F est intérieur au cercle directeur relatif au foyer F′, il y aura évidemment deux solutions, une seule ou zéro, suivant que le point φ sera lui-même intérieur, commun ou extérieur au cercle directeur F′G. La droite DD′ sera donc *sécante*, *tangente* ou *extérieure* à l'ellipse, suivant les mêmes conditions.

COROLLAIRE.

688. *Une droite ne pouvant rencontrer une ellipse en plus de deux points, l'ellipse est une courbe convexe* (**672**).

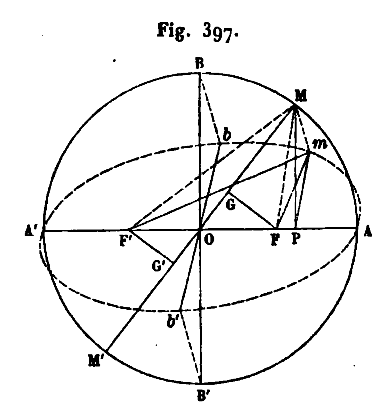
De l'ellipse, considérée comme projection orthogonale du cercle.

THÉORÈME.

689. *La projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.*

Quel que soit le plan de projection, on peut toujours supposer qu'il

Fig. 397.



passe par le centre du cercle, puisque les projections d'une même figure sur deux plans parallèles sont égales (**448**).

Soit donc AA′ (*fig.* 397) le diamètre suivant lequel le plan de projec-

tion coupe le cercle donné. Le diamètre BB′ perpendiculaire à AA′ a pour projection la droite bb', et cette droite, d'après un théorème connu (307), est elle-même perpendiculaire sur AA′. D'ailleurs, des droites parallèles ayant sur un même plan des projections parallèles et la projection du milieu d'une droite étant le milieu de sa projection, la courbe projection du cercle a nécessairement pour axes les droites AA′ et bb'. Par suite, si cette projection est une ellipse, son grand axe sera AA′ et la distance de son centre O à l'un des foyers sera égale à Bb (666). Portons donc sur AA′, de part et d'autre du point O, des longueurs

$$\mathrm{OF} = \mathrm{OF'} = \mathrm{B}b.$$

Il reste à démontrer que la somme des rayons vecteurs mF et mF′ d'un point quelconque m de la projection obtenue est constante.

Le point m étant la projection du point M dont l'ordonnée par rapport aux axes AA′ et BB′ est MP, la droite mP sera aussi perpendiculaire sur AA′. Abaissons des points F et F′, sur le diamètre MM′ qui répond au point M, les perpendiculaires FG et F′G′. L'égalité des triangles rectangles FOG, F′OG′, donne à la fois GF = G′F′ et OG = OG′; par suite, MG′ = GM′.

Cela posé, la similitude des triangles rectangles FOG, MOP, d'une part, MPm, BOb, d'autre part, donne

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{OF} \text{ ou } \mathrm{B}b} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM} \text{ ou } \mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{B}b},$$

et il en résulte Mm = FG. Les triangles rectangles MmF, MGF, sont alors égaux, et mF = MG.

Comme GF = G′F′, les triangles rectangles MmF′, MG′F′, sont aussi égaux, et l'on a

$$m\mathrm{F'} = \mathrm{MG'} = \mathrm{GM'}.$$

La somme $m\mathrm{F} + m\mathrm{F'}$, égale à la somme MG + GM′, est donc bien égale au diamètre AA′; ce qui démontre le théorème.

On voit que le grand axe de l'ellipse obtenue est toujours égal au diamètre du cercle donné. On a de plus, dans le triangle rectangle BbO (*voir* la *Trigonométrie*),

$$\mathrm{O}b = \mathrm{OB}\cos \mathrm{BO}b.$$

Si l'on désigne par $2a$ et $2b$ les axes AA′ et bb' de l'ellipse projection du cercle, et par V l'angle de leurs plans, on aura donc

$$b = a\cos \mathrm{V} \quad \text{et} \quad \cos \mathrm{V} = \frac{b}{a}.$$

COROLLAIRES.

690. L'ordonnée MP du cercle (*fig.* 397) étant représentée par Y et l'ordonnée correspondante mP de l'ellipse par y, le triangle rectangle

MmP donne

$$y = Y\cos V, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{b}{a}Y.$$

On passe donc du cercle principal d'une ellipse (677) à cette ellipse, e diminuant toutes les ordonnées du cercle dans le rapport du petit axe a grand axe. Cette remarque fournit un nouveau procédé pour décri l'ellipse par points.

On trace un cercle sur chacun des axes de l'ellipse comme dia mètre (*fig.* 398); un rayon quelconque coupe ces cercles aux points N e

Fig. 398.

S. Si l'on mène alors l'ordonnée NP du point N et la parallèle SM a grand axe, l'intersection M de ces deux droites est un point de l'ellipse On a, en effet,

$$MP = \frac{OS}{ON}NP, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MP = \frac{b}{a}NP.$$

691. On peut déduire de là la réciproque du théorème précédent. *La projection orthogonale d'une ellipse dont les axes sont* $2a$ *et* $2b$, *sur un plan passant par son petit axe et faisant avec le plan de l'ellipse un angle* V *tel que* $\cos V = \frac{b}{a}$, *est un cercle de diamètre* $2b$. Car, si l'on considère sur l'ellipse et sur le cercle $2b$ (*fig.* 398) deux points M et S ayant la même ordonnée OQ, leurs abscisses x et X sont liées par la relation

$$\frac{x}{X} = \frac{ON}{OS}, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{b}{a}x.$$

Pour passer de l'ellipse au cercle, il faut donc diminuer les abscisses de l'ellipse dans le rapport de b à a ou les multiplier par $\cos V$; c'est-à-dire que, pour que le cercle $2b$ devienne la projection orthogonale de l'ellipse proposée sur son plan primitif, il suffit de faire tourner cette ellipse de l'angle V autour de l'axe BB'.

L'ellipse peut donc être regardée comme provenant de la contraction ou de la dilatation des cercles qui ont ses axes pour diamètres.

Cette manière de considérer la courbe conduit à des solutions simples pour un grand nombre de problèmes.

692. Si l'on ne suppose plus que le plan de projection passe par le centre du cercle donné, le grand axe de sa projection elliptique, toujours égal à son diamètre, est la projection du diamètre du cercle qui est parallèle au plan de projection. Cette remarque est utile dans les applications.

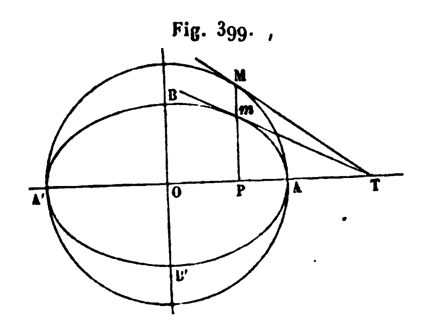
PROBLÈME.

693. *Mener à l'ellipse une tangente par un point donné.*

1° *Soit d'abord le point donné m situé sur la courbe.*

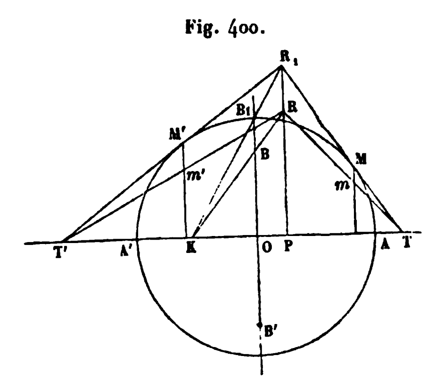
Supposons le problème résolu (*fig.* 399), et soit mT la tangente

Fig. 399.



demandée. Dilatons toute la figure, perpendiculairement à AA', dans le rapport de OB à OA. L'ellipse deviendra le cercle AA', le point m deviendra le point M, le point T ne changera pas, et la droite MT sera la tangente au cercle principal. On déterminera donc réciproquement le point T en construisant la tangente en M au cercle principal, et, en traçant mT, on aura la tangente à l'ellipse au point m.

Fig. 400.



2° *Soit maintenant le point donné* R *extérieur à l'ellipse* (*fig.* 400).

Supposons de même le problème résolu, et soient RmT, $Rm'T'$, les tangentes qui répondent à la question. Dilatons la figure, comme dans

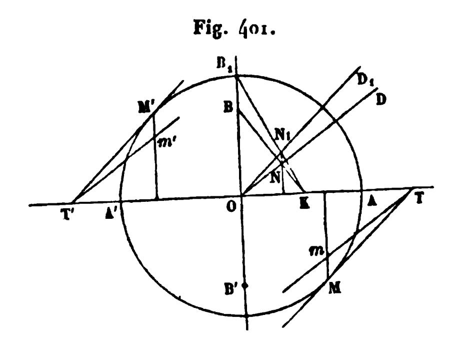
le premier cas. L'ellipse deviendra le cercle AA', la droite RBK deviendra la droite B_1K, et le point R_1 correspondant au point R, devant se trouver à la fois sur l'ordonnée PR et sur la droite B_1K, sera déterminé. On en déduira les tangentes R_1MT, $R_1M'T'$, au cercle principal, et par suite les tangentes RmT, $Rm'T'$, à l'ellipse, dont les points de contact m et m' se trouveront d'ailleurs sur les ordonnées des points M et M'.

PROBLÈME.

694. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 401).

Soit OD la droite donnée. En suivant toujours le même procédé, on considère la droite quelconque BK qui coupe OD au point N; à cette

Fig. 401.



droite BK correspond la droite B_1K qui rencontre en N_1 l'ordonnée du point N. La droite ON_1D_1 est donc celle qui correspond à OD. On n'a alors qu'à mener au cercle principal les tangentes MT, M'T', parallèles à ON_1D_1, et à tracer, par les points T et T', des parallèles à OD qui sont les tangentes demandées; leurs points de contact m et m' appartiennent aux ordonnées des points M et M'.

695. Les constructions précédentes (693, 694) n'exigent pas que l'ellipse soit tracée : il suffit que ses axes soient donnés.

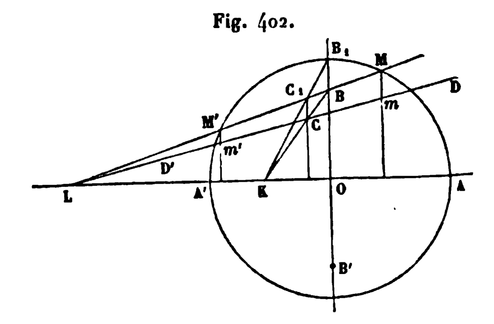
PROBLÈME.

696. *Connaissant les axes d'une ellipse, construire ses points d'intersection avec une droite donnée* (*fig.* 402).

Soit DD' la droite donnée; son point L ne changera pas dans la dilatation de l'ellipse. La droite quelconque BK rencontrant DD' au point C et devenant B_1K, le point C devient C_1. La droite LC_1 correspond donc à la

droite DD′, et, comme elle coupe le cercle principal aux points M et M′,

Fig. 402.



on n'a plus qu'à ramener ces points sur DD′, par des perpendiculaires à AA′, pour avoir en *m* et en *m′* les points demandés.

THÉORÈME.

697. *Tous les diamètres de l'ellipse sont des lignes droites passant par son centre.*

On entend par *diamètre* d'une courbe le lieu des milieux des cordes de cette courbe parallèles à une direction donnée. Dans le cercle, tout diamètre est une droite perpendiculaire au système de cordes qu'il divise en deux parties égales (93) ou qui lui est *conjugué*.

Cela posé, tout système de cordes parallèles du cercle a pour projection un système de cordes parallèles de l'ellipse projection du cercle. Les milieux des cordes du cercle étant sur un même diamètre, les projections de ces milieux ou les milieux des cordes correspondantes de l'ellipse sont sur une même droite, projection du diamètre du cercle, c'est-à-dire passant par le centre de l'ellipse. Le théorème est donc démontré.

698. Réciproquement, *toute droite passant par le centre de l'ellipse est un diamètre de la courbe*, car elle est la projection d'un certain diamètre du cercle dont l'ellipse est la projection. Les cordes conjuguées au diamètre de l'ellipse sont les projections des cordes conjuguées au diamètre correspondant du cercle.

COROLLAIRES.

699. Deux diamètres sont dits *conjugués* quand chacun d'eux fait partie du système de cordes conjugué à l'autre. Dans le cercle, deux diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux. Pour avoir des diamètres conjugués de l'ellipse projection du cercle, il faut donc projeter deux diamètres rectangulaires du cercle; chacun des diamètres obtenus en projection divisera alors en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Les diamètres conjugués de l'ellipse jouissent d'importantes propriétés.

700. La tangente à l'extrémité du diamètre du cercle, étant perpen-diculaire à ce diamètre, est parallèle au système de cordes qui lui es conjugué. Il en résulte que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre d l'ellipse est parallèle au système de cordes conjugué à ce diamètre.*

701. Si l'on mène deux tangentes à un cercle par un point extérieur le diamètre mené à leur point de concours est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint leurs points de contact. Par suite, *si l'on mène à une ellipse deux tangentes par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours passe par le milieu de la corde qui uni leurs points de contact.*

THÉORÈME.

702. *L'aire de l'ellipse est la moyenne proportionnelle des aires de cercles construits sur ses deux axes comme diamètres.*

L'ellipse donnée, dont les axes sont $2a$ et $2b$, peut être regardée comme la projection orthogonale d'un cercle de diamètre $2a$, dont le plan fai avec celui de l'ellipse un angle V, tel que $\cos V = \frac{b}{a}$ (689). D'après u théorème connu (*voir* la *Trigonométrie*), on obtiendra alors l'aire de l'ellip en multipliant l'aire du cercle par $\cos V$. On trouve ainsi, pour l'expres-sion de cette aire,

$$\pi ab, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{\pi a^2 . \pi b^2}.$$

THÉORÈME.

703. *Lorsque les extrémités d'une droite* AB *de longueur constan glissent sur deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point quelconq* M *de cette droite décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* O *et* Oy, *et ont pour demi-longueurs* a *et* b *les distances* MA *et* MB *du point aux extrémités de la droite* AB (*fig.* 403).

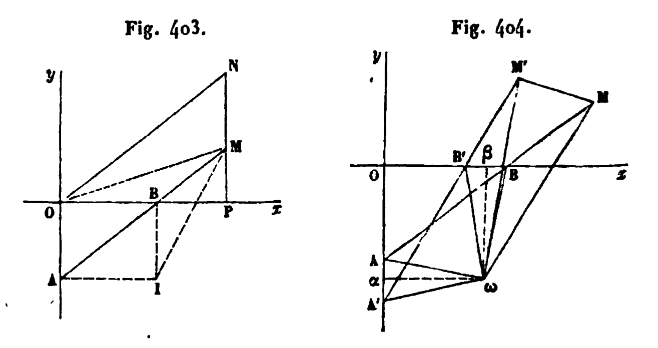


Fig. 403. Fig. 404.

Prenons pour axes coordonnés (t. I, *Alg. élém.*, 312) les deux droites Ox et Oy; les coordonnées du point M seront MP et OP. Par le point O, menons ON parallèle à ABM, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MP. La

figure OAMN étant un parallélogramme, ON sera égale à la longueur constante AM ou a. Les triangles rectangles semblables BPM, OPN, donnent d'ailleurs

$$\frac{MP}{NP} = \frac{BM}{ON} \quad \text{ou} \quad MP = \frac{b}{a} NP.$$

Le point M décrit donc l'ellipse (690) dont le cercle ON est le cercle principal, et qui a pour demi-axes a et b, c'est-à-dire les distances MA et MB.

Ce théorème donne un moyen pratique très simple de construire une ellipse par points, à l'aide d'une bande de papier sur les bords de laquelle on marque les trois points A, B, M. Il existe un *compas elliptique* fondé sur ce même principe.

COROLLAIRES.

704. Considérons (*fig.* 404) la droite donnée dans les deux positions voisines ABM, A'B'M'. Sur les milieux de AA' et de BB', élevons les perpendiculaires $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ qui se coupent en ω. La perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' passera par le point ω. En effet, les deux triangles $A\omega B$, $A'\omega B'$, étant égaux, les angles $AB\omega$, $A'B'\omega$, sont égaux. Les angles ωBM, $\omega B'M'$, le sont alors eux-mêmes comme suppléments d'angles égaux. Il en résulte l'égalité des triangles ωBM, $\omega B'M'$, et, par suite, celle des distances ωM, $\omega M'$.

Si l'on suppose maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M considéré comme fixe sur l'ellipse qu'il décrit, MM' tendra vers la tangente à la courbe en M, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' vers la normale au même point. D'ailleurs, $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ ont pour limites les perpendiculaires élevées en A et en B aux axes Oy et Ox. En joignant le point I d'intersection de ces perpendiculaires au point M (*fig.* 404), on aura donc la normale en M à l'ellipse tracée.

705. Il est utile de remarquer que *la longueur* MI, *comptée sur la normale en* M (*fig.* 404), *est égale à la longueur du demi-diamètre qui est conjugué au diamètre* OM.

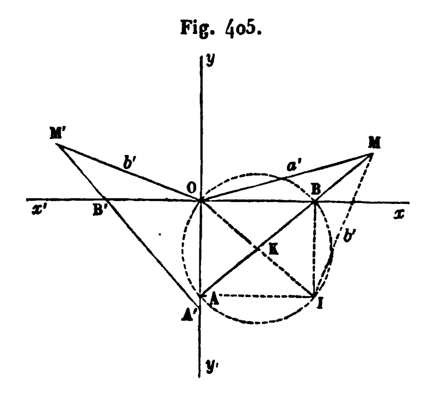
Soit, en effet (*fig.* 405), OM' le diamètre conjugué au diamètre OM; ce diamètre conjugué est parallèle à la tangente en M (700), c'est-à-dire que la normale MI lui est perpendiculaire. De plus, le rayon du cercle principal qui correspond à OM est parallèle à la position de la droite AB qui donne le point M de l'ellipse (703), et le rayon de ce cercle qui correspond à OM' est de même parallèle à A'B'M'. Les diamètres conjugués de l'ellipse répondant à des diamètres rectangulaires du cercle principal (699), on en conclut que ABM est perpendiculaire à A'B'M'. Comme BI, d'ailleurs, est perpendiculaire à OB', les deux triangles MBI, M'B'O, qui ont le côté MB égal au côté M'B', ont leurs angles égaux et sont égaux; par suite, $MI = OM'$.

PROBLÈME.

706. *Étant donnés deux diamètres conjugués de l'ellipse en grande et en direction, construire les axes de la courbe* [1].

Soient (*fig.* 405) OM et OM′ les demi-diamètres conjugués donné dont les longueurs sont a' et b'. En menant par le point M une per pendiculaire à OM′ et en prenant sur cette perpendiculaire MI =

Fig. 405.



nous aurons le sommet I du rectangle inconnu IAOB (705). Les somme B et A de ce rectangle se trouvent à la fois sur le cercle circonscrit do le diamètre est IO et sur la droite qui unit le point M au centre K de cercle : ils sont donc déterminés. En joignant ces points B et A au poi O, on a les axes de l'ellipse en direction ; de plus, MA et MB représente leurs demi-longueurs (703, 704).

THÉORÈME.

707. *Quand les extrémités d'une droite* AB *de longueur constan glissent sur deux droites fixes quelconques* Ox *et* Oy, *un point quelconq* M, *lié invariablement à* AB *dans le plan* AOB, *décrit une ellipse* (*fig.* 406)

Considérons une position quelconque de la droite AB et faisons passe un cercle par les trois points A, B, O. Si l'on suppose ce cercle lié à l droite AB et entraîné dans son mouvement, il passera toujours par point O; car l'angle AOB, ayant pour mesure la moitié de l'arc invariabl AB compris entre ses côtés, ne peut pas cesser d'être inscrit. Le dia mètre OC de ce cercle, dans la position actuelle de la droite AB, s'obtien en élevant en A et en B, aux axes Ox et Oy, des perpendiculaires qui s coupent au point C.

---

[1] *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE. par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition, 1879.

Le cercle OC changeant de position en même temps que la droite AB, l'arc AD qui sépare le point A d'un point quelconque D de sa circonférence reste constant; par suite, l'angle AOD restant lui-même constant et ayant son côté OA fixe, tout point D du cercle OC décrit une droite OY.

Fig. 406.

Si l'on trace le diamètre du cercle OC qui passe par le point donné M, les extrémités D et E de ce diamètre décrivent donc pendant le mouvement de AB les deux droites fixes ODY et OEX. Ces droites étant à angle droit, il résulte du théorème précédent (703) que le point M décrit une ellipse ayant pour demi-longueurs de ses axes, dirigés suivant OY et OX, les distances MD et ME.

Les perpendiculaires variables élevées en D et en E aux droites OY et OX se coupant au point mobile C, on obtiendra la normale en M à cette ellipse en menant la droite MC (704).

SCOLIE.

708. La position du point C est indépendante de celle du point donné M. Donc, si le point M varie, toutes les normales aux points correspondants des différentes ellipses obtenues viendront, pour une même position de la droite AB, se couper au point C.

D'ailleurs, le lieu du point C est la circonférence décrite du point O comme centre avec la longueur constante OC pour rayon, et le cercle ωC, variable de position, reste constamment tangent au cercle OC, dont le rayon est double du sien.

On peut donc se figurer le mouvement du triangle ABM en le supposant entraîné dans le mouvement du cercle ωC, qui roule sans glisser à l'intérieur du cercle fixe OC de rayon double.

On sait que, dans un pareil mouvement, *tout point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe* (théorème de la Hire), résultat qui coïncide avec la remarque sur laquelle la démonstration précédente est fondée. De plus, d'après ce qu'on vient de voir, *tout point* M *lié invariablement au cercle mobile et situé en dehors ou en dedans de ce cercle, décrit une ellipse* : c'est un autre énoncé de la proposition du n° 707.

Propriétés fondamentales de l'hyperbole.

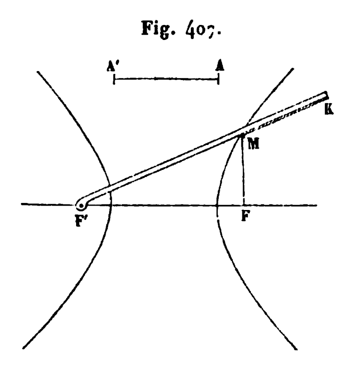
709. L'*hyperbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 407), les deux points fixes étant F et F' et la longueur donnée étant représentée par la droite AA', on aura pour tout point M de l'hyperbole

$$MF - MF' = \pm AA',$$

suivant que le point considéré sera plus éloigné du point F ou du point F'.

D'après cela, pour décrire un arc d'hyperbole d'un *mouvement continu*, on prend une règle F'K dont on fixe l'une des extrémités au point F' (*fig.* 407), de manière qu'elle puisse

Fig. 407.



seulement tourner autour de ce point. Un fil, dont la longueur est moindre que celle de la règle de la constante AA', est fixé par l'une de ses extrémités au point F et par l'autre au point K. Si l'on tend alors constamment ce fil le long de la règle à l'aide d'un crayon, en faisant tourner la règle autour de F', la pointe du crayon trace un arc de l'hyperbole demandée; car, pour

une position quelconque M de cette pointe, on a (dans le cas de la figure)

$$MF' - MF = (MF' + MK) - (MF + MK) = AA'.$$

En prenant pour centre de rotation de la règle le point F et en attachant la seconde extrémité du fil au point F', on obtient la seconde partie de la courbe. Quand la règle est au-dessus de FF', le fil doit être tendu contre son arête inférieure ; c'est l'inverse quand la règle est au-dessous de FF'.

On voit que l'hyperbole est formée de deux parties qui ne peuvent avoir aucun point commun, puisqu'on a toujours, pour la partie de droite de la figure, $MF' > MF$, et pour celle de gauche, $MF > MF'$. Chaque partie est d'ailleurs composée de deux branches qui s'étendent indéfiniment au-dessus et au-dessous de la droite FF' ; rien ne limite en effet l'éloignement des points obtenus sur la courbe, que la longueur même de la règle et du fil employés. L'hyperbole est donc une courbe à *branches infinies*, aussi bien dans la direction FF' que dans la direction perpendiculaire.

710. Les points F et F' sont les *foyers* de l'hyperbole ; les droites MF et MF' sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur AA' est ordinairement représentée par $2a$. La distance FF' se nomme *distance focale*, et on la représente par $2c$. L'existence du triangle MFF' entraîne la condition $2c > 2a$ ou $c > a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'hyperbole. Cette excentricité peut varier de 1 à ∞. Pour $c = a$, elle est égale à 1, et l'hyperbole se réduit aux deux portions de la droite FF' qui sont séparées par la distance FF' ; pour $a = 0$, elle est infinie, et l'hyperbole se réduit à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF'. Entre ces deux limites, l'hyperbole se rapproche d'autant plus de la droite FF' que l'excentricité est plus petite.

711. On peut aussi tracer l'hyperbole *par points* (*fig.* 408). En effet, marquons le milieu O de la distance focale FF', et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point K quelconque sur le prolongement de OA. Si des points F et F' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et à A'K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs

points d'intersection M et M' appartiendront à l'hyperbole, car on aura

$$MF' - MF = M'F' - M'F = A'K - AK = 2a.$$

La distance des centres FF' étant toujours plus grande que

Fig. 408.

B N M F' A' O A F K N' M' B'

la différence $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit moindre que la somme des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' < AK + A'K \quad \text{ou} \quad 2c < 2AK + 2a.$$

La condition cherchée est donc

$$AK > c - a \quad \text{ou} \quad AK > AF.$$

Comme on peut échanger les centres sans modifier les rayons, chaque point K permet d'obtenir quatre points M et M', N et N', de l'hyperbole. Le point K doit seulement être au delà du point F, sans que rien limite sa position à droite de ce point. Ce que nous venons de dire résulte d'ailleurs de la symétrie de l'équation de condition $MF' - MF = \pm 2a$, par rapport aux deux rayons vecteurs.

Si le point K est en F, les points correspondants de l'hyperbole sont les points A et A'. Le rayon vecteur minimum est $c - a$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, puisque les rayons vecteurs d'un point de la courbe peuvent croître jusqu'à l'infini.

THÉORÈME.

712. *L'hyperbole a : 1° pour axes, la droite* AA' *qui passe par ses deux foyers et la droite* BB' *perpendiculaire au milieu*

de la première; 2° pour centre, l'intersection O *de ces deux droites* (*fig.* 408).

Même démonstration que pour l'ellipse (665), en considérant la différence des rayons vecteurs au lieu de leur somme.

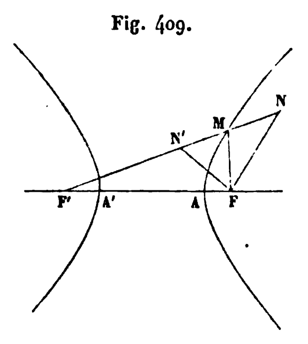
COROLLAIRE.

713. Des deux axes AA′ et BB′, le premier seul rencontre la courbe. L'axe AA′ est dit l'axe *transverse* de l'hyperbole, l'axe BB′ est dit son axe *non transverse*. Les extrémités A et A′ de l'axe transverse sont les *sommets* de la courbe.

THÉORÈME.

714. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus grande ou plus petite que* $2a$ (*fig.* 409).

Fig. 409.



Le point N étant intérieur, joignons-le aux deux foyers. NF′ coupant au point M la branche de courbe qui correspond au foyer F, on a

$$NF < MN + MF, \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > NF' - MN - MF,$$

c'est-à-dire

$$NF' - NF > MF' - MF \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Le point N′ étant extérieur, joignons-le aux deux foyers. F′N′ prolongé coupant au point M la branche de courbe qui correspond au foyer F, on a

$$N'F + MN' > MF, \quad \text{d'où} \quad MF' - N'F - MN' < MF' - MF,$$

c'est-à-dire

$$N'F' - N'F < 2a.$$

COROLLAIRE.

715. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à l'hyperbole supposée non tracée. *Suivant que la différence des distances du point considéré aux deux foyers est inférieure, égale ou supérieure à* $2a$, *ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

716. *La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact* (*fig.* 410, 411).

Même démonstration que pour l'ellipse (670), en remarquant que dans l'ellipse les rayons vecteurs d'un même point varient en sens contraires, tandis que dans l'hyperbole ils varient dans le même sens.

717. Réciproquement, *la courbe dont la tangente fait des angles égaux, extérieurement ou intérieurement, avec les rayons vecteurs menés du point de contact à deux points fixes, est une ellipse ou une hyperbole dont ces points fixes sont les foyers.*

Fig. 410.

En effet, si l'on abaisse d'un point G de la tangente MT (*fig.* 410) des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs du point M, les triangles rectangles ainsi formés seront égaux, puisque la tangente est par hypothèse la bissectrice de l'angle HMI; on aura donc MH = MI.

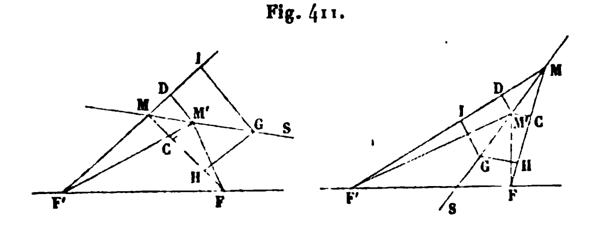
Considérons maintenant la sécante MM'S (*fig.* 411) qui coupe la courbe en M et en M', et portons les rayons vecteurs du point M' sur ceux du point M en FC et en F'D. Si l'on mène alors d'un point G quelconque de la sécante les parallèles GH

et GI à M'C et à M'D, les quadrilatères M'CMD, GHMI, seront semblables, et l'on aura constamment

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MH}{MI}.$$

Mais à la limite, quand le point M' vient en M, la sécante

Fig. 411.



MM'S est remplacée par la tangente MT, et l'on a MH = MI. Donc, la limite du rapport $\frac{MC}{MD}$ est aussi l'unité.

Or, si les deux rayons vecteurs varient en sens contraires, MD étant la diminution du premier, MC est l'augmentation égale du second, et la courbe est une ellipse, puisque la somme des rayons vecteurs d'un même point demeure constante. Si les deux rayons vecteurs varient dans le même sens, MD étant l'augmentation de l'un, MC est l'augmentation égale de l'autre, et la courbe est une hyperbole, puisque la différence des rayons vecteurs d'un même point demeure constante.

COROLLAIRES.

718. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point* M, *sont extérieurs à l'hyperbole, qui est, par suite, une courbe convexe.*

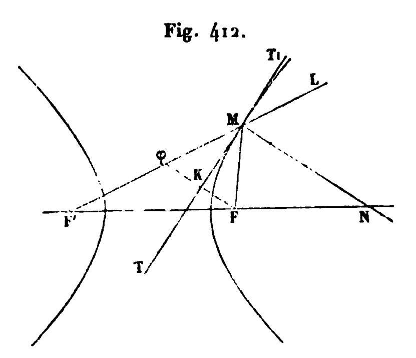
Même démonstration que pour l'ellipse (671), en remplaçant la somme des rayons vecteurs par leur différence.

719. Si l'on mène au point M (*fig.* 412) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les angles FMN, LMN, sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

La normale en un sommet de l'hyperbole se confond avec l'axe transverse, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

La tangente, la normale et les rayons vecteurs menés en un même point de la courbe rencontrent une sécante quelconque en quatre points conjugués deux à deux (**143**).

Fig. 412.



Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers ou sont *homofocales,* elles se coupent à angle droit, car, en l'un quelconque des points d'intersection, la tangente de l'une est la normale de l'autre (**670**, **673**).

720. Dans le cas de l'hyperbole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F, s'éloignent de plus en plus de l'autre foyer F′ après leur réflexion sur la courbe; mais toutes leurs directions prolongées viennent y converger.

THÉORÈME.

721. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *par rapport aux tangentes est un cercle (directeur) décrit de l'autre foyer* F′ *comme centre avec la longueur* 2*a* *de l'axe transverse pour rayon (fig.* 412*).*

Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre F′ *et d'un point* F *extérieur à ce cercle est une hyperbole dont les foyers sont les points* F *et* F′, *et dont le cercle directeur relatif au foyer* F′ *est le cercle donné.*

Même démonstration que pour l'ellipse (**675**, **676**), en remplaçant toujours la somme des rayons vecteurs par leur différence. L'hyperbole a, comme l'ellipse, deux cercles directeurs.

COROLLAIRE.

722. Ce théorème fournit une nouvelle construction par points (711) de l'hyperbole, qu'on peut résumer comme il suit : *Si d'un point* F, *pris à l'extérieur d'un cercle* F', *on mène des droites aux divers points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une hyperbole qui a pour foyers les points* F *et* F' *et pour axe transverse le rayon du cercle* F' ; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les prolongements des rayons du cercle* F' *qui correspondent aux points considérés.*

THÉORÈME.

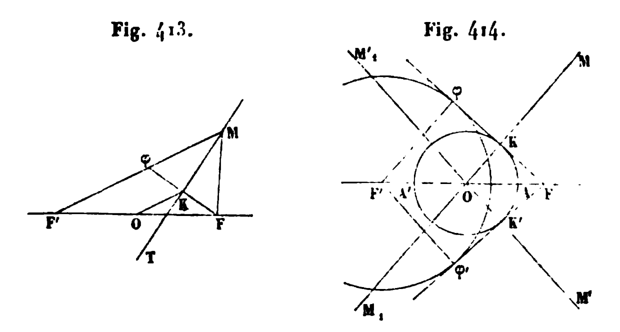
723. *Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur ses tangentes est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre* (*fig.* 413).

Même démonstration que pour l'ellipse (677). Le cercle obtenu est dit le cercle *principal* de l'hyperbole.

COROLLAIRES.

724. Soient (*fig.* 413) la tangente MT, les rayons vecteurs MF, MF', de son point de contact, φ le symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT, K la projection de ce foyer sur la tangente. Les rayons OK et F'φ du cercle principal et du

Fig. 413. Fig. 414.



cercle directeur relatif au foyer F' restent toujours parallèles entre eux pendant que, le point φ parcourant le cercle directeur, la droite Fφ tourne autour du foyer F (722, 723). Au moment où cette droite devient tangente au cercle directeur, elle le devient donc aussi au cercle principal (163); soient φ et K ses points de contact avec ces deux cercles (*fig.* 414). La

tangente à l'hyperbole qui passe par le point K, étant perpen-diculaire à F φ, n'est alors autre chose que le prolongement du rayon OK et devient parallèle au rayon F′ φ, de sorte que son point de contact M s'éloigne à l'infini (722). La droite OKM ainsi obtenue, qui touche la branche supérieure de la demi-hyperbole de droite à l'infini, est appelée *asymptote* de l'hyperbole.

La seconde tangente commune menée au cercle principal et au cercle directeur F′ par le foyer F correspond à une seconde asymptote OK′M′, qui touche à l'infini la branche inférieure de la demi-hyperbole de droite.

Les droites OKM, OK′M′, étant également inclinées de part et d'autre de l'axe transverse, si l'on fait faire à l'hyperbole une demi-révolution autour de son axe non transverse, les foyers ne font que s'échanger, ainsi que les deux demi-hyperboles, de sorte que le prolongement OM_1 de la droite OKM est asymptote à la branche inférieure de la demi-hyperbole de gauche, tandis que le prolongement OM'_1 de la droite OK′M′ est asymptote à la branche supérieure de cette demi-hyperbole.

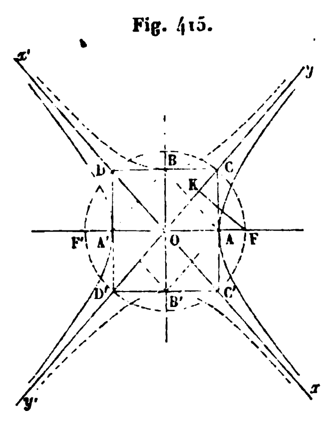
En résumé, *l'hyperbole a pour asymptotes les deux droites indéfinies tracées par son centre, parallèlement aux rayons du cercle directeur* F′ *qui correspondent aux tangentes communes menées du foyer* F *au cercle* F′ *et au cercle principal de la courbe*. Ces droites sont d'un grand secours pour la construction de l'hyperbole, puisqu'elles font connaître les directions vers lesquelles tendent ses branches infinies.

725. Soient (*fig.* 415) les asymptotes xx', yy', de l'hyperbole dont les foyers sont F et F′ et les axes AA′ et BB′. Menons au point A la perpendiculaire AC à l'axe transverse, jusqu'à la rencontre de l'asymptote yy'. D'après ce qui précède, si l'on abaisse aussi FK perpendiculaire sur yy', on aura $OK = a$. Les deux triangles rectangles OAC, OKF, sont donc égaux, et $OC = OF = c$. On voit que, a et c étant donnés, on en déduit AC; de même, a et AC étant connus, on en déduit c.

Achevons le rectangle CC′D′D. Par analogie avec l'ellipse (666), la longueur $BB' = 2AC$ ainsi déterminée est appelée la *longueur de l'axe non transverse* de l'hyperbole, et on la représente par $2b$. Remarquons que le parallélogramme ABA′B′ a ses côtés parallèles aux asymptotes.

Les trois longueurs a, b, c, sont liées entre elles par la relation $c^2 = a^2 + b^2$. Elles sont liées dans l'ellipse par la relation $c^2 = a^2 - b^2$, qui ne diffère de la précédente que par le changement de b^2 en $-b^2$. Par suite, *les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole qui ne dépendent que des longueurs de leurs axes se déduisent les unes des autres par le simple changement de b^2 en $-b^2$.*

Fig. 415.



726. Lorsqu'on donne les longueurs des axes de l'hyperbole, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à élever à l'extrémité A de l'axe transverse une perpendiculaire $AC = b$ (*fig.* 415) et à décrire du point O comme centre, avec OC pour rayon, une circonférence qui coupe l'axe transverse aux deux foyers F et F'. On trouve en même temps l'asymptote OC et sa symétrique OC'.

727. On appelle *hyperbole équilatère* une hyperbole dont les deux axes ont la même longueur. Le rectangle CC'D'D (*fig.* 415) devenant alors un carré, on voit que *les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont à angle droit l'une sur l'autre.*

728. On entend par *hyperboles conjuguées* deux hyperboles qui ayant les mêmes axes, et par suite le même centre, la même distance focale et les mêmes asymptotes, sont situées par rapport à ces asymptotes dans des angles différents, c'est-à-dire que l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement (*fig.* 415).

Deux hyperboles conjuguées ne sont identiques et ne peuvent

se substituer l'une à l'autre par un quart de révolution, qu
lorsqu'elles sont équilatères (727).

PROBLÈME.

729. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné*

Mêmes procédés que pour l'ellipse (679).

COROLLAIRES.

730. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est une circonférence concentrique à la courbe et ayant pour rayon* $\sqrt{a^2 - b^2}$ (680, 725).

La démonstration directe est la même que pour l'ellipse. Seulement, la question revient ici à chercher le lieu des milieux des cordes interceptées dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit dont le sommet F lui est extérieur. Le problème peut alors être impossible, et le lieu cesse d'exister, si l'on a $a < b$.

La tangente de l'angle aigu formé par l'asymptote Oy avec l'axe transverse étant représentée par $\frac{b}{a}$ (*voir* la *Trigonométrie*), le problème est impossible quand cet angle est supérieur à 45 degrés ou quand l'angle yOx des deux asymptotes (*fig.* 415) est obtus; il est possible, au contraire, quand cet angle est aigu.

En effet, l'angle des deux asymptotes est précisément (724) le supplément de celui des deux tangentes qu'on peut mener au cercle directeur F' par le foyer F. Or, ce n'est que lorsque l'angle de ces deux tangentes est obtus que les deux côtés de l'angle droit dont le sommet est en F peuvent rencontrer à la fois le cercle F'.

Lorsque l'angle des asymptotes est droit, celui des deux tangentes menées du foyer F au cercle directeur F' est aussi droit, et il n'y a pas d'autre angle droit circonscrit à l'hyperbole que celui de ses asymptotes. Ce résultat limite est d'ailleurs évident, car, la courbe étant alors équilatère (727), on a $a = b$, et le lieu se réduit au centre de l'hyperbole.

En général, le problème n'est possible que pour l'une des deux hyperboles conjuguées (728) déterminées par les axes a et b.

731. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'hyperbole par un*

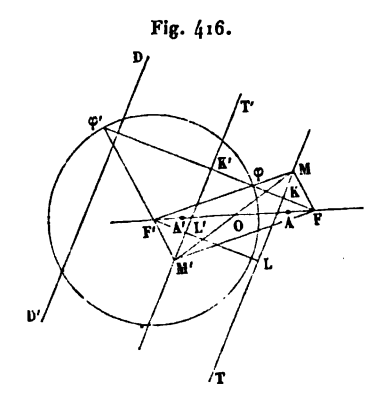
point extérieur P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur des rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M', *suivant que les deux tangentes touchent l'hyperbole dans la même région ou dans deux régions différentes.*

PROBLÈME.

732. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 416).

Même procédé que pour l'ellipse (682). Seulement, le problème n'est pas toujours possible. Il faut que, si l'on mène

Fig. 416.



par le centre de la courbe une parallèle à la droite donnée, elle ne tombe pas dans les angles des asymptotes qui renferment l'hyperbole. En effet, pour que la perpendiculaire menée du foyer F à la droite donnée rencontre le cercle directeur F', il est nécessaire qu'elle tombe au-dessous de la droite FK, perpendiculaire à la fois à l'asymptote Oy (*fig.* 415) et tangente à ce cercle directeur. Le problème n'est donc en général possible que pour l'une des deux hyperboles conjuguées déterminées par les axes a et b.

COROLLAIRES.

733. *Les deux tangentes parallèles à une droite donnée ont leurs points de contact symétriques par rapport au centre* (683).

734. *Le produit des distances d'un foyer à deux tangentes*

parallèles ou le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant (685).

SCOLIE.

735. Les constructions des nos 729 et 732 n'exigent pas que l'hyperbole soit tracée (686).

PROBLÈME.

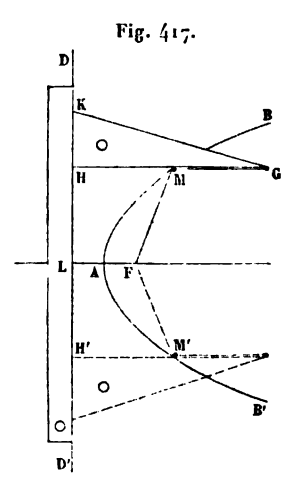
736. *Connaissant les foyers* F *et* F′ *et l'axe transverse d'une hyperbole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée.*

Même procédé que pour l'ellipse (687).

Propriétés fondamentales de la parabole.

737. La *parabole* est une courbe plane telle, que chacun de ses points est équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe donnés dans son plan. Ainsi (*fig.* 417), le point fixe étant F

Fig. 417.



et la droite fixe DD′, on aura, pour tout point M de la parabole, en abaissant MH perpendiculaire sur DD′, MF = MH. Par sa définition même, la parabole est nécessairement située tout entière du même côté que le point fixe par rapport à la droite fixe.

D'après ce qu'on vient de dire, pour décrire un arc de parabole d'*un mouvement continu*, on fait coïncider l'arête d'une règle avec la droite DD', et l'on applique contre cette règle le petit côté KH d'une équerre KHG. Un fil, égal en longueur au grand côté HG de cette équerre, est fixé par ses deux extrémités, d'une part au point F et de l'autre à l'extrémité G du côté HG. Si l'on tend alors constamment ce fil contre le grand côté de l'équerre à l'aide d'un crayon, et si l'on fait en même temps glisser l'équerre le long de la règle, la pointe du crayon décrit un arc de parabole. En effet, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$GM + MF = GM + MH, \quad \text{d'où} \quad MF = MH.$$

En opérant de cette manière, on trace d'un mouvement continu l'arc BA, qui va du point B de la courbe, dont la distance au point F est égale à GH, jusqu'au point A, milieu de la perpendiculaire FL abaissée du point F sur la droite DD'. Il faut ensuite retourner l'équerre, comme l'indique la figure, pour décrire l'arc AB'.

On voit que la parabole est formée de deux branches qui s'étendent indéfiniment, à partir du point A, au-dessus et au-dessous de la droite FL; car, si l'on emploie une règle, une équerre et un fil assez longs, rien ne limite l'éloignement des points obtenus sur la courbe. La parabole est donc une courbe à branches infinies, mais sans séparation, et d'un seul côté de la droite fixe.

738. Le point F est le *foyer* de la parabole; la droite DD' est sa *directrice*. La droite MF est le *rayon vecteur* du point M. La distance FL du foyer à la directrice se nomme le *paramètre* de la courbe, et on la représente par p.

739. On peut aussi tracer la parabole *par points*.

En effet, prenons (*fig.* 418) un point P quelconque sur la perpendiculaire FL abaissée du foyer sur la directrice. Par le point P, menons une perpendiculaire à FL ou une parallèle à la directrice, et du foyer F comme centre, avec PL pour rayon, décrivons une circonférence qui coupera cette parallèle en deux points M et M' appartenant à la parabole, comme équidistants du foyer et de la directrice.

Pour que les points d'intersection M et M' existent, il suffit

que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit du foyer F comme centre avec PL pour rayon, c'est-à-dire qu'on ait $FP < PL$. Cette condition sera toujours remplie lorsque le point P sera à droite du foyer F (dans le cas de la figure); mais elle exige, si le point P est à gauche de F, qu'il reste à droite du point A, milieu de FL. Si l'on a dans ce cas, comme condition limite, $FP = PL$, le point P se confond avec le point A, et les deux points M et M' se réunissent en ce point. Le rayon vecteur minimum est donc AF ou $\frac{p}{2}$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, rien ne limitant l'éloignement du point P à droite du foyer F.

THÉORÈME.

740. *La parabole a pour axe la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice* (*fig.* 418).

Même démonstration que pour l'ellipse (665, 1°).

Fig. 418.

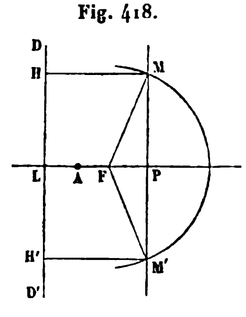
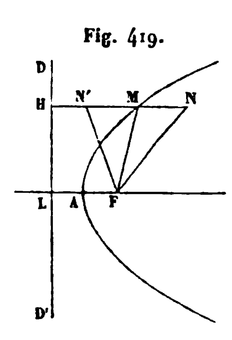


Fig. 419.



Le point A, commun à la parabole et à son axe, est le *sommet* de la courbe.

THÉORÈME.

741. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est moindre ou plus grande que sa distance à la directrice* (*fig.* 419).

Soit d'abord un point N intérieur à la courbe. Menons la droite NF et la perpendiculaire NH à la directrice, laquelle coupera la parabole au point M (737). Le triangle NFM donne alors

$$NF < NM + MF \quad \text{ou} \quad NF < NH, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

Soit de même un point N′ extérieur à la courbe. Si le point N′ et le foyer sont de côtés différents par rapport à la directrice, la proposition est évidente. Sinon, menons la droite N′F et la perpendiculaire N′H à la directrice, laquelle, prolongée, coupera la parabole au point M. Le triangle N′FM donne alors

$$N'F > MF - MN' \quad \text{ou} \quad N'F > N'H, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

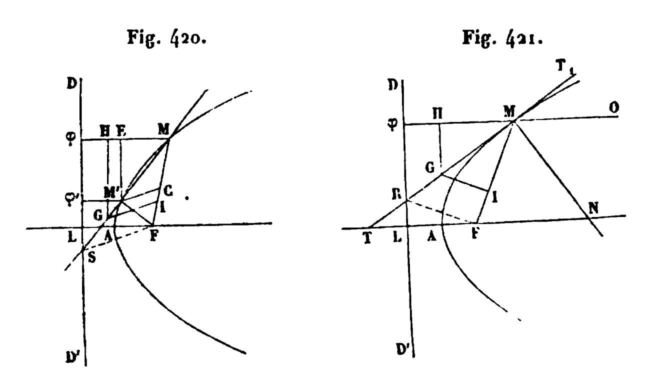
COROLLAIRE.

742. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à la parabole supposée non tracée. *Suivant que la distance du point considéré au foyer est égale, supérieure ou inférieure à sa distance à la directrice, ce point est à la courbe, il lui est extérieur ou intérieur.*

THÉORÈME.

743. *La tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point.*

Prenons sur la parabole (*fig.* 420) deux points voisins M et M′; menons la sécante MM′S; abaissons des deux points considérés les perpendiculaires Mφ, M′φ′, sur la directrice DD′, et traçons leurs rayons vecteurs. Portons sur FM une lon-



gueur FC = FM′ et, sur φM, une longueur φE = φ′M′. D'après la définition de la parabole, MC est égal à ME.

D'un point G quelconque de la sécante MM'S, menons à M'C et à M'E, jusqu'à la rencontre de FM et de φM, les parallèles GI et GH. Les deux quadrilatères CM'EM, IGHM, sont semblables (153), et l'égalité de MC et de ME entraîne celle de MI et de MH.

A mesure que le point M' se rapproche du point M, GH reste, comme M'E, perpendiculaire à Mφ, tandis que GI, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle M'FC, tend à le devenir au rayon vecteur FM. On a de plus constamment MI = MH. La tangente à la parabole (*fig.* 421) doit donc être telle que, si, d'un point quelconque G pris sur cette droite, on abaisse des perpendiculaires GI et GH sur le rayon vecteur du point de contact M et sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, on ait MI = MH. Les triangles rectangles MGI, MGH, sont donc égaux, ainsi que les angles GMI, GMH. *La tangente à la parabole est donc bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice.*

Mais, l'angle GMH étant l'opposé par le sommet de l'angle T_1MO, les deux angles GMI ou TMF et T_1MO sont égaux; ce qui conduit à l'énoncé adopté.

744. Réciproquement, *la courbe dont la tangente est bissectrice de l'angle formé par les droites menées d'un point de la courbe à un point fixe et perpendiculairement à une droite fixe, est une parabole ayant le point et la droite fixes pour foyer et pour directrice.*

Démonstration analogue à celle donnée pour l'ellipse et l'hyperbole (717).

COROLLAIRE.

745. Soit S le point où la sécante MM'S (*fig.* 420) coupe la directrice DD'. On a, à cause des parallèles,

$$\frac{MS}{M'S} = \frac{M\varphi}{M'\varphi'} = \frac{MF}{M'F};$$

la droite SF est donc la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle MFM' (143). *La droite qui joint le foyer d'une parabole au point de rencontre d'une sécante quelconque avec*

la directrice est donc *bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs des points d'intersection de la sécante avec la courbe.*

A la limite, quand la sécante devient tangente, c'est-à-dire quand l'angle MFM′ devient nul, la droite SF est remplacée (*fig.* 421) par la droite RF, bissectrice de l'angle supplémentaire de cet angle nul. Par suite, *la droite qui joint le foyer d'une parabole au point où une tangente quelconque rencontre la directrice, est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.*

746. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point de contact* M, *sont extérieurs à la parabole*, qui, par suite (672), est une courbe convexe (*fig.* 422).

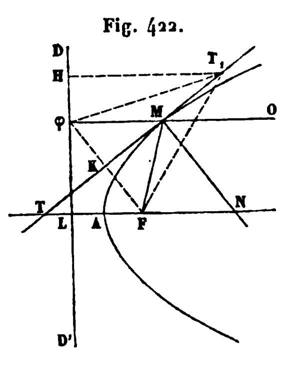


Fig. 422.

En effet, le triangle FMφ étant isocèle et la tangente étant la bissectrice de son angle au sommet (743), elle est perpendiculaire sur le milieu K de Fφ. Pour un point T_1 quelconque de la tangente, on a donc, T_1H étant la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, $T_1H < T_1\varphi$ ou $T_1H < T_1F$. Le point T_1 est donc extérieur à la courbe (742).

747. Si l'on mène au point M (*fig.* 422) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, OMN, sont égaux comme compléments d'angles égaux (743). Donc, *la normale à la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle menée à l'axe par ce point.*

Au sommet de la parabole, la normale se confond avec l'axe et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Soient T et N (*fig.* 422) les points où la tangente et la normale rencontrent l'axe. Les triangles TMF, NMF, étant évidemment isocèles, on a MF = FT = FN. *Le foyer* F *est* donc *à une distance, soit du pied de la tangente, soit du pied de la normale sur l'axe, égale au rayon vecteur du point de contact.*

748. Dans le cas de la parabole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent du foyer, deviennent tous

parallèles à l'axe après leur réflexion sur la courbe. C'est pourquoi l'on emploie des réflecteurs paraboliques lorsqu'on veut projeter au loin un faisceau de rayons lumineux parallèles (lanternes de voitures, phares). Réciproquement, tout rayon qui vient rencontrer la parabole parallèlement à son axe se réfléchit au foyer de la courbe. De là, par exemple, l'usage des réflecteurs paraboliques dans les télescopes, pour concentrer au foyer les rayons lumineux venant de l'astre observé.

THÉORÈME.

749. *Le lieu des points symétriques* φ *du foyer* F *par rapport aux tangentes à la parabole est la directrice* (*fig.* 422).

Cette proposition est évidente d'après ce qui a été dit au n° 746.

SCOLIE.

750. *Étant donnés un point* F *et une droite* DD′ (*fig.* 422), *si l'on mène des droites* Fφ *aux différents points de la droite* DD′, *les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une parabole qui a pour foyer le point* F *et pour directrice la droite* DD′; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les perpendiculaires menées à la directrice par les points* φ.

C'est là un nouveau procédé pour décrire la parabole par points (739). En le suivant, on n'obtient qu'un point à la fois; mais on a en même temps la tangente en ce point.

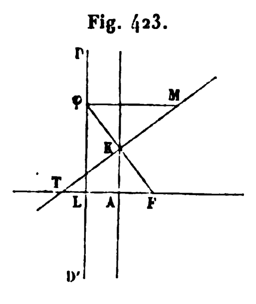
751. On voit que *les parallèles à l'axe de la parabole ne rencontrent la courbe qu'en un seul point.* Il serait donc faux de dire qu'une droite qui n'a qu'un point commun avec une courbe, même convexe, lui est tangente. Une droite tangente à une courbe convexe n'a qu'un point commun avec elle (672); mais la réciproque n'est pas vraie.

THÉORÈME.

752. *Le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.*

MT étant la tangente à la courbe au point M (*fig.* 423), et φ le symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, le

point K où Fφ coupe la tangente est le milieu de Fφ. D'ailleurs, le sommet A est le milieu de FL. Donc, dans le triangle FLφ, AK est parallèle à la directrice ou se confond avec la tangente au sommet (747). La projection K du foyer sur une tangente se trouve, par suite, sur la tangente au sommet.



Réciproquement, K étant un point de la tangente au sommet, si l'on mène la droite FKφ, le point φ sera le symétrique du foyer F par rapport à la tangente qui passe par le point K (750); le point K sera donc la projection du foyer F sur cette tangente.

COROLLAIRE.

753. Si l'un des côtés d'une équerre passe constamment par le foyer F, tandis que son sommet parcourt la tangente AK au sommet de la courbe, l'autre côté de l'équerre reste constamment tangent à la parabole.

THÉORÈME.

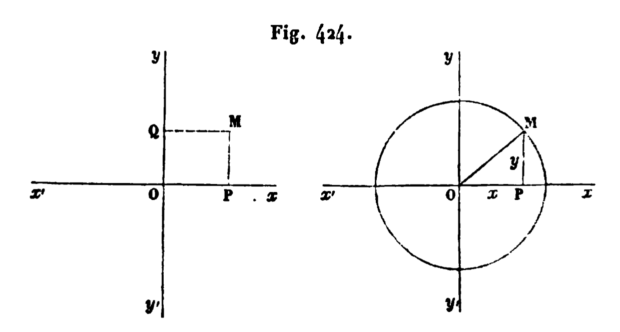
754. *Dans toute courbe rapportée à des axes rectangulaires, l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et la sous-normale.*

Pour indiquer la position d'un point M dans un plan, on peut donner ses distances MP et MQ à deux axes rectangulaires indéfinis xOx', yOy' (*fig.* 424), tracés dans ce plan. Le nombre qui mesure la distance MQ = OP du point M à l'axe yOy', s'appelle l'*abscisse* de ce point; son *ordonnée* est le nombre qui mesure sa distance MP = OQ à l'axe xOx'. L'abscisse est d'ailleurs positive ou négative, suivant que P tombe sur Ox ou sur Ox'; l'ordonnée est positive ou négative, suivant que Q tombe sur Oy ou sur Oy'. L'abscisse et l'ordonnée d'un point M constituent ses deux *coordonnées*. Les axes xOx' et yOy' sont les *axes des coordonnées*, et leur intersection O en est l'*origine* (*voir* les indications déjà données à ce sujet, t. I, *Alg. élém.*, 312).

Quand un point appartient à une courbe donnée, son ordonnée y dépend de son abscisse x, et elle est déterminée

par le choix de cette abscisse. Par exemple, l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point quelconque d'une circonférence de

Fig. 424.



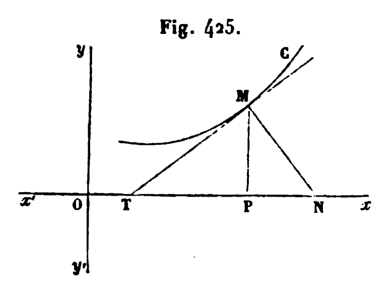
rayon R, rapportée à deux axes rectangulaires passant par son centre (*fig.* 424), sont évidemment liées par la relation

$$y^2 + x^2 = R^2, \quad \text{d'où} \quad y^2 = R^2 - x^2.$$

Le choix des axes coordonnés est arbitraire. On adopte de préférence les droites les plus remarquables du plan relativement à la courbe, telles que ses axes, ses tangentes aux sommets, etc. Dans la parabole, on choisit l'axe et la tangente au sommet.

Cela posé, soit (*fig.* 425) une courbe C rapportée à deux

Fig. 425.



axes de coordonnées rectangulaires xOx', yOy'. Menons en un point quelconque M la tangente MT, la normale MN et l'ordonnée MP. La projection TP sur l'axe Ox de la portion de tangente MT comprise entre son point de contact M et son pied T sur cet axe, s'appelle *sous-tangente;* de même, PN est la *sous-normale.* Le triangle TMN étant rectangle en M, et MP étant perpendiculaire sur l'hypoténuse TN, le théorème énoncé est démontré (167).

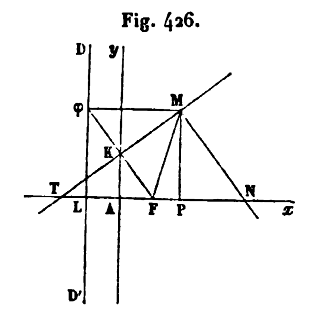
Au lieu d'axes rectangulaires, on peut employer des axes obliques. Les coordonnées d'un point sont encore ses distances aux deux axes, mais comptées parallèlement à ces axes. Les projections ne sont plus alors orthogonales, mais obliques, et le théorème précédent cesse d'être vrai.

THÉORÈME.

755. *Dans la parabole : 1° la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact; 2° la sous-normale est constante et égale au paramètre* (*fig.* 426).

1° Soit la tangente en M à la parabole. Si l'on prend pour axes coordonnés l'axe Ax de la courbe et la tangente au sommet Ay, le point M aura MP pour ordonnée et AP pour abscisse. Le triangle TFM étant isocèle (743), la projection K du foyer F sur la tangente MT est le milieu de MT. La tangente au sommet, AKy, étant parallèle à l'ordonnée MP, le sommet A est donc le milieu de la sous-tangente TP, et TP = 2AP.

Fig. 426.



2° Soit la normale MN. Elle est perpendiculaire à la tangente MT comme la droite Fφ. La figure MφFN est donc un parallélogramme, et φF = MN. Les deux triangles rectangles MPN, φLF, sont alors égaux, et l'on a PN = LF = p.

COROLLAIRE.

756. *Le carré de l'ordonnée d'un point de la parabole est proportionnel à l'abscisse de ce point* (*fig.* 426).

Soient y et x les coordonnées MP et AP d'un point quelconque M de la parabole. On a (754, 755)

$$y^2 = \mathrm{TP}.\mathrm{PN} = 2x.p \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px.$$

PROBLÈME.

757. *Mener une tangente à la parabole par un point donné.*

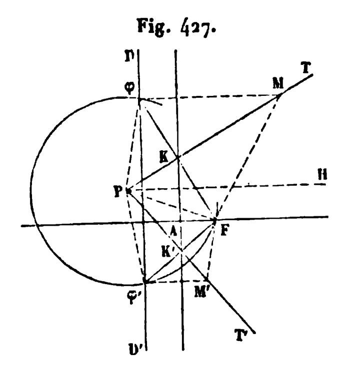
1° *Si le point donné* M *est sur la courbe* (*fig.* 426), on mène le rayon vecteur MF et la perpendiculaire Mφ sur la directrice;

puis, la bissectrice de l'angle FMφ, qui est la tangente demandée (743).

Il vaut mieux prendre sur l'axe, du côté du sommet, une longueur FT égale à MF; en joignant le point T ainsi obtenu au point donné M, on a (743) la tangente demandée.

2° *Si le point donné* P *est extérieur à la parabole*, on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ du foyer F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait alors cette tangente en abaissant du point P une perpendiculaire TP sur Fφ (*fig.* 427). La droite TP couperait d'ailleurs la parallèle menée à l'axe par le point φ, au point de contact M. Or, le point φ se trouve à la fois sur la directrice DD' (749) et sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF comme rayon.

Fig. 427.



Ce cercle et la directrice se coupent toujours, quand le point P est extérieur à la courbe; car il est alors plus près de la directrice que du foyer (741), et il y a deux solutions, qui se réduisent à une seule quand le point P est sur la parabole, ou disparaissent lorsqu'il est intérieur à la courbe.

COROLLAIRES.

758. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à la parabole soient à angle droit.

Ces tangentes étant supposées à angle droit, comme elles sont respectivement perpendiculaires aux milieux des droites Fφ et Fφ', l'angle φFφ' est aussi droit; par suite, $\varphi\varphi'$ est un diamètre de la circonférence PF, et le point P est sur la directrice. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est donc la directrice.*

Dans ce cas, l'angle PFM est droit ainsi que l'angle PFM' (745); la corde des contacts MM' passe donc alors par le foyer et est perpendiculaire à PF.

759. *Les tangentes* PM, PM', *menées d'un point extérieur* P *à la parabole, font des angles égaux avec la droite*

qui joint ce point au foyer et avec la parallèle menée à l'axe par ce point; la droite qui va du foyer au point P *est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des points de contact* M *et* M'.

Reportons-nous à la *fig.* 427, et soit PH la parallèle menée à l'axe par le point P. La tangente PMT étant perpendiculaire sur le milieu de Fφ, comme la tangente PM'T' sur le milieu de Fφ', les deux angles MPH, F$\varphi\varphi'$, ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et sont égaux; la droite PM' est la bissectrice de l'angle φ'PF, et l'angle au centre M'PF, égal alors à l'angle inscrit F$\varphi\varphi'$, l'est aussi à l'angle MPH. De plus, les angles PFM, PFM', sont respectivement égaux aux angles PφM, Pφ'M'. Or, le triangle φPφ' étant isocèle, les angles PφM, Pφ'M', sont égaux comme composés d'angles égaux; et leur égalité démontre celle des angles PFM, PFM'.

PROBLÈME.

760. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point φ, symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point se trouve à l'intersection de la directrice et de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la droite donnée. Il y a toujours une solution, et une seule.

SCOLIE.

761. Les constructions des n°s 757 et 760 n'exigent pas que la courbe soit tracée : il suffit d'en connaître le foyer et la directrice.

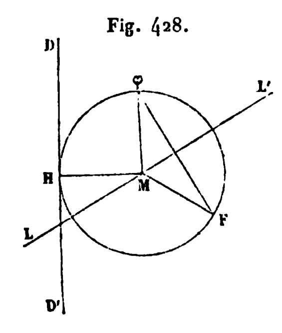
PROBLÈME.

762. *Connaissant le foyer* F *et la directrice* DD' *d'une parabole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée* LL'.

Supposons le problème résolu, et prenons (*fig.* 428) le symétrique φ du foyer F par rapport à LL'. Si M est l'un des points de rencontre de la droite LL' avec la courbe, on a Mφ = MF = MH, MH étant la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. Le cercle décrit du point M comme

centre, avec MF pour rayon, passe donc par les points F et φ et est tangent à la directrice. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à une droite donnée DD′. Nous avons résolu ce problème (196, 1°).

Fig. 428.



Comme il n'est possible que lorsque les deux points F et φ sont situés d'un même côté de la droite DD′, la droite LL′ coupera la parabole, lui sera tangente ou ne la rencontrera pas, suivant que le point φ sera du même côté que le foyer par rapport à la directrice, sur cette directrice, ou de l'autre côté de cette droite par rapport au foyer.

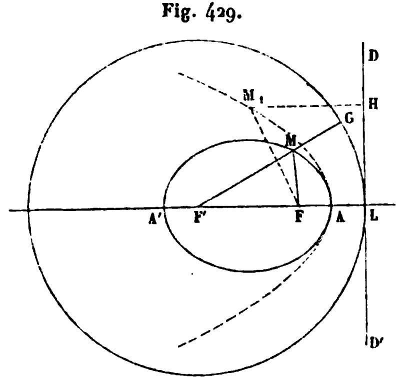
COROLLAIRE.

763. La parabole, ne pouvant être coupée par une droite en plus de deux points, est une courbe convexe (746).

De la parabole, considérée comme limite de l'ellipse.

764. *La limite d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du grand axe (ou de l'axe transverse), est une parabole qui a pour sommet et pour foyer le sommet et le foyer fixes (fig. 429).*

Fig. 429.



En effet, le cercle directeur relatif au foyer mobile F′ coupe toujours le grand axe à droite du foyer fixe F, en un même point L déterminé par la

condition évidente AL = AF. A mesure que le centre F′ de ce cercle s'éloigne dans la direction AA′, son rayon croît indéfiniment, de sorte qu'il a pour limite la perpendiculaire DD′ menée par le point L au grand axe AA′. D'ailleurs, tout point M de l'ellipse étant également distant du foyer F et du cercle directeur F′ (676), on a constamment MF = MG, c'est-à-dire à la limite, quand l'ellipse se déformant le point M vient en M_1, $M_1F = M_1H$, en désignant par M_1H la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite DD′, limite du cercle F′. Le lieu des positions limites des points de l'ellipse donnée est donc une parabole ayant pour foyer et pour sommet les points F et A, et, par suite, la droite DD′ pour directrice.

La même démonstration s'applique à l'hyperbole (721). Dans ce cas, la parabole est la limite de la demi-hyperbole de droite à laquelle appartiennent le sommet A et le foyer F; l'autre demi-hyperbole de gauche disparaît à l'infini.

COROLLAIRE.

765. Le théorème précédent permet de prévoir et de démontrer les propriétés de la parabole, en les déduisant par voie de transformation des propriétés correspondantes de l'ellipse.

Par exemple, pour démontrer que *la tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point* (743), il suffit de remarquer que, lorsque l'un des foyers de l'ellipse s'éloigne à l'infini, le rayon vecteur relatif à ce foyer tend à devenir parallèle au grand axe.

De même, pour établir que *le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet* (752), on n'a qu'à observer que le cercle principal de l'ellipse tend vers la tangente au sommet fixe du grand axe, lorsque l'autre sommet se transporte à l'infini.

Si les propriétés considérées dépendent explicitement des axes a et b de l'ellipse et de sa distance focale c, on substitue à a et à b leurs valeurs en fonction de c et du paramètre $p = 2(a - c)$ de la parabole limite; puis, en supposant c infini dans les formules obtenues, on passe des propriétés de l'ellipse représentées par ces formules aux propriétés correspondantes de la parabole exprimées en fonction du paramètre p.

THÉORÈME.

766. *Tous les diamètres de la parabole sont des droites parallèles à l'axe.*

On démontre immédiatement cette proposition en regardant la parabole comme la limite d'une ellipse (764) dont l'un des foyers et le sommet voisin coïncident avec le foyer et le sommet de la parabole, mais dont l'autre foyer et, par suite, le centre se transportent à l'infini sur le grand axe de la courbe.

Les propriétés de l'ellipse démontrées aux n°s 700 et 701 appartiennent

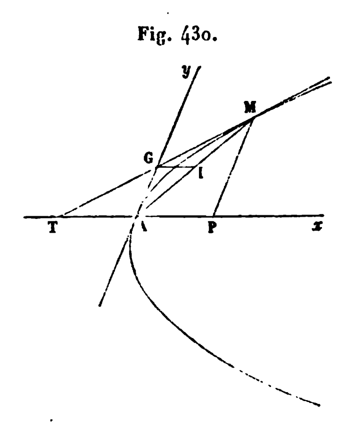
aussi à la parabole limite. Ces propriétés vont nous permettre d'établir la proposition suivante.

THÉORÈME.

767. *La parabole étant rapportée au système d'axes obliques formé par un diamètre et la tangente à son extrémité, dans ce nouveau système d'axes, la sous-tangente est encore double de l'abscisse du point de contact* (755).

En effet, soient (*fig.* 430) la tangente Ay et le diamètre Ax pris pour

Fig. 430.



axes coordonnés; menons la tangente MT en un point quelconque M de la parabole. Si, par le point d'intersection G des tangentes Ay et MT, on mène une parallèle à Ax, cette parallèle coupera la corde AM en son milieu (701) : le point G est donc le milieu de TM. AGy étant parallèle à l'ordonnée MP, le point A est alors le milieu de la sous-tangente TP.

THÉORÈME.

768. *L'aire d'un segment parabolique est les deux tiers du parallélogramme qui a pour côtés la corde et la flèche du segment, cette flèche étant mesurée sur le diamètre conjugué à la corde du segment.*

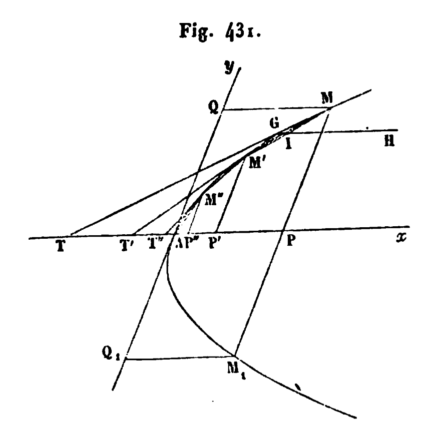
Soit (*fig.* 431) le segment parabolique MAM_1 déterminé par la corde MM_1. Prenons pour axes coordonnés le diamètre Ax conjugué à cette corde et la tangente parallèle Ay. Évaluons d'abord l'aire de la portion MAP.

Inscrivons dans l'arc AM une ligne brisée MM'M''... A, et, par les sommets de cette ligne brisée, menons à la courbe les tangentes MT, M'T',..., jusqu'à la rencontre du diamètre Ax; menons aussi les ordonnées MP, M'P',... des sommets de la ligne brisée.

Comparons le trapèze MM'P'P au triangle correspondant GTT'. Si l'on

mène par le sommet G du triangle une parallèle GH à Ax, elle passera par le milieu I de la corde MM' (766). La perpendiculaire abaissée du milieu du côté MM' sur le côté PP' du trapèze MM'P'P est donc égale à la hauteur du triangle GTT'. Pour avoir le rapport de leurs aires, il suffit

Fig. 431.



alors de comparer le côté PP' du trapèze à la base TT' du triangle; car, en menant par le point I une parallèle à PP' jusqu'à la rencontre de MP et de M'P', on transforme le trapèze en un parallélogramme équivalent. Or (767) AT = AP et AT' = AP', d'où TT' = PP'. Le triangle est donc la moitié du trapèze. Et, comme on peut répéter le même raisonnement pour chaque trapèze et pour le triangle correspondant, la somme des trapèzes reste toujours égale au double de la somme des triangles. La limite de la première somme étant l'aire MAP et la limite de la seconde l'aire MAT, l'aire MAP est les deux tiers du triangle total MTP ou du parallélogramme équivalent APMQ.

L'aire M_1AP étant de même les deux tiers du parallélogramme APM_1Q_1, l'aire cherchée MAM_1 est enfin les deux tiers du parallélogramme MQQ_1M_1, qui a pour côtés la corde MM_1 du segment ou le double de l'ordonnée MP, et la flèche de ce segment ou l'abscisse AP.

Ellipse, hyperbole et parabole, considérées comme sections planes du cône de révolution.

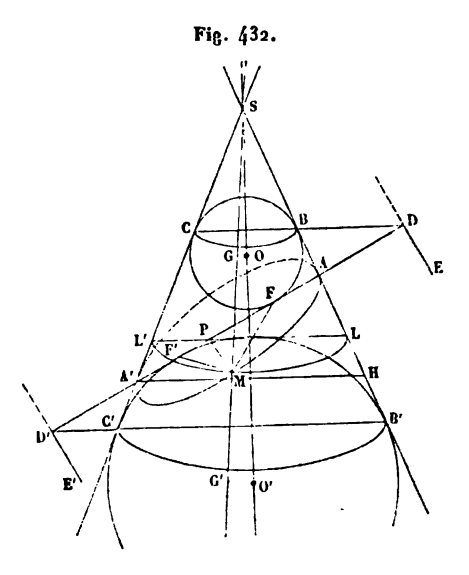
THÉORÈME.

769. *La section d'un cône circulaire droit par un plan est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

1° Supposons que *le plan sécant rencontre toutes les génératrices du cône sur une même nappe* (*fig.* 432).

Menons le plan méridien (470) du cône, qui est perpendiculaire au plan sécant AMA′; il coupera le cône suivant les deux génératrices SA et SA′, qui font entre elles l'*angle au sommet* de la surface, et le plan sécant suivant la droite AA′.

Fig. 432.



Dans le plan méridien ainsi considéré, construisons les circonférences O et O′ qui, situées de part et d'autre de AA′, sont à la fois tangentes aux génératrices SA et SA′ et à la droite AA′, qu'elles touchent aux points F et F′. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe SO, ces deux circonférences engendreront deux sphères tangentes à la surface conique suivant les parallèles (522) BC et B′C′, et tangentes au plan sécant en F et en F′.

Cela posé, prenons un point M quelconque sur la courbe d'intersection; menons les droites MF, MF′, et la génératrice SM qui coupera en G et en G′ les parallèles BC, B′C′. La droite MF étant tangente à la sphère O, on a (522) MF = MG. On a de même, par rapport à la sphère O′, MF′ = MG′. Par suite,

$$MF + MF' = MG + MG' = GG' = BB' = \text{const.}$$

D'ailleurs, en vertu des propriétés rappelées, on a

$$BB' = AB + AB' = AF + AF'$$

et

$$BB' = CC' = CA' + A'C' = A'F + A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une ellipse ayant* AA' *pour grand axe et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Si l'on trace A'H parallèle à BC, AH est la *distance focale* de cette ellipse. En effet,

$$AF' = AB' \quad \text{et} \quad HB' = A'C' = AF.$$

Les plans des parallèles BC, B'C', prolongés jusqu'à la rencontre du plan sécant, le coupent suivant deux droites DE, D'E', perpendiculaires au plan méridien considéré (663). Si l'on mène le parallèle LL' de la surface qui passe par le point M, son intersection avec le plan sécant est de même dirigée suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport au grand axe AA', et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les triangles APL, ADB, AA'H, évidemment semblables, donnent alors

$$\frac{BL \text{ ou } MF}{PD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AA'} = \text{const}.$$

Ainsi, les distances de chaque point de l'ellipse trouvée au foyer F et à la droite DE sont entre elles dans un rapport égal à l'excentricité (663) de la courbe. La même démonstration s'applique au foyer F' et à la droite D'E'. Les droites DE, D'E', sont appelées les *directrices* de la section; elles sont *extérieures* à la courbe.

2° Supposons que *le plan sécant rencontre les deux nappes du cône* (*fig.* 433).

On a alors

$$MF' - MF = MG' - MG = GG' = BB' = \text{const.};$$

d'ailleurs,

$$BB' = AB' - AB = AF' - AF$$

et

$$BB' = CC' = A'C - A'C' = A'F - A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

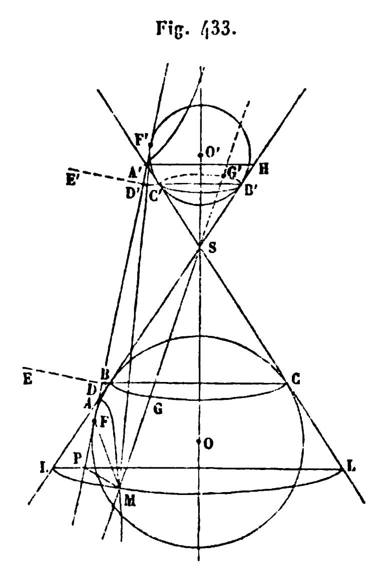
La courbe obtenue est donc *une hyperbole, ayant* AA' *pour axe transverse et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Si l'on trace A′H parallèle à B′C′, AH est la *distance focale* de cette hyperbole. En effet,

$$AB' = AF' \quad \text{et} \quad B'H = C'A' = A'F'.$$

Les droites DE et D′E′, intersections des parallèles BC, B′C′,

Fig. 433.



avec le plan sécant, sont les *directrices* de l'hyperbole; elles sont *intérieures* à la courbe. Le rapport des distances du point M au foyer F et à la droite DE est égal à l'excentricité de la courbe. C'est ce que les triangles semblables APL, ADB, AA′H, montrent immédiatement.

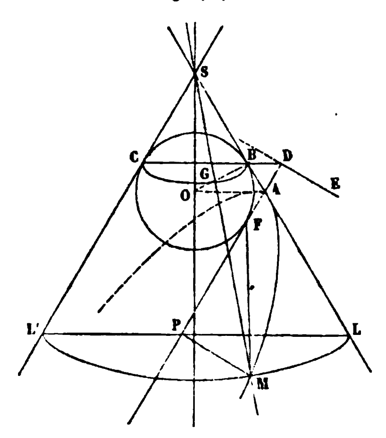
3° Supposons le *plan sécant parallèle à l'une des génératrices du cône* (*fig.* 434).

Ayant mené le plan méridien LSL′ perpendiculaire au plan sécant, ce dernier se trouve parallèle à la génératrice SL′ et est alors coupé par le plan méridien suivant une droite AP parallèle à cette génératrice. Dans le plan méridien, construisons la circonférence O, tangente aux génératrices principales en B et en C, et à la droite AP au point F. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO, la sphère engendrée par la circonférence O est tangente au cône suivant le parallèle BC et touche en F le plan sécant.

Cela posé, prenons un point quelconque M sur la courbe

d'intersection ; menons la droite MF et la génératrice SM qui coupe en G le parallèle BC de la surface ; menons également le parallèle LL′ de la surface qui passe par le point M et qui

Fig. 434.



rencontre le plan sécant suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport à AP. On aura toujours

$$\mathrm{MF} = \mathrm{MG} = \mathrm{BL}.$$

D'ailleurs, l'intersection du plan sécant et du parallèle BC est une droite DE perpendiculaire au plan méridien, et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les deux triangles APL, ABD, étant isocèles, puisqu'ils sont tous deux semblables au triangle SLL′, on a

$$\mathrm{PD} = \mathrm{BL}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{MF} = \mathrm{PD}.$$

La courbe obtenue est donc *une parabole ayant le point* F *pour foyer et la droite* DE *pour directrice.*

COROLLAIRES.

770. Ce théorème permet de réunir les trois courbes étudiées précédemment sous la dénomination de *sections coniques.*

Les propriétés de ces courbes, relativement à leurs foyers et à leurs directrices, conduisent à la définition générale suivante : *Le lieu des points dont le rapport des distances à un*

point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) est constant, est une section conique.

Suivant que le rapport donné est inférieur, supérieur ou égal à l'unité, la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

771. Les sphères considérées dans la démonstration précédente peuvent, tout en restant inscrites au cône, cesser d'être tangentes au plan sécant, qui les coupe alors suivant deux cercles. Les mêmes raisonnements étant applicables à ce cas, on arrive à cette proposition : *Le lieu des points tels que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant, est une section conique dont la nature dépend de la valeur de ce rapport comparée à l'unité* (770).

PROBLÈME.

772. *Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole donnée sur un cône de révolution donné.*

1° Si l'on se reporte à la *fig.* 432, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H le grand axe AA' de l'ellipse donnée et sa distance focale AH, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. La question revient donc à construire un triangle avec deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Comme l'angle donné est opposé au plus grand des deux côtés donnés, ce triangle est complètement déterminé (120). Quand il sera construit, on élèvera une perpendiculaire sur le milieu de A'H, et la surface conique engendrée par AH en tournant autour de cette perpendiculaire sera coupée suivant l'ellipse donnée par un plan mené suivant AA' perpendiculairement au plan du triangle AA'H. *On peut donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône donné.*

2° Si l'on se reporte à la *fig.* 433, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H l'axe transverse AA' et la distance focale AH de l'hyperbole donnée, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. Comme cet angle est opposé ici au plus petit des deux côtés donnés, le problème peut avoir deux solutions ou n'en avoir aucune (120). Pour qu'il soit possible, il faut que AA' surpasse la perpendiculaire abaissée du point A sur HA', c'est-à-dire

qu'on ait, en appelant 2β l'angle au sommet du cône et en posant (710) $AA' = 2a$, $AH = 2c$,

$$2a > 2c\cos\beta \quad \text{ou} \quad \cos\beta < \frac{a}{c}.$$

Mais, si l'on appelle 2θ l'angle des deux asymptotes de l'hyperbole proposée, on a évidemment (725)

$$\frac{a}{c} = \cos\theta.$$

La condition cherchée est donc

$$\cos\beta < \cos\theta,$$

ou, puisqu'il s'agit d'angles inférieurs à un droit (*voir* la *Trigonométrie*),

$$\beta > \theta \quad \text{ou} \quad 2\beta > 2\theta.$$

Donc, *pour pouvoir placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution donné, il faut que l'angle au sommet du cône surpasse celui des deux angles des asymptotes de l'hyperbole qui comprend la courbe.*

3° Si l'on se reporte à la *fig.* 434, on voit que la droite OA est perpendiculaire à l'axe SO, d'après la détermination du point O et le parallélisme des droites SL' et AP. Dans le triangle rectangle OBA, on connaît par suite le côté

$$AB = AD = \frac{FD}{2},$$

demi-paramètre de la parabole donnée (738), et l'angle BAO, complément du demi-angle au sommet du cône donné. Ce triangle est donc complètement déterminé (30). L'ayant construit, on élèvera OS perpendiculaire sur OA, et la surface conique engendrée par la rotation de AB autour de SO sera coupée suivant la parabole donnée par un plan mené perpendiculairement à celui du triangle OBA et passant par la droite AP, tracée de manière que AO soit la bissectrice de l'angle SAP. *On peut* donc *toujours placer une parabole donnée sur un cône donné.*

SCOLIE.

773. Le sommet d'un cône de révolution s'éloignant à l'infini dans la direction de l'axe, ce cône dégénère en cylindre

de révolution. *Un cylindre circulaire droit est* donc *coupé suivant une ellipse par un plan sécant quelconque* (769, 1°).

C'est ce qu'on démontrera, du reste, directement en adoptant la même marche que précédemment. Cette marche permettra de déterminer le grand axe, le foyer et les directrices de la section proposée. On en déduira facilement que *toutes les ellipses trouvées en coupant par un plan quelconque un cylindre de révolution ont pour petit axe le diamètre de ce cylindre.*

On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cylindre de révolution donné (772, 1°), *lorsque le petit axe de l'ellipse est égal au diamètre du cylindre.*

Propriétés fondamentales de l'hélice.

774. Soit un cylindre droit à base quelconque, mais fermée. On peut déterminer un point quelconque de la surface de ce cylindre à l'aide de coordonnées définies de la manière suivante.

Considérons une section droite AA' (*fig.* 435) qui coupe au point A la génératrice GG', et prenons ce point A pour *origine* des arcs comptés sur le périmètre de cette section droite. Ces arcs seront positifs dans un sens, négatifs en sens opposé.

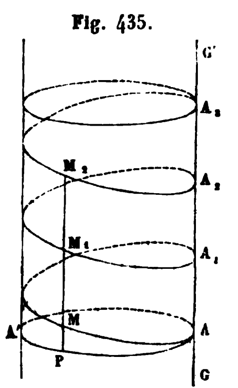


Fig. 435.

Cela posé, soient M un point quelconque de la surface cylindrique, et MP la génératrice qui passe par ce point et qui rencontre en P la section AA' : la longueur MP est l'*ordonnée y du point* M, et l'arc AP est *son abscisse curviligne x.*

Comme le point M peut appartenir à une courbe qui décrit plusieurs circonvolutions autour du cylindre, son abscisse peut dépasser le périmètre de la section AA' et comprendre ce périmètre un nombre quelconque de fois.

En suivant la courbe proposée à partir de son premier point de rencontre avec la génératrice GG' et en comptant combien de fois elle coupe cette génératrice avant qu'on parvienne au

point M, on devra ajouter le périmètre de AA′ ce même nombre de fois à l'arc qui sépare le point A du pied de l'ordonnée du point M, pour avoir l'abscisse curviligne de ce point.

775. Parmi toutes les courbes qu'on peut ainsi tracer sur la surface d'un cylindre droit, l'*hélice* est définie par cette condition que *l'ordonnée d'un point est proportionnelle à son abscisse curviligne*.

L'équation de l'hélice, dans le système de coordonnées adopté (774), est donc

$$y = kx.$$

Désignons par C le périmètre de la section droite AA′ (*fig.* 435). x variant de o à C, on a un premier arc d'hélice qui part du point A et qui, après avoir coupé toutes les génératrices du cylindre, vient rencontrer de nouveau en A_1 la génératrice GG′. x variant de C à 2C, de 2C à 3C, etc., on a de nouveaux arcs de courbe allant de A_1 à A_2, de A_2 à A_3, etc. Les valeurs extrêmes de y sont, en même temps, o, kC, 2kC, 3kC, ... Les distances AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., qui séparent les points où l'hélice vient rencontrer une même génératrice GG′, sont donc égales. Cette distance, constante quelle que soit la génératrice considérée, est ce qu'on appelle le *pas* de l'hélice. Les arcs de courbe AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., sont de même égaux entre eux; ils ne sont évidemment que la reproduction du premier arc AA_1 qu'on ferait glisser successivement le long du cylindre d'une hauteur égale au pas. Ces arcs égaux, dans lesquels l'hélice se trouve ainsi naturellement partagée, constituent les *spires* de la courbe.

THÉORÈME.

776. *Lorsqu'on effectue le développement d'une surface cylindrique sur l'un de ses plans tangents, toute hélice tracée sur la surface se développe suivant une ligne droite* (*fig.* 436).

Soit l'hélice AMB_1; pour deux points quelconques M et M′ de cette courbe, on a la relation

$$\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}.$$

Si l'on suppose qu'on développe la surface du cylindre dans

le plan tangent suivant la génératrice AB_1 (436, 442), la circonférence de la section droite en A s'appliquera sur la droite $A\alpha$ menée perpendiculairement à AB_1 dans ce plan, et les arcs

Fig. 436.

AP et AP′ seront rectifiés en AP_1 et AP'_1. Les points M et M′ viendront d'ailleurs se placer en M_1 et en M'_1 sur les perpendiculaires élevées à $A\alpha$ en P_1 et en P'_1, et l'on aura

$$M_1P_1 = MP, \quad M'_1P'_1 = M'P'.$$

Puisque par hypothèse $\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}$, on aura aussi

$$\frac{M_1P_1}{AP_1} = \frac{M'_1P'_1}{AP'_1},$$

et les points A, M_1, M'_1, seront en ligne droite. Si l'on développe une seule spire, $A\alpha$ représente le périmètre de la section AA′ et αB le pas de l'hélice.

THÉORÈME.

777. *La sous-tangente en un point de l'hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point* (*fig.* 437).

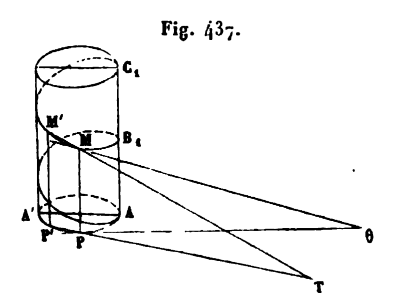
La *sous-tangente* en un point de l'hélice est la projection, sur le plan de la section droite prise pour base, de la portion de tangente en ce point comprise entre son point de contact et sa trace sur le plan de la base.

Considérons sur la courbe les deux points voisins M et M′, dont les ordonnées sont MP et M′P′ et les abscisses curvilignes AA′AP et AA′AP′. On a (775)

$$(1) \qquad \frac{MP}{AA'AP} = \frac{M'P'}{AA'AP'}.$$

Prolongeons la corde MM′ jusqu'au point T où elle rencontre forcément le plan de la base, puisque l'on a $M'P' > MP$. Ce

Fig. 437.



point T appartiendra au prolongement de la corde PP′ de la base. Les deux triangles semblables MTP, M′T′P′, donnent alors

$$\frac{MP}{TP} = \frac{MP'}{TP'}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{TP}{AA'AP} = \frac{TP'}{AA'AP'}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{TP' - TP}{AP' - AP} = \frac{TP'}{AA'AP'}.$$

On peut écrire cette dernière égalité sous la forme

$$\frac{TP'}{AA'AP'} = \frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}.$$

Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, regardé comme fixe, le point P′ se rapproche indéfiniment du point P. La sécante M′MT devient la tangente $M\theta$ à l'hélice au point M; la sécante P′PT devient à la fois la tangente en P à la base et la sous-tangente $P\theta$ au point M. La limite du rapport $\frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}$ étant l'unité (226), on a finalement

$$\lim . \frac{TP}{AA'AP'} = \frac{P\theta}{AA'AP} = 1;$$

ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRES.

778. Le rapport $\frac{y}{x}$ étant constant (775), *le rapport de l'ordonnée d'un point à la sous-tangente de ce point est aussi*

constant. Le triangle MPθ étant alors toujours semblable à lui-même, *la tangente à l'hélice fait un angle constant, aussi bien avec les génératrices du cylindre qu'avec le plan d'une section droite*. Ces deux angles sont complémentaires.

Si l'on désigne par h le pas de l'hélice et par C le périmètre de la base, on a (776)

$$\frac{y}{x}=\frac{h}{C};$$

si l'on désigne par i (*fig*. 436) l'angle suivant lequel les génératrices du cylindre sont coupées par l'hélice, on a (*voir* la *Trigonométrie*)

$$\operatorname{tang} i=\frac{C}{h}.$$

Pour construire la tangente en un point M de l'hélice, il suffit donc de mener, dans le plan tangent au cylindre en ce point, une droite faisant l'angle i avec la génératrice qui passe par ce point.

On peut aussi prendre, à partir du point P, pied de l'ordonnée du point M, sur la tangente à la base, une longueur Pθ égale à l'arc AP rectifié, et joindre le point θ au point M.

779. Si l'on enroule un fil sur une courbe quelconque, une de ses extrémités étant fixée en un point de la courbe, puis qu'on le déroule en le tendant constamment dans la direction des tangentes à la courbe, son extrémité libre décrit une *développante* de la courbe proposée, qui, à son tour, est la *développée* de la courbe obtenue.

On voit que le lieu des points θ ou des traces des tangentes à l'hélice sur le plan de la base est une *développante* de cette base. La surface formée par les tangentes elles-mêmes est connue sous le nom d'*hélicoïde développable*.

SCOLIE.

780. L'hélice que l'on considère le plus souvent dans les applications est tracée sur un cylindre de révolution. Dans ce cas, le périmètre C de la base doit être remplacé par $2\pi r$, et, alors, il est commode d'introduire dans les formules précédentes, au lieu de h, la quantité $\frac{h}{2\pi}$, qu'on désigne par h' et qu'on nomme *pas réduit*.

Exercices et questions complémentaires.

781. On peut proposer un très grand nombre de problèmes sur la détermination graphique des sections coniques, d'après un nombre suffisant de conditions. Nous nous contenterons ici d'appeler l'attention du lecteur sur l'intérêt de ces questions par les exemples suivants.

PROBLÈME.

782. *Construire une ellipse ou une hyperbole dont on connaît l'excentricité $\frac{c}{a}$, l'un des foyers, et deux points ou deux tangentes, ou une tangente et son point de contact.*

Nous résolvons ce problème pour montrer de quelle utilité peut être la considération des directrices.

1° Soient F le foyer donné, A et B les deux points donnés ; déterminons les longueurs r et r' par les conditions

$$\frac{\mathrm{AF}}{r} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\mathrm{BF}}{r'} = \frac{c}{a},$$

puis décrivons deux circonférences des points A et B comme centres avec les rayons r et r'. La directrice correspondant au foyer F sera une tangente commune aux circonférences décrites. En abaissant sur cette tangente DE une perpendiculaire FD et en marquant sur cette perpendiculaire les deux points A et A' qui la divisent dans le rapport $\frac{c}{a}$, on aura l'axe focal AA' de la section conique ; sa distance focale FF' s'obtiendra en prenant dans le sens convenable, suivant la valeur de $\frac{c}{a}$, A'F' = AF. La question sera alors ramenée à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant ses axes.

2° Soient F le foyer donné, MT, M'T', les deux tangentes données (*fig.* 438). Déterminons les points φ et φ' symétriques du foyer par rapport à ces tangentes. La perpendiculaire indéfinie KF' élevée à $\varphi\varphi'$ par son milieu K est un lieu de second foyer F' (675, 721). Ce second foyer fait également partie du lieu dont le rapport des distances aux deux points fixes F et φ est égal à $\frac{c}{a}$. Nous déterminerons donc les points G et G' qui divisent Fφ dans ce même rapport, et sur GG' comme diamètre nous décrirons (144) une circonférence qui coupera KF' au point cherché. Il ne restera plus qu'à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant la distance focale FF' et l'axe focal F'φ de la courbe.

à xy jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire à xy menée par m. En opérant de même pour tous les points de division de la base, on obtiendra une série de points tels que m', qu'il suffira de joindre par un trait continu pour avoir la projection de l'hélice.

Pour avoir la projection de la tangente au point considéré, on prendra, sur la tangente mt au cercle de base, une longueur mt égale à l'arc acm, c'est-à-dire ici aux $\frac{5}{12}$ de la circonférence $abcd$; t sera la trace de la tangente sur le plan de la base (777). Ce point se projette au point t' que l'on obtient en abaissant la perpendiculaire tt' sur xy. Par suite, la droite $t'm'$ est la projection de la tangente.

On reconnaît facilement d'après cela que la courbe obtenue touche l'arête $a'a''$ en a' et en a'', l'arête $b'b''$ en son milieu, et qu'elle est symétrique par rapport à la parallèle à xy menée par le milieu de $b'b''$. Cette courbe est connue sous le nom de *sinusoïde*. Nous l'étudierons bientôt, en établissant les premiers principes de la *Trigonométrie*.

COURS
DE MATHÉMATIQUES.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE DES CANDIDATS

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES;

PAR

CHARLES DE COMBEROUSSE,

Ingénieur civil,
Professeur de Mécanique à l'École Centrale des Arts et Manufactures,
Président du Jury d'admission à la même École,
Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

DEUXIÈME ÉDITION, REFONDUE ET AUGMENTÉE.

TOME DEUXIÈME.

SECONDE PARTIE.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1882

(Tous droits réservés.)

TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

LIVRE PREMIER.

INTRODUCTION DES ANGLES DANS LE CALCUL.

CHAPITRE PREMIER.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES.

Notions préliminaires.

1. Les figures de la Géométrie présentent des côtés et des angles : ces deux espèces de quantités sont donc liées entre elles dans la plupart des questions qui dépendent de cette science. Mais, comme les équations entre les lignes droites et les angles sont en général très compliquées, on a dû chercher un moyen de simplification, qui a été fourni de la manière la plus heureuse par la *théorie des rapports trigonométriques*.

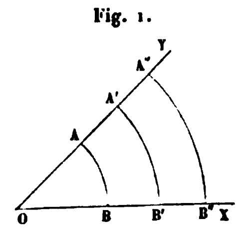
Avant d'exposer cette théorie, nous présenterons quelques remarques indispensables.

2. Pour soumettre au calcul les relations qui existent seulement entre les côtés d'une figure, il suffit de faire choix d'une unité de longueur et de comparer tous les côtés de la figure à

cette unité. La considération d'un côté se trouve ainsi remplacée par celle du nombre qui représente son rapport à l'unité.

Quant aux angles, on les compare *entre eux* de la manière suivante. A un même angle XOY (*fig.* 1) correspondent un nombre indéfini d'arcs AB, A'B', A''B'', ..., décrits de son sommet comme centre et interceptés entre ses côtés. Ces arcs sont semblables et l'on a (*Géom.*, 231)

Fig. 1.



$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{A''B''}{OA''} = \ldots.$$

Ce qu'il y a ici de constant, c'est le rapport de l'arc intercepté (supposé rectifié) au rayon choisi. On peut donc prendre ce rapport pour la mesure de l'angle considéré et, en désignant l'arc AB par S, le rayon OA par R, écrire (*Géom.*, 232)

$$\text{angle XOY} = \frac{S}{R}.$$

L'unité d'angle est alors l'angle qui, au centre d'un cercle quelconque, intercepte un arc égal en longueur au rayon de ce cercle.

Comme la longueur d'un arc est donnée par la formule générale $l = \frac{\pi R n}{180}$ (*Géom.*, 232), on voit, en y faisant $l = R$, que le nombre de degrés de cet angle unité est

$$n = \frac{180}{\pi} = 57^\circ 17' 44'', 80\ldots.$$

Si l'on choisit le rayon pour unité de longueur, le nombre qui mesure l'arc rectifié mesure aussi l'angle. Dans ce cas, la circonférence étant représentée par 2π, les arcs peuvent être indiqués indifféremment en degrés ou en fractions du nombre π. Ainsi, l'on dira : arc de 45° ou arc $\frac{\pi}{4}$, arc de 60° ou arc $\frac{\pi}{3}$, arc de 90° ou arc $\frac{\pi}{2}$, ...

Quand un angle est ainsi mesuré par un nombre abstrait A, son nombre de degrés se déduit de la formule $l = \frac{\pi R n}{180}$, en

y faisant $l = A$ et $R = 1$, d'où

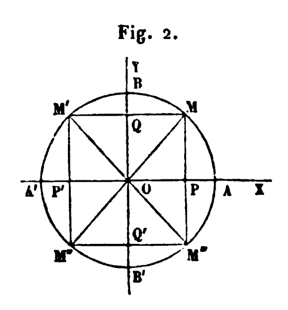
$$n = \frac{180 A}{\pi}.$$

3. Si l'on veut maintenant établir les relations qui lient les côtés et les angles d'une même figure, *il faut pouvoir remplacer la considération des angles par celle de certains rapports entre longueurs;* et la condition expresse pour qu'il en soit ainsi est la suivante : l'angle étant donné, les rapports dont nous parlons doivent être complétement déterminés; réciproquement, ces rapports étant donnés, l'angle doit être à son tour parfaitement défini.

La Trigonométrie traite de ces rapports particuliers, qu'on a nommés *rapports trigonométriques.* Son but général est l'*introduction des angles dans le calcul,* son but spécial la *résolution des triangles* qui composent toutes les figures.

4. Soit une circonférence quelconque de rayon R (*fig.* 2). Traçons par son centre deux axes rectangulaires OX, OY. On pourra prendre le point A, commun à la circonférence et à l'axe OX, pour point de départ ou pour *origine* des arcs comptés sur cette circonférence. D'après la règle de Descartes (t. I, *Alg. élém.*, 203), on devra regarder comme *positifs* les arcs comptés dans un certain sens, dans le sens de A vers B, par exemple, et comme *négatifs* les arcs comptés en sens contraire, dans le sens de A vers B'.

Fig. 2.



Les arcs considérés peuvent dépasser un nombre quelconque de circonférences; car, après avoir décrit une première circonférence et être revenu au point de départ, on peut en décrire une deuxième, une troisième, et ainsi de suite, puis s'arrêter en un point quelconque M, qui est ce qu'on appelle l'*extrémité* de l'arc.

Tous les arcs qui ont *même extrémité* qu'un arc donné $AM = l$ (*fig.* 2) sont nécessairement compris dans la formule générale

$$K.2\pi R + l,$$

où K représente un entier quelconque, positif, négatif ou nul. En effet, la différence de deux arcs de la série est toujours un multiple de la circonférence R, que ces deux arcs soient de même signe ou de signes contraires.

On voit qu'un arc peut varier de $-\infty$ à $+\infty$.

5. Deux arcs dont la somme équivaut à un quart de circonférence sont deux arcs *complémentaires*. Deux arcs dont la somme équivaut à une demi-circonférence sont deux arcs *supplémentaires*. La somme de deux arcs complémentaires (dans le cercle de rayon 1) est égale à $\frac{\pi}{2}$, la somme de deux arcs supplémentaires est égale à π.

Soit plus généralement (*fig.* 2) l'arc $AM = l$; l'arc *complémentaire* sera $\frac{\pi R}{2} - l$. Admettons qu'on prenne B pour *origine* de cet arc et qu'on adopte pour son sens positif celui de B vers A, contraire au sens positif de l'arc direct AM.

Pour mesurer l'arc complémentaire, on devra alors compter l'arc $BA = \frac{\pi R}{2}$ dans le sens positif choisi, puis l'arc $AM = l$ dans le sens négatif, ou contraire au premier. On sera ainsi ramené au point M, *extrémité* de l'arc direct AM.

Il résulte donc de la convention précédente que *deux arcs complémentaires ont toujours même extrémité.*

Soit encore l'arc $AM = l$; l'arc *supplémentaire* sera $\pi R - l$. Pour le mesurer, on conservera la même origine et le même sens positif que pour l'arc donné AM. On comptera donc d'abord l'arc πR dans ce sens, ce qui conduira au point A', puis l'arc l dans le sens négatif ou contraire. On s'arrêtera ainsi, comme extrémité de l'arc supplémentaire, à un point M' tel, que l'arc A'M' soit égal en valeur absolue à l'arc AM. La droite MM' est donc parallèle au diamètre AA', et *les extrémités de deux arcs supplémentaires sont toujours sur une même parallèle au diamètre qui passe par l'origine commune* A.

6. Pour déterminer maintenant sur le plan du cercle la position d'un point quelconque M pris sur la circonférence, on mène par ce point M deux parallèles MQ et MP aux axes OX et OY. Les longueurs $MQ = OP$, $MP = OQ$, étant déterminées, la position du point M l'est aussi; car, si l'on mène par le

point P une parallèle à l'axe OY, par le point Q une parallèle à l'axe OX, elles viennent se croiser sur la circonférence au point M.

La distance OP s'appelle l'*abscisse* du point M, la distance MP en est l'*ordonnée* : les longueurs OP et MP considérées simultanément sont les *coordonnées* du point M.

OX est l'*axe des abscisses*, OY l'*axe des ordonnées* : ces axes considérés simultanément sont les *axes des coordonnées*, leur intersection O est l'*origine des coordonnées*. On indique l'abscisse d'un point par la lettre x, son ordonnée par la lettre y.

Les abscisses devront être affectées de signes différents, suivant qu'elles seront comptées *à droite* ou *à gauche* du point O : ainsi, les points M et M‴ ayant pour abscisse commune + OP, les points M′ et M″ auront pour abscisse commune — OP′. De même, les ordonnées devront être affectées de signes contraires, suivant que les points considérés seront situés *au-dessus* ou *au-dessous* de l'axe des abscisses. En effet, les ordonnées peuvent être reportées et comptées sur l'axe des ordonnées, soit au-dessus, soit au-dessous du point O, à partir de ce point : ainsi, les points M et M′ ayant pour ordonnée commune + OQ, les points M″ et M‴ auront pour ordonnée commune — OQ′.

Ces détails reviendront et seront tout à fait à leur place, lorsque nous commencerons la *Géométrie analytique*. Nous n'avons rappelé ce mode de détermination d'un point dans un plan, déjà indiqué précédemment (t. I, *Alg. élém.*, 312), que pour rendre nos définitions plus simples et plus nettes.

Définitions des rapports trigonométriques.

7. Étant donné l'angle AOM et l'arc AM (*fig.* 2), on appelle *sinus* de cet angle *le rapport de l'ordonnée* MP *du point* M, *extrémité de l'arc, au rayon* OM *de cet arc*, et l'on écrit

$$\sin \text{AOM} = \frac{\text{MP}}{\text{OM}}.$$

On appelle *cosinus* de cet angle *le rapport de l'abscisse* OP *du point* M *au rayon* OM, et l'on écrit

$$\cos \text{AOM} = \frac{\text{OP}}{\text{OM}}.$$

On appelle *tangente* de cet angle *le rapport de l'ordonnée* MP *à l'abscisse* OP, et l'on écrit

$$\text{tang}\,\text{AOM} = \frac{\text{MP}}{\text{OP}}.$$

Les inverses des rapports que nous venons d'indiquer ont reçu des noms spéciaux. La *cosécante* de l'angle est l'inverse du sinus, et l'on écrit

$$\text{coséc}\,\text{AOM} = \frac{\text{OM}}{\text{MP}}.$$

La *sécante* de l'angle est l'inverse du cosinus, et l'on écrit

$$\text{séc}\,\text{AOM} = \frac{\text{OM}}{\text{OP}}.$$

La *cotangente* de l'angle est l'inverse de la tangente, et l'on écrit

$$\text{cot}\,\text{AOM} = \frac{\text{OP}}{\text{MP}}.$$

Désignons d'une manière générale l'angle AOM par a, le rayon OM par r, et soient x et y les coordonnées du point M, extrémité de l'arc AM. On a

$$\sin a = \frac{y}{r}, \quad \cos a = \frac{x}{r}, \quad \text{tang}\,a = \frac{y}{x},$$

$$\text{coséc}\,a = \frac{r}{y}, \quad \text{séc}\,a = \frac{r}{x}, \quad \cot a = \frac{x}{y}.$$

Il est essentiel de remarquer que le choix du rayon n'influe en rien sur la valeur des rapports trigonométriques d'un angle, précisément parce que ce sont des rapports. Si le rayon OM change, on passe, pour le même angle, du triangle OPM à un autre triangle qui lui est semblable, et dont les côtés présentent par conséquent entre eux des rapports égaux à ceux qui lient les côtés du triangle OPM.

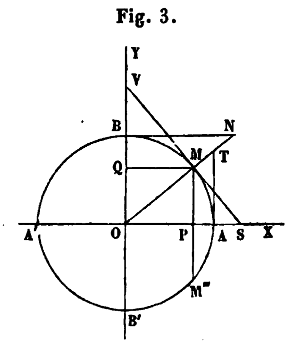
8. Il est facile de justifier les dénominations employées. *Si l'on suppose que le rayon de l'arc soit pris pour unité* a représente également l'angle et l'arc intercepté, et l'on a

$$\sin a = y, \quad \cos a = x, \quad \text{tang}\,a = \frac{y}{x},$$

$$\text{coséc}\,a = \frac{1}{y}, \quad \text{séc}\,a = \frac{1}{x}, \quad \cot a = \frac{x}{y}.$$

Dans ce cas, le sinus égal à l'ordonnée MP (*fig.* 3) *est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc* MM''', *double de l'arc* AM *considéré. Semi-inscripta* signifiant demi (corde) inscrite, la lettre *s* et les deux lettres *in* ont formé, avec la terminaison *us*, le mot *sinus*.

Fig. 3.



Si l'on mène par l'origine de l'arc, jusqu'au rayon qui passe par son extrémité, la tangente AT (*fig.* 3), les triangles semblables OPM, OAT, donnent

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{AT}}{1} = \text{AT}.$$

Le rapport $\frac{y}{x}$ est donc alors représenté par la *tangente* AT. Il est bon de remarquer qu'il est également représenté par la tangente MS = AT en vertu de l'égalité des triangles OAT, OMS.

Les deux triangles OPM, OAT, donnent également, dans le cas du rayon égal à l'unité,

$$\frac{1}{x} = \frac{\text{OT}}{1} = \text{OT}.$$

Le rapport $\frac{1}{x}$ est donc alors représenté par la portion de *sécante* comprise, sur la direction du rayon OM, entre le centre de l'arc et le point T. Il est important de remarquér que ce rapport est également représenté par la portion de sécante OS = OT.

L'arc a = AM (*fig.* 3) a pour complément l'arc BM $= \frac{\pi}{2} - a$. Si l'on prend pour origine de ce dernier arc le point B et si on le suppose par suite décrit positivement de B vers M (5), MQ ou OP $= x = \cos a$ représentera son sinus. De même, BN = MV représentera sa tangente, ON = OV représentera sa sécante. D'ailleurs, les triangles semblables OAT, OBN, donnent

$$\frac{\text{BN}}{1} = \frac{1}{\text{AT}} = \cot a;$$

de même, les triangles semblables OPM, OBN, donnent

$$\frac{\text{ON}}{1} = \frac{1}{y} = \text{coséc}\, a.$$

En résumé, on a donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a,$$

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a,$$

$$\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{coséc}\, a.$$

Ainsi, *le cosinus, la cotangente, la cosécante d'un arc, ne sont autre chose que le sinus, la tangente, la sécante de l'arc complémentaire;* d'où les noms donnés à ces rapports. Le cosinus, la cotangente et la cosécante d'un arc sont quelquefois appelés rapports trigonométriques *indirects,* tandis que le sinus, la tangente et la sécante constituent les rapports trigonométriques *directs.*

On fait un usage continuel des formules précédentes.

En terminant ce paragraphe et en se reportant à la *fig.* 3 il est utile de rappeler que, *lorsque le rayon est pris pour unité,* la perpendiculaire MP représente le sinus de l'arc AM, la distance OP son cosinus, la tangente AT = MS sa tangente; de même, la distance ON = OV représente sa cosécante, la distance OT = OS sa sécante, la tangente BN = MV sa cotangente. *Mais il ne faut pas perdre de vue que les définitions du n° 7 sont les seules générales.*

9. Il est évident que, l'angle étant donné, les rapports trigonométriques correspondants le sont également. Réciproquement, si l'on suppose l'angle considéré plus petit qu'un droit il sera déterminé si l'on connaît l'un quelconque de ses rapports trigonométriques, son sinus par exemple, ainsi que le rayon choisi.

En effet, r étant donné ainsi que $\sin a$, on déduira, de la relation $\sin a = \frac{y}{r}$, $y = r \sin a$. On prendra alors, à partir du point O, sur l'axe OY et dans le sens convenable (6), une longueur $OQ = y$ (*fig.* 3). On mènera par le point Q une parallèle QM à l'axe OX, et le point M sera l'extrémité de l'arc AM intercepté par l'angle demandé.

10. Les rapports trigonométriques les plus employés sont le sinus, le cosinus et la tangente. Nous allons donc étudier

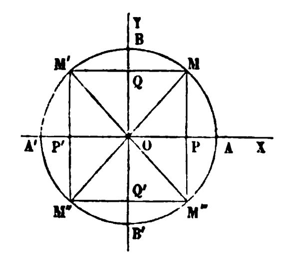
spécialement les variations de ces rapports. Celles de la cosécante, de la sécante et de la cotangente, qui sont leurs inverses, pourront ensuite être immédiatement définies.

Dans ce qui suit, nous prendrons en général *le rayon pour unité*. Le cercle, dans lequel on considère alors les rapports trigonométriques, prend le nom de *cercle trigonométrique*. Ces rapports se trouvent, dans ce cas, représentés concrètement par des droites, rattachées au cercle trigonométrique comme on l'a expliqué aux nos 7 et 8, sans que les résultats obtenus soient en rien modifiés par cette utile simplification.

Variations du sinus.

11. Considérons le cercle trigonométrique OA (*fig.* 4), où l'origine des arcs est le point A, et l'angle quelconque AOM. Cet angle est mesuré par l'arc $AM = a$, et cet arc, d'après ce qui précède (8), a le même sinus que l'angle lui-même. On peut donc poser

Fig. 4.



$$\sin a = MP = y.$$

Supposons l'arc a plus petit que 90°. A mesure que l'arc croît, depuis zéro jusqu'à 90°, l'ordonnée y croît : *le sinus, dans ces limites, croît donc avec l'arc.*

Pour $a = 0$, on a $y = 0$. Pour $a = \frac{\pi}{4}$, la corde MM''', qui sous-tend l'arc double, est égale au côté du carré inscrit dans le cercle de rayon 1 ; y, qui est la moitié de cette corde, est donc égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Enfin, pour $a = \frac{\pi}{2}$, on a $y = OB = 1$. On peut donc écrire

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1.$$

Lorsque l'extrémité de l'arc a est dans le *deuxième* quadrant, le sinus repasse par les mêmes valeurs que dans le premier, mais en ordre inverse.

En effet, *les sinus de deux arcs supplémentaires* (5) *sont égaux et de même signe.*

Soit l'angle AOM (*fig.* 4). Menons par le point M la parallèle MM' à l'axe OX. Les angles AOM, AOM', sont supplémentaires, puisque les arcs AM et A'M' sont égaux. Mais les extrémités M et M' ayant des ordonnées MP et M'P', égales et de même signe, les sinus de ces angles et des arcs qui les mesurent sont aussi égaux et de même signe.

La formule

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

exprime cette importante propriété.

On voit que, l'angle ou l'arc croissant depuis 90° jusqu'à 180° le sinus diminue depuis 1 jusqu'à zéro.

Lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans le *troisième* ou le *quatrième* quadrant, le sinus est *négatif* (6). Ainsi, le sinus de l'angle AOM'' ou de l'arc AM'' est représenté par l'ordonnée négative $-M''P'' = -OQ'$. Mais, de 180° à 360°, le sinus repasse *en valeur absolue* par les mêmes valeurs que de zéro à 180°; car, les ordonnées des points du cercle trigonométrique qui sont symétriquement placés par rapport à l'axe des abscisses étant égales et de signes contraires, des arcs tels que AM et AM''' ou tels que AM' et AM'' ont nécessairement des sinus égaux et de signes contraires. L'arc croissant depuis 180° jusqu'à 270°, le sinus décroît donc depuis 0 jusqu'à -1, et, l'arc croissant depuis 270° jusqu'à 360°, le sinus croît algébriquement depuis -1 jusqu'à 0.

La figure montre que *les arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence*, comme les arcs AM et AM'', *ont des sinus égaux et de signes contraires*. C'est ce qu'exprime la formule

$$\sin(\pi + a) = -\sin a.$$

12. *Quand on augmente un arc d'un nombre quelconque de circonférences, son sinus ne change pas,* puisque, l'arc conservant toujours la même extrémité, l'ordonnée de cette extrémité ne varie pas.

Désignons par $2n\pi$ un nombre quelconque de circonférences de rayon égal à l'unité, n étant un entier quelconque positif, négatif ou nul. Nous aurons

$$\sin(2n\pi + a) = \sin a.$$

La formule

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

donnera de même

$$\sin(2n\pi + \pi - a) = \sin a,$$

ce qui revient à

$$\sin[(2n+1)\pi - a] = \sin a.$$

Il en résulte que *tous les arcs qui ont même sinus que l'arc a sont renfermés dans les deux formules*

$$2n\pi + a \quad \text{et} \quad (2n+1)\pi - a.$$

13. *Les arcs égaux et de signes contraires ont aussi des sinus égaux et de signes contraires;* car leurs extrémités sont symétriquement placées par rapport à l'axe OX. Ainsi, les arcs AM et AM‴ (*fig.* 4) ont des sinus égaux et de signes contraires : c'est ce qu'exprime la formule

$$\sin(-a) = -\sin a.$$

14. *On voit que les variations du sinus ont pour limites* $+1$ et -1. Le sinus peut prendre toutes les valeurs positives possibles entre 0 et 1, toutes les valeurs négatives possibles entre 0 et -1. *Une quantité plus petite que* 1 *et plus grande que* -1 *peut donc toujours être représentée par le sinus d'un certain arc.*

15. On peut trouver directement, par la Géométrie, et à l'aide des polygones réguliers, les sinus de certains arcs.

Dans le cercle trigonométrique (*fig.* 4), le sinus d'un arc qui est une partie aliquote de la circonférence est en effet la moitié du côté du polygone régulier inscrit qui sous-tend l'arc double (8).

L'ordonnée de l'extrémité de l'arc de 60° est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 120°, c'est-à-dire la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique. On a donc (*Géom.*, 205)

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'ordonnée de l'extrémité de l'arc de 30° est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 60°, c'est-à-dire la moitié du

côté de l'hexagone régulier inscrit, qui est égal à 1 (*Géom.*, 205). On a donc

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

De même, l'ordonnée de l'extrémité de l'arc de 18° est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 36°, c'est-à-dire la moitié du côté du décagone régulier inscrit, qui est égal à $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (*Géom.*, 206).

On a donc

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

16. On peut se proposer de représenter la loi de variation du sinus à l'aide d'une courbe rapportée aux mêmes axes coordonnés que le cercle trigonométrique.

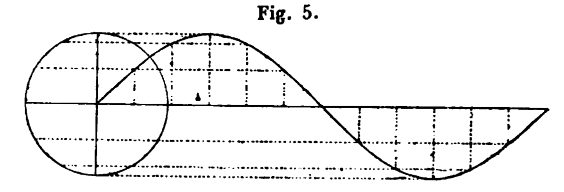
Les points de cette courbe auront pour abscisses les différents arcs considérés dans le cercle trigonométrique, *rectifiés*, et pour ordonnées les sinus de ces arcs.

En désignant l'un des arcs rectifiés par x et son sinus par y, l'équation de la courbe dont il s'agit sera donc

$$y = \sin x.$$

On lui donne le nom de *sinusoïde* (*fig.* 5), et on la retrouve souvent dans les applications.

Fig. 5.



Pour la construire, on divise le cercle trigonométrique en un certain nombre de parties égales, douze par exemple. En portant sur l'axe des x, à partir de l'origine ou du centre du cercle, une longueur égale à 2π, on obtient le cercle lui-même rectifié; de sorte qu'en divisant aussi cette longueur en douze parties égales, on mesure, en partant du centre, les abscisses des treize points qu'on veut déterminer sur la courbe, y compris l'origine.

On fait correspondre à chacune de ces abscisses, comme l'indique la *fig.* 5, une ordonnée égale au sinus de l'arc que cette abscisse représente: et, en unissant tous les points ainsi marqués par un trait continu, on obtient la sinusoïde dans les limites qu'on s'est imposées.

Comme le sinus repasse périodiquement par les mêmes valeurs, lorsque

ırc correspondant croît au delà d'une circonférence ou devient négatif, sinusoïde elle-même s'étend indéfiniment le long de l'axe des x, à oite et à gauche de l'origine, en restant comprise entre les tangentes enées au cercle trigonométrique parallèlement à cet axe, et en reproisant constamment les deux spires trouvées pour une seule circonfénce.

Variations du cosinus.

17. Le cosinus d'un arc étant égal au sinus de son complément (8), tout ce que nous venons de dire (11) se reproduit ans un autre ordre pour le cosinus. Néanmoins, il est indispensable d'indiquer directement les variations du osinus.

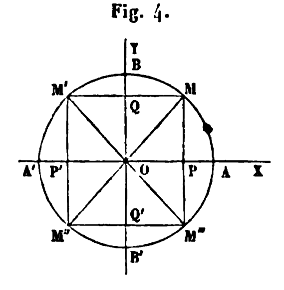


Fig. 4.

On a (*fig.* 4), dans le cercle trigonométrique,

$$\cos a = \mathrm{OP} = x.$$

Supposons l'arc a plus petit que 90°. A mesure que l'arc croît depuis o jusqu'à 90°, l'abscisse x décroît; *le cosinus diminue donc alors en même temps que l'arc augmente.*

Pour $a = 0$, on a $x = \mathrm{OA} = 1$. Pour $a = \frac{\pi}{4}$, la distance OP est égale à l'ordonnée MP, c'est-à-dire à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Enfin, pour $a = \frac{\pi}{2}$, on a $x = 0$. On peut donc écrire

$$\cos 0^\circ = 1, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0.$$

Lorsque l'extrémité de l'arc est dans le *deuxième* quadrant, le cosinus repasse par les mêmes valeurs que dans le premier, prises en ordre inverse et affectées d'un signe contraire.

En effet, *les cosinus de deux arcs supplémentaires sont égaux et de signes contraires.*

Les arcs AM et AM′ (*fig.* 4) étant supplémentaires, leurs extrémités M et M′ ont des abscisses égales et de signes contraires, et les cosinus de ces arcs sont eux-mêmes égaux et de signes contraires.

La formule

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

exprime cette importante propriété.

On voit que l'angle ou l'arc croissant depuis 90° jusqu'à 180°, le cosinus diminue depuis 0 jusqu'à — 1.

Lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans le *troisième* quadrant, le cosinus est négatif; il est positif lorsque cette extrémité tombe dans le *quatrième* quadrant. Mais, de 180° à 360°, le cosinus repasse *d'une manière absolue* par les mêmes valeurs que de 0 à 180°. En effet, les abscisses des points symétriquement placés par rapport à l'axe des abscisses étant égales et de même signe, des arcs tels que AM et AM‴ ou tels que AM′ et AM″ ont nécessairement des cosinus égaux et de même signe. L'arc croissant depuis 180° jusqu'à 270°, le cosinus croîtra donc depuis — 1 jusqu'à 0, et, l'arc croissant depuis 270° jusqu'à 360°, le cosinus croîtra depuis 0 jusqu'à 1.

La figure montre que *les arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence*, comme les arcs AM et AM″, *ont des cosinus égaux et de signes contraires*, et que *les arcs dont la somme est égale à une circonférence entière*, comme les arcs AM et AM‴, *ont des cosinus égaux et de même signe.* C'est ce qu'expriment les formules

$$\cos(\pi + a) = -\cos a, \quad \cos(2\pi - a) = \cos a.$$

18. *Quand on augmente un arc d'un nombre quelconque de circonférences, son cosinus ne change pas,* puisque, l'arc conservant toujours la même extrémité, l'abscisse de cette extrémité ne varie pas.

Désignons par $2n\pi$ un nombre quelconque de circonférences, n étant un entier quelconque positif, négatif ou nul. Nous aurons

$$\cos(2n\pi + a) = \cos a.$$

La formule

$$\cos(2\pi - a) = \cos a$$

donnera de même

$$\cos(2n\pi + 2\pi - a) = \cos a$$

ou, puisque n représente un entier quelconque qu'on peut augmenter de 1 à volonté,

$$\cos(2n\pi - a) = \cos a.$$

Il en résulte que *tous les arcs qui ont même cosinus que l'arc a sont renfermés dans les deux formules*

$$2n\pi + a \quad \text{et} \quad 2n\pi - a, \quad \text{ou} \quad 2n\pi \pm a.$$

19. *Les arcs égaux et de signes contraires ont des cosinus égaux et de même signe;* car leurs extrémités sont symétriquement placées par rapport à l'axe OX. Ainsi, les arcs AM et AM'' ont des cosinus identiques. C'est ce qu'exprime la formule

$$\cos(-a) = \cos a.$$

20. *On voit que les variations du cosinus sont comprises entre* $+1$ *et* -1. *Une quantité plus petite que* 1 *et plus grande que* -1 *peut donc toujours être représentée par le cosinus d'un certain arc.*

21. On peut se proposer de représenter la loi de variation du cosinus à l'aide d'une courbe rapportée aux mêmes axes coordonnés que le cercle trigonométrique.

Les points de cette courbe auront pour abscisses les différents arcs considérés dans le cercle trigonométrique, rectifiés, et pour ordonnées les cosinus de ces arcs.

En désignant l'un des arcs rectifiés par x et son cosinus par y, l'équation de la courbe dont il s'agit sera donc $y = \cos x$. On lui donne le nom de *cosinusoïde* (*fig.* 6).

Fig. 6.

On la construit de la même manière que la sinusoïde (17), et cette construction donne lieu aux mêmes considérations.

Remarquons d'ailleurs que les deux courbes sont, en réalité, identiques, puisque le cosinus d'un arc est le sinus de son complément. Pour passer de la sinusoïde à la cosinusoïde, il suffit en effet de faire glisser la première courbe, parallèlement à elle-même vers la gauche, d'une longueur égale à $\frac{\pi}{2}$; car on a, d'une manière générale, en vertu des propriétés des arcs supplémentaires et complémentaires (11, 8),

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Variations de la tangente.

22. On a $\tang a = \frac{y}{x}$. Supposons l'arc a plus petit que 90°. A mesure que l'arc croît depuis o jusqu'à 90°, l'ordonnée y croît et l'abscisse x diminue. Pour cette double raison, *la tangente croît donc alors avec l'arc.*

Pour $a = 0$, on a $y = 0$ et $x = 1$. Pour $a = \frac{\pi}{4}$, on a $y = x$, puisque le triangle OPM devient isocèle (*fig.* 7). Pour $a = \frac{\pi}{2}$, on a $y = 1$ et $x = 0$. On peut donc écrire

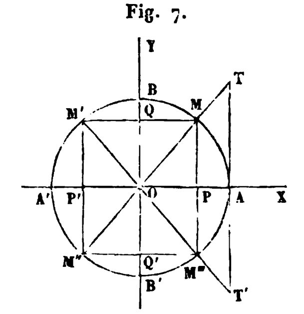


Fig. 7.

$$\tang 0° = 0,$$

$$\tang \frac{\pi}{4} = \tang 45° = 1,$$

$$\tang \frac{\pi}{2} = \tang 90° = \frac{1}{0} = \infty.$$

Lorsque l'extrémité de l'arc est dans le *deuxième* quadrant, la tangente repasse par les mêmes valeurs que dans le premier, mais prises en ordre inverse et affectées d'un signe contraire. En effet, *les tangentes de deux arcs supplémentaires sont égales et de signes contraires.* Car, si l'on se reporte à la figure, on voit que les extrémités des arcs supplémentaires AM et AM' ont des ordonnées égales et de même signe en même temps que des abscisses égales et de signes contraires, les points M et M' étant symétriques par rapport à l'axe OY. Il en résulte que les rapports qui expriment les tangentes de deux arcs supplémentaires sont nécessairement égaux et de signes contraires. C'est ce que rappelle la formule

$$\tang(\pi - a) = -\tang a.$$

L'arc croissant de 90° jusqu'à 180°, la tangente croît donc algébriquement depuis $-\infty$ jusqu'à o. Nous disons depuis $-\infty$, parce que l'arc de 90° peut être regardé à la fois comme la limite des arcs qui, croissant depuis o jusqu'à 90°, ont des

tangentes positives, et comme la limite des arcs qui, décroissant depuis 180° jusqu'à 90°, ont des tangentes négatives.

Dans le *troisième* quadrant, lorsque l'arc croît de 180° jusqu'à 270°, la tangente repasse par les mêmes valeurs que dans le premier ; et, dans le *quatrième* quadrant, lorsque l'arc croît de 270° jusqu'à 360°, la tangente repasse par les mêmes valeurs que dans le deuxième. En effet, les arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence, comme les arcs AM et AM″ ou comme les arcs AM′ et AM‴, ont la même tangente, parce que leurs extrémités, coïncidant avec celles d'un même diamètre, ont nécessairement des coordonnées égales en valeur absolue, mais de signes contraires. Il en résulte que le rapport de ces coordonnées reste toujours le même en valeur et en signe. C'est ce qu'exprime la formule importante

$$\operatorname{tang}(\pi + a) = \operatorname{tang} a.$$

Ainsi, de 180° à 270°, la tangente croît de 0 à $+\infty$; de 270° à 360°, elle croît algébriquement de $-\infty$ à 0. On voit qu'on doit poser $\operatorname{tang} 90° = \operatorname{tang} 270° = \pm\infty$.

23. La remarque précédente montre que *lorsqu'on augmente un arc d'un nombre quelconque de demi-circonférences, sa tangente ne varie pas.* Désignons par $n\pi$ un nombre quelconque de demi-circonférences, n étant un entier quelconque positif, négatif ou nul. Nous aurons

$$\operatorname{tang}(n\pi + a) = \operatorname{tang} a.$$

Tous les arcs qui ont même tangente que l'arc a sont donc *compris dans la formule*

$$n\pi + a.$$

24. *Les arcs égaux et de signes contraires ont aussi des tangentes égales et de signes contraires;* car leurs extrémités sont symétriquement placées par rapport à l'axe OX, de sorte que, ces extrémités ayant des ordonnées égales et de signes contraires et la même abscisse, les rapports formés par leurs coordonnées respectives sont égaux et de signes contraires. C'est ce qu'exprime la formule

$$\operatorname{tang}(-a) = -\operatorname{tang} a.$$

25. *On voit que les variations de la tangente ont pour limites* $+\infty$ *et* $-\infty$. La tangente peut prendre toutes les va-

leurs positives possibles entre o et $+\infty$, toutes les valeurs négatives possibles entre o et $-\infty$. *Une quantité réelle quelconque peut donc toujours être représentée par la tangente d'un certain arc.*

26. Nous avons vu précédemment (8) que, si l'on mène une tangente au cercle trigonométrique par l'origine des arcs, la portion de cette tangente interceptée par le rayon passant par l'extrémité de l'arc considéré représente la tangente de cet arc. Ainsi (*fig.* 7), si l'on pose arc AM $= a$, on a (22)

$$\operatorname{tang} a = \operatorname{tang}(\pi + a) = \mathrm{AT}.$$

Les tangentes des arcs qui ont leurs extrémités dans le premier et le troisième quadrant sont alors mesurées sur la partie positive de la tangente indéfinie menée par l'origine A.

De même, si l'on considère l'arc AM′, supplément de l'arc AM, on a (22)

$$\operatorname{tang}(\pi - a) = \operatorname{tang}(2\pi - a) = -\operatorname{tang} a = -\mathrm{AT} = \mathrm{AT'}.$$

Les tangentes des arcs qui ont leurs extrémités dans le deuxième et le quatrième quadrant sont donc, à leur tour, mesurées sur la partie négative de la tangente indéfinie en A.

Il résulte immédiatement de ce mode de représentation que les tangentes de 90° et de 270° sont égales toutes deux à $\pm\infty$, puisque le diamètre BB′, parallèle à la tangente en A, la rencontre à l'infini dans les deux sens.

27. On peut trouver directement par la Géométrie, et à l'aide des polygones réguliers, les tangentes de certains arcs.

Dans le cercle trigonométrique (*fig.* 7), la tangente d'un arc qui est une partie aliquote de la circonférence, est en effet la moitié du côté du polygone régulier circonscrit qui correspond à l'arc double.

La tangente de 45° est donc la moitié du côté du carré circonscrit, qui est égal au diamètre du cercle trigonométrique (*Géom.*, 204), c'est-à-dire à 2, et l'on a

$$\operatorname{tang} 45^\circ = \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = 1.$$

La tangente de 30° est la moitié du côté de l'hexagone régu-

lier circonscrit, qui est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (*Géom.*, 211), et l'on a

$$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La tangente de 60° est la moitié du côté du triangle équilatéral circonscrit, qui est égal à $2\sqrt{3}$ (*Géom.*, 205), et l'on a

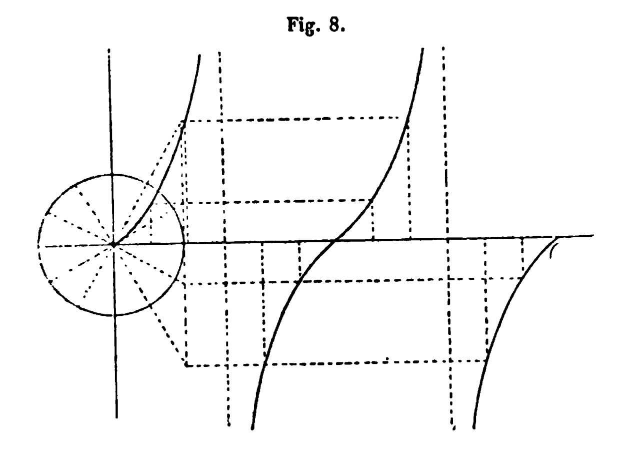
$$\tan 60^\circ = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

28. On peut se proposer de représenter la loi de variation de la tangente à l'aide d'une courbe rapportée aux mêmes axes coordonnés que le cercle trigonométrique.

Les points de cette courbe auront pour abscisses les différents arcs considérés dans le cercle trigonométrique, rectifiés, et pour ordonnées les tangentes de ces arcs.

En désignant l'un des arcs rectifiés par x et sa tangente par y, l'équation de la courbe dont il s'agit sera donc $y = \tan x$. On lui donne le nom de *tangentoïde* (*fig.* 8), et on la retrouve souvent dans les applications.

Fig. 8.



On la construit de la même manière que la sinusoïde (16), et cette construction donne lieu à des considérations analogues.

A cause des valeurs infinies dans les deux sens de $\tan \pm 90^\circ$ et de $\tan \pm 270^\circ$, la tangentoïde est composée d'une série illimitée de branches infinies, à droite et à gauche de l'origine. Ces branches infinies se succèdent en ayant pour *asymptotes* communes (t. I, *Alg. élém.*, 318), dans un sens ou dans l'autre, les parallèles menées à l'axe des y par les

points de l'axe des x qui ont pour abscisses ..., $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... La *fig.* 8 donne le développement de la tangentoïde, seulement pour une première circonférence rectifiée.

Variations de la cosécante, de la sécante et de la cotangente.

29. La cosécante est l'inverse du sinus; la sécante, l'inverse du cosinus; la cotangente, l'inverse de la tangente (8) : il est donc inutile d'étudier directement leurs variations, puisqu'on peut toujours déduire les valeurs de ces rapports des valeurs précédemment obtenues, par simple renversement. En se bornant au premier quadrant, on peut établir le Tableau suivant :

$$\text{coséc}\,0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \infty,$$

$$\text{coséc}\,45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2},$$

$$\text{coséc}\,90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = 1,$$

$$\text{séc}\,0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1,$$

$$\text{séc}\,45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2},$$

$$\text{séc}\,90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \infty,$$

$$\cot 0^\circ = \frac{1}{\text{tang}\,0^\circ} = \infty,$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\text{tang}\,45^\circ} = 1,$$

$$\cot 90^\circ = \frac{1}{\text{tang}\,90^\circ} = 0.$$

Le sinus, le cosinus et la tangente prennent, dans le premier quadrant, toutes les valeurs qu'ils peuvent prendre en valeur absolue. Il en est donc de même de leurs inverses. De plus le signe d'un rapport étant aussi celui de son inverse, le sinus et la cosécante, le cosinus et la sécante, la tangente et la cotangente, ont toujours le même signe.

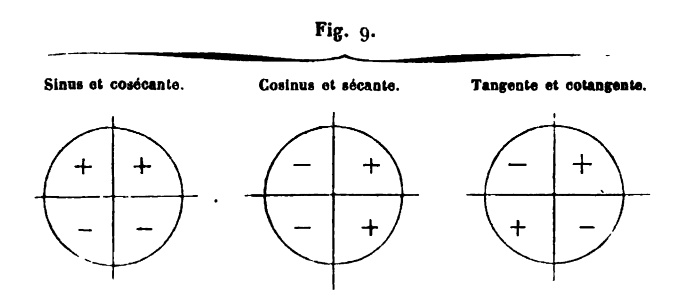
Par suite, on peut dire que la cosécante, positive lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans les deux premiers quadrants, négative lorsque cette extrémité tombe dans les deux derniers, varie depuis $+\infty$ jusqu'à $+1$ et depuis $-\infty$ jusqu'à -1; de sorte qu'elle prend toutes les valeurs possibles, à l'exception de celles qui sont comprises entre $+1$ et -1.

La sécante, positive lorsque l'extrémité de l'arc tombe dans le premier et le quatrième quadrant, négative lorsque cette extrémité tombe dans le deuxième et le troisième, varie depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$, et depuis -1 jusqu'à $-\infty$; de sorte qu'elle prend toutes les valeurs possibles, à l'exception de celles qui sont comprises entre $+1$ et -1.

Enfin, la cotangente étant positive dans le premier et le troisième quadrant, négative dans le deuxième et le quatrième, varie comme la tangente depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$.

30. Il est important de noter que les six rapports trigonométriques sont positifs dans le premier quadrant et que, dans les trois autres quadrants, *il y a toujours quatre rapports négatifs contre deux positifs*. C'est ce qu'indique la *fig.* 9.

Fig. 9.



31. On peut se proposer de représenter la loi de variation de la cosécante, de la sécante ou de la cotangente, à l'aide d'une courbe rapportée aux mêmes axes coordonnés que le cercle trigonométrique.

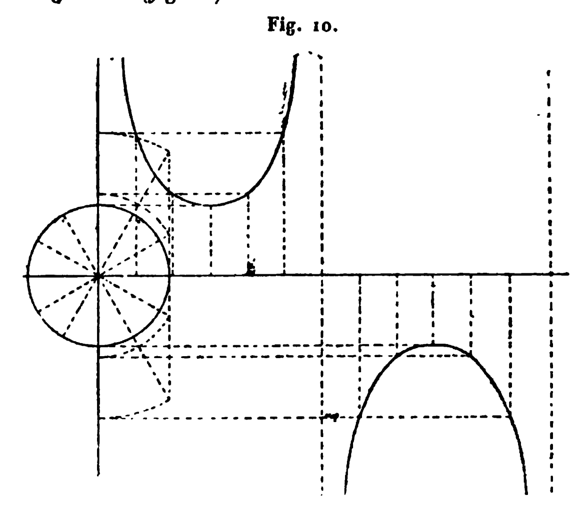
Les points de ces trois courbes auront pour abscisses communes les différents arcs considérés dans le cercle trigonométrique, rectifiés, et pour ordonnées les cosécantes, les sécantes ou les cotangentes de ces mêmes arcs.

En désignant par x l'un des arcs rectifiés et par y sa cosécante, sa sécante ou sa cotangente, les équations des trois courbes dont il s'agit seront

$$y = \text{coséc}\,x, \quad y = \text{séc}\,x, \quad y = \cot x.$$

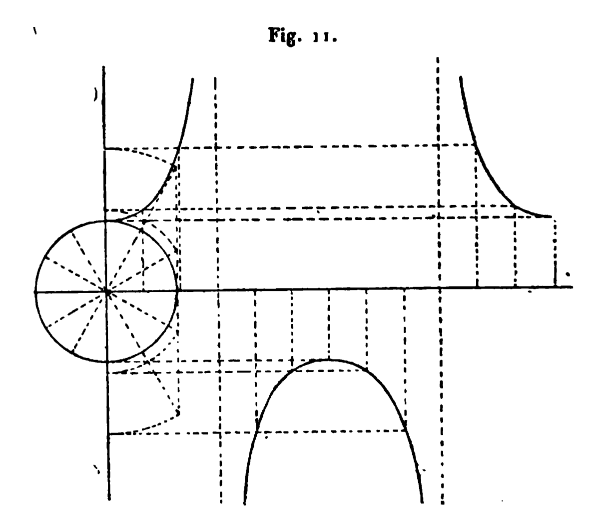
On leur donne les noms de *cosécantoïde* (*fig.* 10), de *sécantoïde* (*fig.* 1
et de *cotangentoïde* (*fig.* 12).

Fig. 10.



Leur construction s'effectue comme on l'a expliqué pour la sinusoïde (1
et la tangentoïde (28), et donne lieu aux mêmes considérations.

Fig. 11.

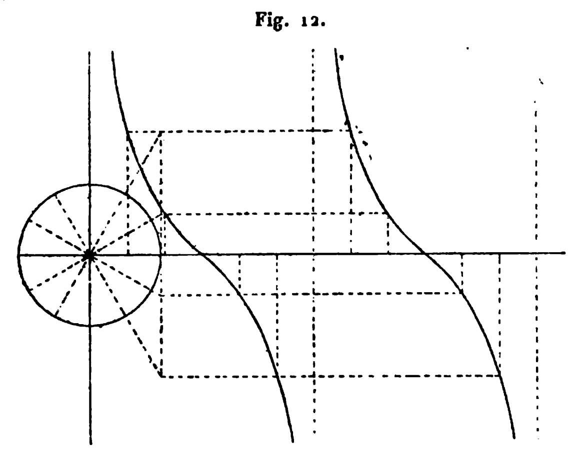


La cosécantoïde (*fig.* 10) et la sécantoïde (*fig.* 11) sont composées d'
série illimitée de branches infinies, à droite et à gauche de l'origine.
branches infinies se succèdent en ayant pour asymptotes communes, d
un sens ou dans l'autre, les parallèles menées à l'axe des y par les poi

qui ont pour abscisses, ..., $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, dans le premier cas; ..., $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, dans le second cas.

Les tangentes menées au cercle trigonométrique par les points de ce cercle situés sur l'axe des y sont aussi tangentes aux deux courbes, qui sont complétement extérieures à la région comprise entre ces deux parallèles.

Fig. 12.



La cosécantoïde et la sécantoïde ne diffèrent d'ailleurs, comme cela doit être puisque la cosécante d'un arc est la sécante de son complément, que par la position qu'elles occupent relativement aux axes coordonnés, et il suffit de faire glisser la cosécantoïde (*fig.* 10) parallèlement à elle-même vers la gauche, d'une longueur égale à $\frac{\pi}{2}$, pour obtenir la sécantoïde (*fig.* 11). On a, en effet, d'une manière générale, en vertu des propriétés des arcs supplémentaires et complémentaires (11, 8),

$$\operatorname{coséc}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \operatorname{coséc}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{séc} x.$$

Quant à la cotangentoïde (*fig.* 12), elle est composée, comme la tangentoïde, d'une série illimitée de branches infinies, à droite et à gauche de l'origine, qui se succèdent en ayant pour asymptotes communes, dans un sens ou dans l'autre, les parallèles menées à l'axe des y par les points de l'axe des x qui ont pour abscisses ..., $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$.

On voit facilement que les branches de la tangentoïde et de la cotangentoïde se coupent aux points dont les ordonnées sont ± 1 et dont les abscisses sont ..., $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$. Les deux courbes sont d'ailleurs symétriques par rapport aux parallèles menées par ces points à l'axe des y.

Rapports trigonométriques d'un arc, lorsqu'il s'accroît de 90 degrés.

32. En s'appuyant à la fois sur les propriétés des arcs supplémentaires et des arcs complémentaires, on a immédiatement

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = -\sin a,$$

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = -\cot a.$$

Il en résulte, d'après la définition des rapports inverses,

$$\text{coséc}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \text{séc}\, a,$$

$$\text{séc}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\text{coséc}\, a,$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\text{tang}\, a.$$

Réduction d'un arc au premier quadrant.

33. Réduire un arc quelconque au premier quadrant, c'est trouver l'arc plus petit que 90 degrés qui, sauf le signe, a les mêmes rapports trigonométriques que l'arc proposé.

Pour cela, on retranche de l'arc donné le plus grand nombre de circonférences qui y soit contenu. Si la différence obtenue est moindre que 90 degrés, le problème est résolu; sinon, on remplace, à l'aide des théorèmes précédents, cette différence par un arc moindre que 90 degrés qui ait les mêmes rapports trigonométriques en valeur absolue.

Considérons, par exemple, l'arc de 3825 degrés. Il renferme dix circonférences, faisant 3600 degrés. Le reste est l'arc de 225 degrés et, en retranchant de nouveau 180 degrés de cet arc, on voit que l'arc de 45 degrés présente, en valeur absolue, les mêmes rapports trigonométriques que l'arc proposé. On peut

ainsi écrire

$$\begin{aligned}
\sin 3825^\circ &= \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ,\\
\cos 3825^\circ &= \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ,\\
\operatorname{tang} 3825^\circ &= \operatorname{tang} 225^\circ = +\operatorname{tang} 45^\circ,\\
\operatorname{coséc} 3825^\circ &= \operatorname{coséc} 225^\circ = -\operatorname{coséc} 45^\circ,\\
\operatorname{séc} 3825^\circ &= \operatorname{séc} 225^\circ = -\operatorname{séc} 45^\circ,\\
\cot 3825^\circ &= \cot 225^\circ = \cot 45^\circ.
\end{aligned}$$

Relations entre les rapports trigonométriques d'un même arc.

34. On a, par définition (3), dans un cercle de rayon quelconque,

$$\sin a = \frac{y}{r},\quad \cos a = \frac{x}{r},\quad \operatorname{tang} a = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{coséc} a = \frac{r}{y},\quad \operatorname{séc} a = \frac{r}{x},\quad \cot a = \frac{x}{y}.$$

a représente ici la mesure de l'angle considéré ou le rapport de l'arc qu'il intercepte au rayon choisi.

Élevons au carré (¹) les deux premières égalités et ajoutons-les membre à membre, nous aurons

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{y^2 + x^2}{r^2}.$$

Mais le triangle rectangle OPM (*fig.* 6) donne

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Par suite,

(1) $$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Si l'on divise membre à membre les deux égalités sur lesquelles on vient d'opérer, on trouve

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{y}{x},$$

c'est-à-dire

(2) $$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

(¹) C'est le rapport $\sin a$ qui est élevé au carré, ce qu'on pourrait indiquer en écrivant $(\sin a)^2$. On affecte, pour plus de simplicité, le seul signe *sin* de l'exposant convenable.

De même, on peut écrire les trois égalités qui concernent les rapports trigonométriques inverses sous la forme

$$(3) \qquad \text{coséc}\, a = \frac{1}{\sin a},$$

$$(4) \qquad \text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a},$$

$$(5) \qquad \cot a = \frac{1}{\text{tang}\, a} = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

Telles sont les *cinq* relations fondamentales entre les six rapports trigonométriques.

35. Des équations simultanées sont dites *distinctes*, lorsqu'aucune d'entre elles ne peut se déduire des autres par voie de simple combinaison.

Les cinq relations du numéro précédent sont *distinctes*. En effet, la première ne peut pas se déduire des quatre autres; car il faudrait pour cela éliminer entre celles-ci les quantités tang$a$, cot$a$, séca, coséca, qui n'entrent que dans une seule équation. Cette même remarque prouve que les quatre dernières relations sont aussi distinctes.

D'ailleurs, s'il existait, entre les rapports trigonométriques d'un même angle ou d'un même arc, une sixième relation indépendante des premières, on aurait six équations pour six inconnues, et les rapports trigonométriques seraient déterminés une fois pour toutes, indépendamment de l'angle ou de l'arc considéré lui-même; ce qui est absurde.

36. Parmi les relations utiles à connaître qu'on peut déduire des cinq relations fondamentales, nous indiquerons les deux suivantes.

Si nous divisons par $\cos^2 a$ les deux membres de la relation (1), il vient

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Les relations (2) et (4) donnent alors

$$\text{tang}^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$$

et

$$\text{séc}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Par suite,

(6) $$\text{séc}^2 a = 1 + \text{tang}^2 a.$$

Les relations qui existent entre les trois rapports *directs* existent évidemment entre les trois rapports *indirects* (4). On peut donc poser immédiatement

(7) $$\text{cosée}^2 a = 1 + \cot^2 a.$$

Toutes les relations qu'on vient d'établir sont évidemment générales; car elles ne dépendent en rien de la place occupée sur la circonférence par l'extrémité de l'arc considéré.

37. Entre les *six* rapports trigonométriques, il existe *cinq* relations fondamentales. On peut donc demander d'exprimer cinq de ces rapports en fonction du sixième.

Proposons-nous, par exemple, d'exprimer en fonction de la tangente les cinq autres rapports trigonométriques.

On a immédiatement (rel. 5 et 6)

$$\cot a = \frac{1}{\text{tang}\, a}, \quad \text{séc}\, a = \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}.$$

La relation (7) donne

$$\text{coséc}\, a = \sqrt{1 + \frac{1}{\text{tang}^2 a}},$$

c'est-à-dire

$$\text{coséc}\, a = \frac{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}}{\text{tang}\, a}.$$

De

$$\text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a},$$

on déduit alors

$$\cos a = \frac{1}{\text{séc}\, a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}},$$

et de

$$\text{coséc}\, a = \frac{1}{\sin a}$$

on déduit

$$\sin a = \frac{1}{\text{coséc}\, a} = \frac{\text{tang}\, a}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}}.$$

On emploie très souvent les expressions du sinus et du cosinus en fonction de la tangente.

38. A ce sujet, il est bon de remarquer que, si la tangente est donnée sous forme de rapport, si l'on a, par exemple $\tang a = \frac{m}{n}$, il vient

$$\sin a = \frac{\tang a}{\sqrt{1 + \tang^2 a}} = \frac{\frac{m}{n}}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

On déduit de ces expressions une règle très simple pour écrire immédiatement les valeurs du sinus et du cosinus d'après celle de la tangente donnée sous forme de rapport.

39. Les valeurs du sinus, du cosinus, de la sécante et de la cosécante, exprimées en fonction de la tangente, renferment toutes un radical, c'est-à-dire qu'elles sont susceptibles d'un double signe; la valeur de la cotangente, au contraire, n'est susceptible que d'un signe (37).

En effet, si l'on donne seulement la valeur de la tangente, sans indiquer l'arc correspondant, cette valeur répond à deux séries d'arcs terminés aux extrémités d'un même diamètre (9). Si la tangente est positive, ces extrémités tombent dans le premier et le troisième quadrant : la tangente et la cotangente sont alors toujours positives, tandis que les quatre autres rapports trigonométriques peuvent être positifs ou négatifs, suivant que l'on considère l'extrémité située dans le premier ou le troisième quadrant. Au contraire, si la tangente est négative, les extrémités des arcs correspondants tombent dans le deuxième et le quatrième quadrant : la tangente et la cotangente sont alors toujours négatives, tandis que le sinus et la cosécante, positifs dans le deuxième quadrant, sont négatifs dans le quatrième, et que le cosinus et la sécante, négatifs dans le deuxième quadrant, sont positifs dans le quatrième (10).

Conditions pour que deux arcs admettent un même rapport trigonométrique donné.

40. Des développements qui précèdent il résulte que, si l'arc est donné, ses rapports trigonométriques sont parfaitement déterminés; au contraire, à un même rapport trigonométrique correspondent une infinité d'arcs.

En supposant connu le plus petit des arcs qui ont un rapport trigonométrique donné, nous indiquerons d'abord tous les arcs qui admettent ce même rapport trigonométrique; puis, nous déduirons immédiatement des formules rappelées la condition pour que deux arcs aient un même rapport trigonométrique déterminé.

Nous n'avons besoin de considérer successivement que les trois rapports sinus, cosinus et tangente, puisque les mêmes formules et les mêmes conditions sont évidemment applicables aux rapports inverses cosécante, sécante et cotangente.

41. Tous les arcs qui ont même sinus et, par conséquent, même cosécante qu'un arc donné a $\left(\text{compris entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right.$ ou $\left.\text{entre } \pi \text{ et } \frac{3\pi}{2}\right)$ sont renfermés dans les deux formules (12)

$$2k\pi + a \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - a.$$

Nous considérons ici le cercle trigonométrique.

Deux arcs, qui ont même sinus ou même cosécante, doivent appartenir tous deux à la même formule, ou bien faire respectivement partie de la série qui correspond à la première et de celle qui correspond à la seconde. Si l'on désigne ces deux arcs par α et par α', on aura donc

$$\alpha = 2k\pi + a, \quad \alpha' = 2k'\pi + a,$$

ou

$$\alpha = (2k+1)\pi - a, \quad \alpha' = (2k'+1)\pi - a,$$

ou

$$\alpha = 2k\pi + a, \quad \alpha' = (2k'+1)\pi - a.$$

k et k' sont des nombres entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls.

Dans les deux premières hypothèses, retranchons membre

à membre les valeurs de α et de α'; dans la troisième hypothèse, ajoutons ces mêmes valeurs : nous aurons

$$\alpha - \alpha' = 2(k - k')\pi$$

et

$$\alpha + \alpha' = (2k + 2k' + 1)\pi.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant : *Pour que deux arcs aient même sinus ou même cosécante, il faut et il suffit que leur différence soit égale à un nombre pair de demi-circonférences, ou que leur somme soit égale à un nombre impair de demi-circonférences.*

42. Tous les arcs qui ont même cosinus et, par conséquent, même sécante qu'un arc donné a (compris entre 0 et π) sont renfermés dans les deux formules (18)

$$2k\pi + a \quad \text{et} \quad 2k\pi - a.$$

Deux arcs qui ont même cosinus ou même sécante doivent appartenir tous deux à la même formule, ou bien faire respectivement partie de la série qui correspond à la première et de celle qui correspond à la seconde. Si l'on désigne ces deux arcs par α et par α', on aura donc

$$\alpha = 2k\pi + a, \quad \alpha' = 2k'\pi + a,$$

ou

$$\alpha = 2k\pi - a, \quad \alpha' = 2k'\pi - a,$$

ou

$$\alpha = 2k\pi + a, \quad \alpha' = 2k'\pi - a.$$

Dans les deux premières hypothèses, retranchons membre à membre les valeurs de α et de α'; dans la troisième hypothèse, ajoutons ces mêmes valeurs : nous aurons

$$\alpha - \alpha' = 2(k - k')\pi$$

et

$$\alpha + \alpha' = 2(k + k')\pi.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant : *Pour que deux arcs aient même cosinus ou même sécante, il faut et il suffit que leur différence ou leur somme soit égale à un nombre exact de circonférences.*

43. Tous les arcs qui ont même tangente et, par conséquent, même cotangente qu'un arc donné a (compris entre

o et π) sont renfermés dans la formule (23)

$$k\pi + a.$$

Deux arcs α et α', qui ont même tangente ou même cotangente, doivent appartenir tous deux à cette formule. On aura donc

$$\alpha = k\pi + a, \quad \alpha' = k'\pi + a.$$

Si l'on retranche membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\alpha - \alpha' = (k - k')\pi.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant : *Pour que deux arcs aient même tangente ou même cotangente, il faut et il suffit que leur différence soit égale à un nombre exact de demi-circonférences.*

44. Si l'on a

$$y = \sin x, \quad \text{ou} \quad y = \cos x, \quad \text{ou} \quad y = \operatorname{tang} x, \quad \ldots,$$

cela veut dire, inversement, que x est l'arc dont le sinus, ou le cosinus, ou la tangente, ..., est y. C'est ce que l'on écrit ainsi, par abréviation,

$$x = \operatorname{arc}\sin y, \quad \text{ou} \quad x = \operatorname{arc}\cos y, \quad \text{ou} \quad x = \operatorname{arc}\operatorname{tang} y, \quad \ldots.$$

D'après ce qu'on vient de voir (41, 42, 43), y étant donné, l'arc x est susceptible d'une infinité de valeurs. On peut donc considérer les six expressions

$$\operatorname{arc}{}_{\text{coséc}}^{\text{sin}}\, y, \quad \operatorname{arc}{}_{\text{séc}}^{\text{cos}}\, y, \quad \operatorname{arc}{}_{\text{cot}}^{\text{tang}}\, y,$$

comme des fonctions de y.

On a donné à ces fonctions, qui jouent un rôle important en Mathématiques, le nom de *fonctions circulaires inverses*, et les six rapports trigonométriques d'un arc sont, à leur tour, souvent désignés sous le nom de *fonctions circulaires directes*.

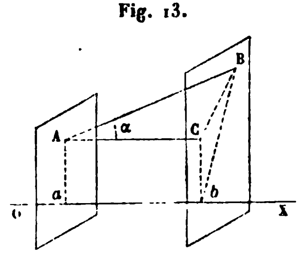
CHAPITRE II.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES RELATIVES AUX QUATRE PREMIÈRES OPÉRATIONS APPLIQUÉES AUX ARCS.

Théorie des projections.

45. D'une manière générale, on entend par *projection* d'une droite AB sur une autre droite OX, prise pour axe de projection, la portion *ab* de l'axe OX interceptée par les deux plans menés perpendiculairement des extrémités de AB sur OX. Les points *a* et *b* sont les projections des points A et B sur l'axe (*fig.* 13).

Fig. 13.



Par le point A, menons entre les deux plans AC parallèle à OX. Cette parallèle sera égale à la projection *ab* (*Géom.*, 329, 2°). Si AB est dans un même plan avec l'axe, les trois points B, C, *b*, seront en ligne droite; sinon, ils présenteront la disposition indiquée sur la figure.

L'angle de AB avec l'axe sera l'angle formé par AB avec la parallèle AC (*Géom.*, 321).

Désignons cet angle par α. Le triangle ABC est rectangle en C : on peut donc regarder AC comme l'abscisse du point B dans le cercle de rayon AB, où le diamètre passant par l'ori-

gine des arcs se confondrait en direction avec la droite AC. On a alors par définition (7)

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Représentons par l la longueur de la droite AB, par p celle de sa projection. La relation précédente devient

$$p = l\cos\alpha.$$

La projection d'une droite sur un axe quelconque est donc égale à la longueur de cette droite multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec l'axe.

46. On peut regarder la droite AB comme ayant deux directions, selon qu'on marche de l'extrémité A vers l'extrémité B ou de l'extrémité B vers l'extrémité A. Si, dans le premier cas, la projection ab, comptée alors dans le sens de O vers X, est considérée comme positive, dans le second on doit l'affecter du signe —, puisqu'elle se trouve comptée en sens inverse.

La convention suivante permet de ne pas se préoccuper du sens de la projection. Pour mesurer l'angle d'une droite finie avec un axe rectiligne, on mène par le point de départ de cette droite une parallèle à la partie positive de l'axe ; l'angle qu'on obtient en partant de cette parallèle et en décrivant au-dessus d'elle un arc jusqu'à la droite proposée est l'angle de la droite avec l'axe.

Si l'on parcourt la droite AB (*fig.* 14) en partant du point A, l'angle de AB avec l'axe est l'angle aigu CAB $= \alpha$. Si l'on parcourt la droite AB en partant du point B, l'angle de BA avec l'axe est l'angle DBA $= \alpha'$, et cet angle tombe entre 180° et 270°. Dans le premier cas, la projection de AB est $p = l\cos\alpha$; dans le second, elle est $p' = l\cos\alpha'$; le facteur $\cos\alpha'$ est négatif et donne le signe convenable à la projection, pourvu que la longueur l soit toujours prise en valeur absolue.

Fig. 14.

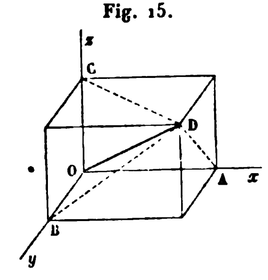
Remarquons que $\cos\alpha' = \cos(2\pi - \alpha') = \cos ABD$. On peut donc remplacer l'angle α' par l'angle ABD, supplément de

l'angle α. Les cosinus de deux angles supplémentaires étant égaux et de signes contraires, on a bien $p = -p'$.

En résumé, *l'angle dont on introduira le cosinus dans l'expression de la projection sera le plus petit des angles formés par la droite avec la parallèle à l'axe, cette parallèle étant menée par le point de départ de la droite vers la partie positive de l'axe, et l'angle étant mesuré au-dessus ou au-dessous de cette parallèle.*

47. Considérons le parallélipipède rectangle OD (*fig.* 15). On a (*Géom.*, 409)

Fig. 15.



$$OD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2.$$

Mais les triangles rectangles OAD, OBD, OCD, donnent immédiatement (45)

$$OA = OD \cos DOA,$$
$$OB = OD \cos DOB,$$
$$OC = OD \cos DOC.$$

Substituant dans l'égalité précédente et divisant les deux membres par OD^2, il vient

$$1 = \cos^2 DOA + \cos^2 DOB + \cos^2 DOC.$$

On est ainsi conduit à cette remarque importante : *La somme des carrés des cosinus des angles formés par une droite* OD *avec trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *est égale à l'unité.*

48. Théorème fondamental. — *Étant donné un contour polygonal quelconque* ABCDE, *la somme algébrique des projections des côtés qui le composent sur un axe* OX *est égale à la projection sur le même axe de la ligne* AE *qui joint les deux extrémités du contour ou qui ferme ce contour* (*fig.* 16).

En effet, la figure donne immédiatement la relation suivante entre la projection de la ligne résultante AE et les projections des côtés du contour :

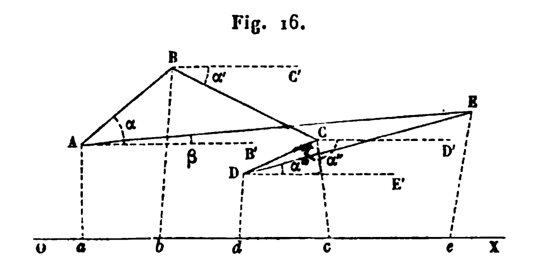
$$ae = ab + bc - cd + de.$$

On peut le voir encore d'une manière précise en supposant qu'un certain mobile parcourt le contour donné, tandis qu'un

autre mobile parcourt l'axe OX en étant toujours la projection du premier.

Désignons par α, α', α'', α''', les angles formés par les côtés AB, BC, CD, DE, avec les parallèles AB', BC', CD', DE', menées

Fig. 16.



à la partie positive de l'axe OX par leurs différents points de départ A, B, C, D; désignons par β l'angle formé par AE avec la parallèle AB'. Soient l, l', l'', l''', les longueurs des côtés du contour; soit L la longueur de AE. Le théorème précédent (45, 46) permet de poser

$$ae = L\cos\beta, \quad ab = l'\cos\alpha, \quad bc = l'\cos\alpha',$$
$$-cd = l''\cos\alpha'', \quad de = l'''\cos\alpha'''.$$

En substituant dans l'égalité précédente, il vient donc

$$L\cos\beta = l\cos\alpha + l'\cos\alpha' + l''\cos\alpha'' + l'''\cos\alpha'''.$$

Pour abréger, on écrit souvent

$$L\cos\beta = \Sigma\, l\cos\alpha,$$

en indiquant par le signe Σ la somme de tous les termes semblables dont la notation $l\cos\alpha$ rappelle la forme générale.

Le théorème qu'on vient de démontrer est d'un usage continuel, comme tous ceux qui peuvent fournir une relation immédiate entre les données et les inconnues d'une figure. En faisant varier convenablement l'axe choisi, on pourra obtenir autant d'équations qu'on a d'inconnues à considérer.

Deux contours polygonaux terminés aux mêmes extrémités ont des projections égales sur un axe quelconque.

La plus grande valeur de la somme $\Sigma\, l\cos\alpha$ a lieu lorsque la ligne AE qui ferme le contour est parallèle à l'axe. On a alors

$$\cos\beta = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma\, l\cos\alpha = L.$$

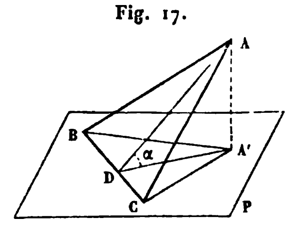
La même somme est nulle dans deux cas.

Lorsque la ligne qui ferme le contour est perpendiculaire à l'axe, on a $\cos\beta = 0$ et $\Sigma l \cos\alpha = 0$. La même conséquence se présente lorsque le contour se ferme de lui-même, c'est-à-dire lorsqu'on a $L = 0$.

49. Le théorème du n° **45** subsiste pour une aire plane quelconque projetée sur un plan.

Nous allons démontrer d'abord que *la projection d'un triangle sur un plan est égale à l'aire du triangle multipliée par le cosinus de l'angle que son plan forme avec le plan de projection.*

Fig. 17.



Supposons que l'un des côtés BC du triangle donné ABC se trouve dans le plan de projection P (*fig.* 17). La projection du triangle ABC sera le triangle A'BC. Menons la hauteur AD du triangle ABC; A'D est la hauteur du triangle A'BC (*Géom.*, **307**), et l'angle de ces deux hauteurs mesure l'angle α du plan ABC avec le plan P. On a donc à la fois (**7**)

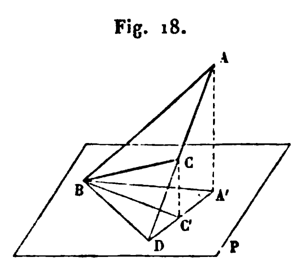
$$ABC = \frac{BC \times AD}{2}, \quad A'BC = \frac{BC \times A'D}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{A'D}{AD},$$

et l'on en déduit

$$A'BC = \frac{BC \times AD \times \cos\alpha}{2} = ABC.\cos\alpha.$$

Considérons maintenant le triangle ABC dans une position quelconque par rapport au plan de projection P. On peut toujours, sans altérer la projection de l'aire ABC, transporter le plan P parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il vienne passer par le point B. Soit alors BD l'intersection du plan ABC et du plan P (*fig.* 18).

Fig. 18.



Projetons les sommets A et C en A' et en C'; la projection de la droite ACD sera la droite A'C'D, le triangle A'BD sera la projection du triangle ABD, le triangle C'BD celle du triangle

CBD. Soit d'ailleurs α l'angle du plan ABC et du plan P. On a, d'après la démonstration précédente,

$$A'BD = ABD.\cos\alpha, \quad C'BD = CBD.\cos\alpha,$$

et l'on en déduit, par soustraction,

$$A'BC' = ABC.\cos\alpha.$$

Mais A'BC' est la projection du triangle ABC : le théorème est donc général dans le cas du triangle.

Soit maintenant un polygone plan quelconque, dont nous désignerons l'aire par S. Soient S' l'aire de sa projection orthogonale sur un plan P, et α l'angle que son plan forme avec le plan P. Le polygone S étant composé des triangles T, T', T'', ..., sa projection S' est composée des triangles correspondants t, t', t'', ..., projections des premiers, et l'on a, d'après ce qui précède,

$$t = T\cos\alpha, \quad t' = T'\cos\alpha, \quad t'' = T''\cos\alpha, \quad \ldots.$$

On en déduit immédiatement, par addition,

$$S' = S\cos\alpha.$$

En employant enfin la méthode des limites (*Géom.*, 217), on étend facilement ce résultat au cas d'une aire plane terminée par un contour quelconque, curviligne ou semi-curviligne.

En résumé, *la projection orthogonale d'une surface plane quelconque sur un plan quelconque est égale à l'aire de cette surface, multipliée par le cosinus de l'angle que son plan forme avec le plan de projection.*

50. Les projections de la surface plane S sur trois plans deux à deux rectangulaires et se coupant en un point O, étant désignées par S', S'', S''', et les angles de S avec ces trois plans représentés par α, β, γ, on a (49)

$$S' = S\cos\alpha, \quad S'' = S\cos\beta, \quad S''' = S\cos\gamma.$$

Abaissons du point O une perpendiculaire sur le plan de S. Comme deux droites perpendiculaires à deux plans font entre elles le même angle que ces deux plans (*Géom.*, 377), on voit que les angles α, β, γ, satisfont nécessairement (47) à la relation

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Par conséquent, en ajoutant les trois équations précédentes après les avoir élevées au carré, on arrive à cette relation remarquable,

$$S'^2 + S''^2 + S'''^2 = S^2,$$

qui exprime que *la somme des carrés des projections d'une aire plane sur trois plans deux à deux rectangulaires est égale au carré de cette aire.*

51. Tout ce que nous venons de dire montre qu'il existe entre une aire plane et sa projection sur un plan les mêmes relations qu'entre une droite et sa projection sur un axe. Par suite, si l'on élève des perpendiculaires aux plans des aires considérées, si l'on prend respectivement sur ces perpendiculaires des longueurs proportionnelles aux aires correspondantes, au lieu de projeter toutes les aires sur un plan, on peut projeter toutes les droites finies obtenues sur un axe perpendiculaire au plan de projection choisi. Les angles formés par les aires avec le plan de projection sont ainsi les mêmes que les angles formés par les droites avec l'axe de projection, et les rapports des aires sont remplacés par des rapports linéaires égaux. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet (t. V).

Addition et soustraction des arcs.

52. Le but que nous nous proposons est celui-ci : *Étant donnés les rapports trigonométriques de deux arcs, trouver les rapports trigonométriques de l'arc qui représente leur somme ou leur différence.*

53. Soient les deux arcs a et b. Nous commencerons par chercher les quatre formules fondamentales qui font connaître $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, lorsqu'on donne $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$.

L'application de la théorie des projections à la solution de ce problème permet d'éviter toute discussion ultérieure des formules trouvées.

Considérons le cercle trigonométrique (*fig.* 19), où A est l'origine des arcs. Nous établirons d'abord la formule $\cos(a+b)$, d'où nous déduirons immédiatement les trois autres.

Portons l'arc a de A en B, dans le sens positif ou négatif,

suivant le signe de cet arc; puis, l'arc b de B en C, en prenant la même précaution. Menons ensuite les deux diamètres rectangulaires BB′ et DD′. L'extrémité de l'arc b peut alors se trouver à droite ou à gauche du diamètre DD′, au-dessus ou au-dessous du diamètre BB′. Pour tenir compte de tous les cas possibles, nous supposerons donc successivement l'extrémité de l'arc b en C, en C′ et en C″.

Cela posé, on peut aller du centre O aux trois points indiqués, soit directement, soit en suivant les chemins brisés OPC, OP′C′, OP′C″. En prenant pour axe de projection Ox le diamètre passant par l'origine A, on peut donc écrire, en vertu du principe fondamental des projections (48),

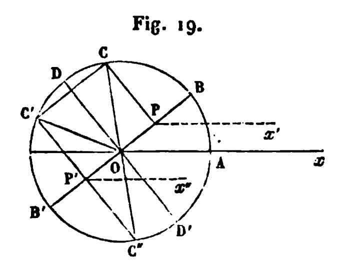
$$(\alpha)\quad \text{project. de OC} = \text{project. de OP} + \text{project. de PC},$$

$$(\beta)\quad \text{project. de OC}' = \text{project. de OP}' + \text{project. de P}'\text{C}',$$

$$(\gamma)\quad \text{project. de OC}'' = \text{project. de OP}' + \text{project. de P}'\text{C}''.$$

Le rayon du cercle trigonométrique étant l'unité, et les arcs AC, AC′, AC″, représentant l'arc $(a+b)$ dans les trois cas

Fig. 19.



considérés, les premiers membres des égalités précédentes équivalent à OC cos AOC, OC′ cos AOC′, OC″ cos AOC″ (45, 46), c'est-à-dire toujours à $\cos(a+b)$.

On a de même

$$\text{proj. de OP} = \text{OP} \cos \text{AOB} = \text{OP} \cos a,$$

$$\text{proj. de OP}' = \text{OP}' \cos \text{AOB}' = \text{OP}' \cos(\pi - a) = -\text{OP}' \cos a.$$

Mais, en prenant pour origine de l'arc b le point B, on a, pour l'extrémité C, $\text{OP} = \cos b$ et, pour les extrémités C′ et C″, $-\text{OP}' = \cos b$. Les premiers termes des seconds membres

des égalités (α), (β), (γ), équivalent donc tous au produit $\cos a \cos b$.

Enfin, en traçant par les points P et P' les parallèles Px' et $P'x''$ à l'axe Ox, on a (45, 46)

$$\text{proj. de PC} = \text{PC} \cos \text{CP}x' = \text{PC} \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{PC} \sin a,$$

$$\text{proj. de P'C'} = \text{P'C'} \cos \text{C'P'}x'' = \text{P'C'} \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{P'C'} \sin a,$$

$$\text{proj. de P'C''} = \text{P'C''} \cos \text{C''P'}x'' = \text{P'C''} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{P'C''} \sin a.$$

Mais, B étant toujours l'origine de l'arc b, on a, pour les deux extrémités C et C', $\text{PC} = \text{P'C'} = \sin b$ et, pour l'extrémité C'', $-\text{P'C''} = \sin b$ ou $\text{P'C''} = -\sin b$. Les seconds termes des seconds membres des égalités (α), (β), (γ), équivalent donc tous à leur tour au produit $-\sin a \sin b$.

Par conséquent, les trois égalités (α), (β), (γ), se réduisent à la formule unique

$$(1) \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Cette formule, reposant sur le principe fondamental des projections, participe à toute sa généralité, et elle est applicable à tous les cas, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur les valeurs des arcs a et b. On peut donc remplacer b par $-b$ dans la formule (1), et l'on a ainsi

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b).$$

Mais (19, 13) $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$. Il vient donc, comme deuxième formule générale,

$$(2) \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En vertu de sa généralité, on peut, dans la formule (2), remplacer a par $\frac{\pi}{2} - a$ et écrire

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - a - b\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b.$$

On a d'ailleurs (8)

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \sin(a+b),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

On obtient ainsi la troisième formule générale

(3) $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Si, dans cette formule, on remplace b par $-b$, on a

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b),$$

c'est-à-dire la quatrième formule générale

(4) $$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Les formules (1), (2), (3), (4), sont d'un usage continuel, et l'on doit les savoir par cœur comme toutes les formules trigonométriques. Les signes sont contraires dans les deux membres pour les formules $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$; ils sont les mêmes pour les formules $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

54. Les formules qu'on vient d'obtenir permettent de trouver le sinus et le cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs, quand on donne le sinus et le cosinus de chacun d'eux.

En effet, soient les trois arcs a, b, c. Si l'on considère d'abord $a+b$ comme un seul arc, on peut écrire (53)

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c,$$
$$\cos(a+b+c) = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c.$$

En remplaçant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ par les valeurs connues et en développant, il vient

$$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c,$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos c \sin a \sin b - \cos b \sin a \sin c - \cos a \sin b \sin c.$$

Ces formules conduiront au sinus et au cosinus de la somme de quatre arcs, en employant le même procédé, et ainsi de suite.

55. Nous allons chercher maintenant la tangente ou la cotangente de la somme ou de la différence de deux arcs, connaissant les tangentes ou les cotangentes des arcs donnés.

On a d'abord (34)

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}.$$

Si l'on divise les deux termes de la fraction du second membre par $\cos a \cos b$, il vient

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{1-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}.$$

Simplifions, remplaçons $\dfrac{\sin a}{\cos a}$ par $\operatorname{tang} a$, $\dfrac{\sin b}{\cos b}$ par $\operatorname{tang} b$, et nous trouverons

$$(5)\qquad \operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b}{1-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Cette formule étant générale comme celles qui ont servi à l'établir, on peut y remplacer b par $-b$. D'ailleurs (24),

$$\operatorname{tang}(-b)=-\operatorname{tang} b,$$

et l'on a ainsi

$$(6)\qquad \operatorname{tang}(a-b)=\frac{\operatorname{tang} a-\operatorname{tang} b}{1+\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Si l'on suppose l'arc a égal à $\frac{\pi}{4}$ ou à 45 degrés, il faut faire $\operatorname{tang} a=1$ dans les résultats précédents, et l'on obtient les deux formules usuelles

$$(5\,bis)\qquad \operatorname{tang}(45^\circ+b)=\frac{1+\operatorname{tang} b}{1-\operatorname{tang} b},$$

$$(6\,bis)\qquad \operatorname{tang}(45^\circ-b)=\frac{1-\operatorname{tang} b}{1+\operatorname{tang} b}.$$

56. De même, pour avoir $\cot(a+b)$, on écrit (34)

$$\cot(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$

et, en divisant les deux termes de la fraction du second membre par $\sin a \sin b$, on parvient facilement à la formule

$$(7)\qquad \cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}.$$

En changeant b en $-b$ dans cette formule, on trouve

$$(8)\qquad \cot(a-b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}.$$

Si l'on suppose l'arc a égal à 45 degrés, on doit faire $\cot a = 1$ dans les formules (7) et (8).

57. Les formules qui précèdent conduisent à la tangente et à la cotangente de la somme d'un nombre quelconque d'arcs, quand on connaît la tangente et la cotangente de chacun d'eux.

En effet, soient les trois arcs a, b, c. Si l'on considère d'abord $a+b$ comme un seul arc, on peut écrire (55, 56)

$$\operatorname{tang}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tang}(a+b) + \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang}(a+b)\operatorname{tang} c},$$

$$\cot(a+b+c) = \frac{\cot(a+b)\cot c - 1}{\cot(a+b) + \cot c}.$$

En remplaçant $\operatorname{tang}(a+b)$ et $\cot(a+b)$ par les valeurs connues, en simplifiant et en développant, on trouve facilement

$$\operatorname{tang}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c},$$

$$\cot(a+b+c) = \frac{\cot a \cot b \cot c - \cot a - \cot b - \cot c}{\cot a \cot b + \cot a \cot c + \cot b \cot c - 1}.$$

Ces formules conduiront à leur tour à la tangente et à la cotangente de la somme de quatre arcs, en employant le même procédé, et ainsi de suite.

Multiplication des arcs.

58. Nous nous proposons, *étant donnés les rapports trigonométriques d'un arc, de trouver les rapports trigonométriques de ses multiples.*

59. Si, dans les formules $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$, on suppose que b devienne égal à a, on trouve immédiatement

$$(9)\qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a,$$

$$(10)\qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

D'après la formule $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, qui donne

$$\sin a = \pm\sqrt{1-\cos^2 a} \quad \text{ou} \quad \cos a = \pm\sqrt{1-\sin^2 a},$$

on voit que $\sin 2a$ ne peut s'exprimer rationnellement, ni en fonction de $\sin a$ ni en fonction de $\cos a$; c'est le contraire pour $\cos 2a$. En remplaçant successivement, dans la valeur de $\cos 2a$, $\cos^2 a$ par $1-\sin^2 a$ ou $\sin^2 a$ par $1-\cos^2 a$, on obtient en effet ces deux formules importantes :

(10 *bis*) $$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a,$$

(10 *ter*) $$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1.$$

60. Qu'on donne $\sin a$ ou $\cos a$, $\sin 2a$ admet deux valeurs égales et de signes contraires, tandis que $\cos 2a$ ne peut prendre qu'une seule valeur. Il est facile de justifier ce résultat *a priori*.

Supposons qu'on donne $\sin a$. En désignant par a le plus petit arc qui a ce sinus, tous les arcs satisfaisant à la même condition sont renfermés dans les formules (12)

$$2n\pi + a \quad \text{et} \quad (2n+1)\pi - a.$$

Par suite, tous les arcs doubles de ceux-là et qu'on doit regarder comme ayant $\sin 2a$ pour sinus sont compris dans les formules

$$4n\pi + 2a \quad \text{et} \quad (4n+2)\pi - 2a.$$

Toutes les valeurs de $\sin 2a$ et de $\cos 2a$ sont donc alors

$$\begin{aligned}
\sin(4n\pi + 2a) &= \sin 2a,\\
\sin[(4n+2)\pi - 2a] &= -\sin 2a,\\
\cos(4n\pi + 2a) &= \cos 2a,\\
\cos[(4n+2)\pi - 2a] &= \cos 2a.
\end{aligned}$$

Si l'on donne $\cos a$, tous les arcs qui ont ce cosinus sont renfermés dans les formules (18)

$$2n\pi + a \quad \text{et} \quad 2n\pi - a.$$

Par suite, tous les arcs doubles sont compris dans les formules

$$4n\pi + 2a \quad \text{et} \quad 4n\pi - 2a.$$

On a donc, dans cette hypothèse, pour toutes les valeurs de $\sin 2a$ et de $\cos 2a$,

$$\begin{aligned}
\sin(4n\pi + 2a) &= \sin 2a,\\
\sin(4n\pi - 2a) &= -\sin 2a,\\
\cos(4n\pi + 2a) &= \cos 2a,\\
\cos(4n\pi - 2a) &= \cos 2a.
\end{aligned}$$

61. Reprenons les formules $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$. Si b devient égal à $2a$, elles donnent immédiatement

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a,$$

ou, en remplaçant $\sin 2a$ et $\cos 2a$ par les valeurs déduites des formules (9) et (10),

$$\sin 3a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$
$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a \cos a.$$

On voit que, si l'on connaît $\sin a$, $\sin 3a$ peut seul être exprimé rationnellement en fonction de $\sin a$; si l'on connaît $\cos a$, $\cos 3a$ peut seul être exprimé rationnellement en fonction de $\cos a$. Il en résulte que, lorsqu'on donne $\sin a$, on trouve pour $\sin 3a$ une seule valeur, et pour $\cos 3a$ deux valeurs égales et de signes contraires. C'est l'inverse qui a lieu lorsqu'on donne $\cos a$. Il est facile de justifier ce résultat *a priori*, en raisonnant comme au n° 60. Nous ne nous y arrêterons pas.

Dans la valeur de $\sin 3a$, remplaçons $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$ et, dans celle de $\cos 3a$, remplaçons $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$. On a ainsi les formules usuelles

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a, \tag{11}$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a. \tag{12}$$

62. En faisant $b = 3a$ dans les formules $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$, et en y substituant ensuite les valeurs de $\sin 3a$ et de $\cos 3a$, on obtiendra celles de $\sin 4a$ et de $\cos 4a$, etc.

Plus généralement, remplaçons b par $(m-1)a$ dans les formules $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$; nous aurons

$$\sin ma = \sin a \cos(m-1)a + \cos a \sin(m-1)a,$$
$$\cos ma = \cos a \cos(m-1)a - \sin a \sin(m-1)a.$$

Il suffit donc de connaître les valeurs de $\sin(m-1)a$ et de $\cos(m-1)a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$, pour obtenir de même celles de $\sin ma$ et de $\cos ma$. Le calcul peut donc s'effectuer régulièrement et de proche en proche, jusqu'à la limite la plus éloignée.

Nous ne le poursuivrons pas ici, parce que nous démontrerons plus tard (t. III, *Alg. supérieure*) la règle à suivre pour

écrire immédiatement les valeurs de $\sin ma$ et de $\cos ma$, quel que soit l'entier m.

63. Si, dans les formules (5) et (7) des nos 55 et 56, on fait $b = a$, il vient

$$\tang 2a = \frac{2 \tang a}{1 - \tang^2 a}, \tag{13}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}. \tag{14}$$

Si, dans les mêmes formules, on fait $b = 2a$, il vient

$$\tang 3a = \frac{\tang a + \tang 2a}{1 - \tang a \tang 2a},$$

$$\cot 3a = \frac{\cot a \cot 2a - 1}{\cot a + \cot 2a},$$

ou, en remplaçant $\tang 2a$ et $\cot 2a$ par leurs valeurs et en simplifiant,

$$\tang 3a = \frac{3 \tang a - \tang^3 a}{1 - 3 \tang^2 a}, \tag{15}$$

$$\cot 3a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot a}{3 \cot^2 a - 1}. \tag{16}$$

On peut ainsi opérer de proche en proche, les valeurs de $\tang 3a$ et de $\cot 3a$ permettant de calculer celles de $\tang 4a$ et de $\cot 4a$, etc.

Plus généralement, en remplaçant b par $(m-1)a$ dans les formules (5) et (7), on a les formules

$$\tang ma = \frac{\tang a + \tang (m-1) a}{1 - \tang a \tang (m-1) a},$$

$$\cot ma = \frac{\cot a \cot (m-1) a - 1}{\cot a + \cot (m-1) a},$$

qui feront connaître $\tang ma$ et $\cot ma$ en fonction de $\tang a$ et de $\cot a$, lorsqu'on aura $\tang (m-1) a$ et $\cot (m-1) a$ en fonction des mêmes données.

Nous indiquerons plus tard (t. III, *Alg. supérieure*) les valeurs directes de $\tang ma$ et de $\cot ma$ en fonction de $\tang a$ et de $\cot a$.

64. Il résulte de ce qui précède que les valeurs de $\tang ma$ et de $\cot ma$ s'expriment rationnellement, la première en fonction de $\tang a$, la seconde en fonction de $\cot a$, de sorte que $\tang ma$ et $\cot ma$ n'ont chacune qu'une seule valeur. On peut justifier ce résultat *a priori*, en remarquant que tous les arcs qui ont $\tang a$ pour tangente ou $\cot a$ pour cotangente sont renfermés dans la formule (23)

$$n\pi + a.$$

Les arcs m fois plus grands et qui ont par conséquent pour tangente ou pour cotangente $\tang ma$ ou $\cot ma$, sont alors compris dans la formule

$$mn\pi + ma.$$

Toutes les valeurs de $\tang ma$ et de $\cot ma$ se réduisent donc à

$$\tang(mn\pi + ma) = \tang ma, \qquad \cot(mn\pi + ma) = \cot ma.$$

Division des arcs.

65. La question qu'on se propose de résoudre est celle-ci : *Connaissant les rapports trigonométriques d'un arc, déterminer les rapports trigonométriques d'un sous-multiple de cet arc.*

Nous donnerons plus tard la solution générale de cette question (t. III, *Alg. supérieure*), et nous nous contenterons d'en exposer ici les cas les plus simples et les plus usuels.

66. 1° *Étant donné* $\cos a$, *trouver* $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ *et* $\tang\frac{a}{2}$.

Les formules (10 *bis*) et (10 *ter*) du n° 59 conduisent immédiatement au résultat. Dans ces formules

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1, \qquad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a,$$

on peut, en effet, remplacer l'arc a, qui est quelconque, par l'arc $\frac{a}{2}$. Elles deviennent alors

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1, \qquad \cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2},$$

et l'on en déduit

(17) $$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

(18) $$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}};$$

puis, par division,

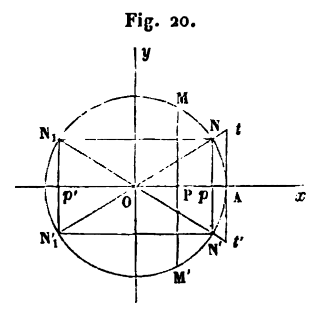
$$(19)\qquad \tang\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

On voit qu'on trouve, pour les rapports trigonométriques de l'arc $\frac{a}{2}$, deux valeurs égales et de signes contraires.

Il est facile de prouver *a priori* qu'il doit en être ainsi, soit en se servant des formules qui renferment tous les arcs ayant même cosinus (18), soit en considérant directement le cercle trigonométrique. Nous suivrons, pour ce premier problème, le procédé géométrique.

Supposons que, dans le cercle de rayon 1, $\cos a$ soit représenté par l'abscisse OP; nous mènerons par le point P la parallèle MM′ à l'axe Oy (*fig.* 20). Tous les arcs terminés en M ou en M′ auront donc $\cos a$ pour cosinus : il faut chercher les sinus, les cosinus et les tangentes des moitiés de tous ces arcs.

Fig. 20.



En prenant d'abord la moitié de l'arc AM, on obtient l'arc AN. En prenant la moitié de l'arc AM augmenté d'une circonférence, on obtient l'arc AN augmenté d'une demi-circonférence, c'est-à-dire l'arc AN'_1, dont l'extrémité est diamétralement opposée à l'extrémité N. Tous les arcs terminés en M ont ainsi leurs moitiés terminées en N ou en N'_1; car l'addition d'un nombre pair quelconque de circonférences ramènera évidemment au point N, et l'addition d'un nombre impair quelconque de circonférences ramènera au point N'_1.

Considérons maintenant l'arc AM′. Cet arc étant égal à $2\pi - AM$, sa moitié est égale à $\pi - AN$, c'est-à-dire à l'arc AN_1, dont l'extrémité est déterminée par la parallèle NN_1 à l'axe Ox. Si l'on augmente l'arc AM′ d'une circonférence, il faut augmenter sa moitié AN_1 d'une demi-circonférence, et l'on obtient ainsi l'arc AN′, dont l'extrémité est diamétralement opposée à l'extrémité N_1. Tous les arcs terminés en M′ ont ainsi leurs moitiés terminées en N_1 ou en N′; car l'addition d'un nombre pair quelconque de circonférences ramènera au

point N_1, tandis que l'addition d'un nombre impair quelconque de circonférences ramènera au point N'.

On vérifiera de même que tous les arcs négatifs terminés en M' et en M ont aussi les extrémités de leurs arcs moitiés en l'un ou l'autre des quatre points qu'on vient de déterminer.

En résumé, les moitiés de tous les arcs, positifs ou négatifs, terminés en M ou en M', ont leurs extrémités aux sommets du rectangle $NN_1N'_1N'$.

Par suite, il existe : pour $\sin\frac{a}{2}$, deux valeurs égales et de signes contraires, représentées par les ordonnées Np et $-N'p$; pour $\cos\frac{a}{2}$, deux valeurs égales et de signes contraires, représentées par les abscisses Op et $-Op'$; pour $\tang\frac{a}{2}$, deux valeurs égales et de signes contraires, représentées par les tangentes At et $-At'$.

67. Si l'arc a est donné en même temps que son cosinus, les signes des inconnues $\cos\frac{a}{2}$, $\sin\frac{a}{2}$ et $\tang\frac{a}{2}$, sont déterminés, et les formules (17), (18) et (19), permettent de calculer ces quantités sans ambiguïté.

68. 2° *Étant donné* $\sin a$, *trouver* $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ *et* $\tang\frac{a}{2}$.

Dans la formule (9),

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a,$$

du n° 59, on peut remplacer l'arc a, qui est quelconque, par l'arc $\frac{a}{2}$. Il vient ainsi

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}.$$

On a d'ailleurs (34)

$$1 = \sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2}.$$

En ajoutant et en retranchant successivement ces deux

équations, on trouve

$$1 + \sin a = \left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$1 - \sin a = \left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)^2.$$

Il en résulte

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin a},$$

$$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin a},$$

c'est-à-dire (t. I, *Alg. élém.*, 2), en prenant toutes les combinaisons de signes,

$$(20) \qquad \sin\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}\right),$$

$$(21) \qquad \cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}\right).$$

Dans ces deux formules, les signes extérieurs et les signes intérieurs doivent séparément se correspondre.

On voit qu'on obtient, pour chaque inconnue, quatre valeurs deux à deux égales et de signes contraires; de plus, elles sont les mêmes, sauf l'ordre, pour les deux inconnues. Nous allons justifier ces résultats, en laissant cette fois de côté le cercle trigonométrique.

Tous les arcs qui ont $\sin a$ pour sinus sont renfermés (12) dans les formules

$$2k\pi + a \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - a.$$

Il faut déterminer les sinus et les cosinus des moitiés de tous ces arcs, c'est-à-dire de tous les arcs renfermés dans les formules

$$k\pi + \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}.$$

k est un nombre entier, positif, négatif ou nul. Pour toute valeur *paire* de k, on peut supprimer $k\pi$, qui représente alors un nombre exact de circonférences, sans modifier les extrémités des arcs que l'on doit considérer. On n'a donc, dans

cette première hypothèse, que deux valeurs distinctes pour chacune des deux inconnues, savoir :

$$\sin\frac{a}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\cos\frac{a}{2},$$

$$\cos\frac{a}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\sin\frac{a}{2}.$$

Pour toute valeur *impaire* de $k=2n+1$, on peut, pour la même raison, supprimer le nombre exact de circonférences $2n\pi$, et l'on n'a encore, dans cette seconde hypothèse, que deux valeurs distinctes pour chaque inconnue, savoir :

$$\sin\left(\pi+\frac{a}{2}\right)=-\sin\frac{a}{2}$$

et

$$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=-\cos\frac{a}{2};$$

$$\cos\left(\pi+\frac{a}{2}\right)=-\cos\frac{a}{2}$$

et

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=-\sin\frac{a}{2}.$$

Ce qui précède montre immédiatement que $\tang\frac{a}{2}$ n'admet que deux valeurs inverses l'une de l'autre : $\tang\frac{a}{2}$ et $\cot\frac{a}{2}$.

69. Si l'arc a est donné en même temps que son sinus, les signes et les relations de grandeur de $\sin\frac{a}{2}$ et de $\cos\frac{a}{2}$ sont déterminés. On peut donc calculer ces quantités sans ambiguïté à l'aide des formules (20) et (21). La valeur de $\tang\frac{a}{2}$ en résulte (34).

70. La formule (19) du n° 66 permet d'exprimer $\tang\frac{a}{2}$ en fonction de $\cos a$. On peut aussi l'exprimer en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$, comme il suit.

On a (34)

$$\tang\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}},$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède (66, 68),

$$\tang\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a}.$$

71. 3° *Étant donnée* tang a, *trouver* tang $\frac{a}{2}$.

Nous avons (63)

$$\tang 2a = \frac{2\tang a}{1-\tang^2 a}.$$

Si l'on remplace dans cette formule l'arc a, qui est quelconque, par l'arc $\frac{a}{2}$, elle devient

$$\tang a = \frac{2\tang\frac{a}{2}}{1-\tang^2\frac{a}{2}}.$$

On en déduit immédiatement l'équation du second degré

$$\tang a \tang^2\frac{a}{2} + 2\tang\frac{a}{2} - \tang a = 0.$$

Le produit des racines de cette équation est toujours égal à -1 (t. I, *Alg. élém.*, 242), ce qui permet de dire d'avance que, si l'une des racines est tang $\frac{a}{2}$, l'autre sera $-\cot\frac{a}{2}$ (34). Ces racines ont pour expression

$$\tang\frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tang^2 a}}{\tang a}.$$

Vérifions ce résultat *a priori*.

Tous les arcs qui ont tang a pour tangente sont renfermés dans la formule (23)

$$k\pi + a,$$

et il faut déterminer les tangentes des moitiés de tous ces arcs

c'est-à-dire de tous les arcs compris dans la formule

$$\frac{k\pi}{2}+\frac{a}{2}.$$

k est un nombre entier, positif, négatif ou nul. Pour toute valeur *paire* de k, on peut supprimer $\frac{k\pi}{2}$ qui représente alors un multiple quelconque de π (23), et l'on n'a pour l'inconnue que la seule valeur

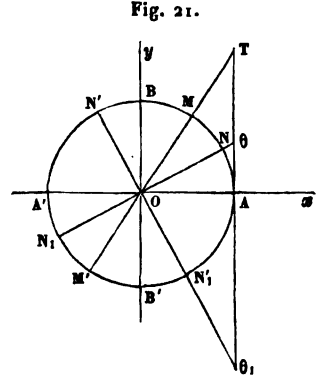
$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}.$$

Pour toute valeur *impaire* de $k = 2n + 1$, on peut de même supprimer le multiple $n\pi$, et l'on n'a encore pour l'inconnue que la seule valeur (32)

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right) = -\cot\frac{a}{2}.$$

Si l'on veut, pour la vérification précédente, avoir recours directement au cercle trigonométrique, on prend, sur la tangente à l'origine (*fig.* 21), AT = tang$a$. Les extrémités du diamètre MM' qui passe par le point T sont les extrémités de tous les arcs qui ont tang$a$ pour tangente, et l'on a à considérer les moitiés de tous ces arcs.

Fig. 21.



Prenons d'abord la moitié AN de l'arc AM $= a$. En prenant la moitié de l'arc AM augmenté d'une circonférence, on obtient l'arc AN augmenté d'une demi-circonférence, c'est-à-dire l'arc AN_1, dont l'extrémité est diamétralement opposée à l'extrémité N. Tous les arcs terminés en M ont ainsi leurs moitiés terminées en N ou en N_1; car l'addition d'un nombre pair quelconque de circonférences à l'arc AM ramènera au point N, et l'addition d'un nombre impair quelconque de circonférences ramènera au point N_1. Toutes ces moitiés d'arcs ont la même tangente $A\theta = \operatorname{tang}\frac{a}{2}$.

Prenons maintenant l'arc AM', qui est égal à $\pi +$ AM; sa moitié sera égale à $\frac{\pi}{2} +$ AN, c'est-à-dire à l'arc AN', dont l'extrémité est celle du rayon ON' perpendiculaire à ON. En prenant la moitié de l'arc AM'

augmenté d'une circonférence, on obtient l'arc AN' augmenté d'une demi-circonférence, c'est-à-dire l'arc AN'_1, dont l'extrémité est diamétralement opposée à l'extrémité N'. Il en résulte évidemment que tous les arcs terminés en M' ont leurs moitiés terminées en N' et en N'_1. Toutes ces moitiés d'arcs ont la même tangente $-A\theta_1 = -\cot\frac{a}{2}$. On a, en effet,

$$\tang AN' = \tang\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}\right).$$

Le triangle rectangle $\theta O \theta_1$ donne d'ailleurs, en valeur absolue,

$$A\theta . A\theta_1 = \overline{OA}^2 = 1,$$

c'est-à-dire

$$A\theta \times (-A\theta_1) = -1.$$

72. Si l'arc a est donné en même temps que sa tangente, le signe de $\tang\frac{a}{2}$ est déterminé, et l'on peut calculer cette quantité sans ambiguïté d'après l'expression (71) :

$$\tang\frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tang^2 a}}{\tang a}.$$

73. 4° *Étant donné* $\cos a$, *trouver* $\cos\frac{a}{3}$.

Prenons la formule (12) du n° 61 :

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

L'arc a étant quelconque, on peut le remplacer dans cette formule par l'arc $\frac{a}{3}$, et l'on obtient l'équation

$$\cos a = 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3}.$$

En posant $\cos a = b$ et $\cos\frac{a}{3} = x$, on voit que la question posée revient à la résolution de l'équation du troisième degré

$$(22) \qquad x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0.$$

L'Algèbre montre (*voir* t. III, *Alg. supér.*) que cette équation a ses trois racines réelles. La Trigonométrie va nous permettre de vérifier ce résultat et de déterminer ces racines.

Tous les arcs qui ont même cosinus que l'arc a étant com-

pris (18) dans les formules

$$2k\pi + a \quad \text{et} \quad 2k\pi - a,$$

on doit chercher les cosinus de tous les tiers de ces arcs, c'est-à-dire de tous les arcs renfermés dans les formules

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{a}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{a}{3}.$$

Comme l'extrémité d'un arc ne change pas par l'addition ou la soustraction d'un nombre quelconque de circonférences et comme les formules précédentes présentent le dénominateur 3, on voit que les seules valeurs distinctes de l'inconnue s'obtiendront en remplaçant successivement k (nombre entier, positif, négatif ou nul) par un multiple quelconque de 3, par un pareil multiple augmenté de 1, par un pareil multiple augmenté de 2.

n étant un entier quelconque, nous substituerons donc à k les valeurs $3n$, $3n+1$, $3n+2$, et nous devrons chercher les cosinus des six arcs

$$2n\pi + \frac{a}{3}, \qquad 2n\pi - \frac{a}{3},$$

$$2n\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad 2n\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3},$$

$$2n\pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad 2n\pi + \frac{4\pi}{3} - \frac{a}{3},$$

ou, en supprimant partout $2n\pi$, des six arcs

$$+\frac{a}{3}, \qquad -\frac{a}{3},$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3},$$

$$\frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} - \frac{a}{3}.$$

Mais, comme on a (42)

$$\cos\left(+\frac{a}{3}\right) = \cos\left(-\frac{a}{3}\right),$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{a}{3}\right),$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3}\right),$$

l'inconnue $\cos\frac{a}{3}$ n'admet en réalité que les trois valeurs

$$\cos\frac{a}{3},\quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right),\quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)$$

ou

$$\cos\frac{a}{3},\quad \cos\left(120^\circ+\frac{a}{3}\right),\quad \cos\left(240^\circ+\frac{a}{3}\right).$$

Telles sont les trois racines réelles de l'équation (22).

74. Prenons dans le cercle trigonométrique (*fig.* 22) $AM=\frac{a}{3}$, et construisons le triangle équilatéral inscrit MNP. L'arc AN sera égal à $120^\circ+\frac{a}{3}$, et l'arc AP à $240^\circ+\frac{a}{3}$. Les trois racines de l'équation (22) seront donc représentées, avec les signes convenables, par les trois perpendiculaires Mm, Nn, Pp, abaissées des sommets du triangle MNP sur le diamètre BB'.

Fig. 22.

On voit aisément que, d'une manière générale, deux de ces perpendiculaires tomberont toujours d'un même côté du diamètre BB' et la troisième de l'autre côté.

D'après l'Algèbre (t. III, *Alg. supér.*), l'équation (22) étant privée de son second terme, la somme de ses racines doit être nulle. La Trigonométrie le montre également. On a, en effet (53),

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{a}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{a}{3},$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{a}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\sin\frac{a}{3}.$$

La somme des trois valeurs de l'inconnue est donc égale à

$$\cos\frac{a}{3}\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\frac{a}{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

c'est-à-dire nulle, puisque l'on a (42, 17, 15, 11)

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=-\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Les trois perpendiculaires Mm, Nn, Pp, prises avec leurs signes, ont donc toujours une somme égale à zéro; ce qui conduit à ce théorème de

Géométrie, qu'on peut évidemment appliquer à un cercle quelconque au lieu du cercle trigonométrique et qu'il est facile d'ailleurs de démontrer directement :

Si des trois sommets d'un triangle équilatéral inscrit on abaisse des perpendiculaires sur un diamètre quelconque du cercle circonscrit, la somme des deux perpendiculaires qui tombent d'un même côté de ce diamètre est égale à la troisième perpendiculaire qui tombe de l'autre côté.

75. Les valeurs absolues des racines de même signe sont représentées, dans le cas de la *fig.* 22, par les perpendiculaires Mm et Pp. Or ces perpendiculaires peuvent être regardées comme les sinus des arcs BM et B'P, dont la somme est $\pi - \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$, puisque MP est le côté du triangle équilatéral inscrit. Les deux arcs BM et B'P étant en général inégaux, l'un est supérieur et l'autre inférieur à $\frac{\pi}{6}$, arc dont le sinus est $\frac{1}{2}$. Par suite, l'une des deux racines Mm et Pp est, en valeur absolue, plus grande que $\frac{1}{2}$, tandis que l'autre est moindre. Quant à la troisième racine Nn, de signe contraire aux deux autres, mais égale à leur somme en valeur absolue, elle est supérieure à $\frac{1}{2}$.

On voit par là que, si l'on donne l'arc a en même temps que $\cos a$, on peut distinguer sans ambiguïté la racine qui représente $\cos\frac{a}{3}$, puisqu'on sait alors d'avance si sa valeur absolue est plus grande ou plus petite que $\frac{1}{2}$ et quel est son signe.

76. Le cas de deux racines égales se déduit immédiatement des considérations précédentes.

Si ces racines sont positives, on doit avoir (*fig.* 22)

$$Mm = Pp = \frac{1}{2};$$

MP est perpendiculaire sur AA' et le sommet N vient en A'. On a, par suite, $\frac{a}{3} = AM = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $a = 180°$, et la troisième racine Nn est égale à -1.

Si les deux racines égales étaient négatives, la *fig.* 22 serait retournée; on aurait évidemment $\frac{a}{3} = 0$ ou $a = 0$, et les trois racines seraient $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $+1$.

77. 5° *Étant donné* $\sin a$, *trouver* $\sin \frac{a}{3}$.

Prenons la formule (11) du n° 61 :

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$$

Si l'on remplace l'arc a par l'arc $\frac{a}{3}$, il vient

$$\sin a = 3 \sin \frac{a}{3} - 4 \sin^3 \frac{a}{3}.$$

En posant $\sin a = b$ et $\sin \frac{a}{3} = x$, on obtient donc l'équation du troisième degré

$$(23) \qquad x^3 - \frac{3}{4} x + \frac{b}{4} = 0,$$

qui ne diffère de l'équation (22) que par le changement de b en $-b$.

Nous allons déterminer trigonométriquement les racines de l'équation (23).

Tous les arcs qui ont même sinus que l'arc a étant compris (12) dans les formules

$$2k\pi + a \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - a,$$

on doit chercher les sinus de tous les tiers de ces arcs, c'est-à-dire de tous les arcs renfermés dans les formules

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{a}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3}.$$

D'après ce qui a été dit au n° 73, on aura toutes les valeurs distinctes de l'inconnue $\sin \frac{a}{3}$, en remplaçant successivement k par les valeurs $3n$, $3n+1$, $3n+2$, où n représente un entier quelconque.

Nous devons donc chercher les sinus des six arcs

$$2n\pi + \frac{a}{3}, \qquad 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3},$$

$$2n\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad 2n\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3},$$

$$2n\pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad 2n\pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3},$$

ou, en supprimant partout $2n\pi$, des six arcs

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3},$$
$$\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad \pi - \frac{a}{3},$$
$$\frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} - \frac{a}{3}.$$

Mais, comme on a (11, 41)

$$\sin\frac{a}{3} = \sin\left(\pi - \frac{a}{3}\right),$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{a}{3}\right),$$
$$\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{a}{3}\right),$$

l'inconnue $\sin\frac{a}{3}$ n'admet en réalité que les trois valeurs

$$\sin\frac{a}{3}, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}\right)$$

ou

$$\sin\frac{a}{3}, \quad \sin\left(120^\circ + \frac{a}{3}\right), \quad \sin\left(240^\circ + \frac{a}{3}\right).$$

Telles sont les trois racines réelles de l'équation (23).

On peut appliquer à la question que nous venons de résoudre les remarques développées aux nos 74, 75, 76; nous ne nous y arrêterons pas.

78. 6° *Étant donnée* tang a, *trouver* tang $\frac{a}{3}$.

Prenons la formule (15) du n° 63.

$$\tang 3a = \frac{3\tang a - \tang^3 a}{1 - 3\tang^2 a}.$$

L'arc a étant quelconque, on peut le remplacer dans cette formule par l'arc $\frac{a}{3}$, et l'on obtient l'équation

$$\tang a = \frac{3\tang\frac{a}{3} - \tang^3\frac{a}{3}}{1 - 3\tang^2\frac{a}{3}}.$$

Si l'on pose $\operatorname{tang} a = b$ et $\operatorname{tang} \frac{a}{3} = x$, il vient

$$b = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

et l'on en déduit l'équation du troisième degré

$$(24) \qquad x^3 - 3bx^2 - 3x + b = 0.$$

Nous allons déterminer trigonométriquement les racines de cette équation.

Tous les arcs qui ont même tangente que l'arc a étant compris (23) dans la formule

$$k\pi + a,$$

on doit chercher les tangentes de tous les tiers de ces arcs, c'est-à-dire de tous les arcs renfermés dans la formule

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{a}{3}.$$

En raisonnant comme au n° 73 et en observant que l'addition ou la soustraction d'un nombre quelconque de demi-circonférences ne modifie pas la tangente d'un arc, on voit que les seules valeurs distinctes de l'inconnue s'obtiendront en remplaçant successivement k par les valeurs $3n$, $3n+1$, $3n+2$, où n représente un entier quelconque. Nous devons donc chercher les tangentes des trois arcs

$$n\pi + \frac{a}{3}, \quad n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad n\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3},$$

ou, en supprimant partout $n\pi$, des trois arcs

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{\pi}{3} + \frac{a}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}.$$

Les trois racines réelles de l'équation (24) sont donc

$$\operatorname{tang}\frac{a}{3}, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{a}{3}\right), \quad \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right)$$

ou

$$\operatorname{tang}\frac{a}{3}, \quad \operatorname{tang}\left(60° + \frac{a}{3}\right), \quad \operatorname{tang}\left(120° + \frac{a}{3}\right).$$

On voit que le cas de deux racines égales ne peut pas se présenter.

79. Si l'on suppose, comme cas particulier, $a = 90°$, on a

$$b = \text{tang}\, a = \infty.$$

Si l'on introduit cette hypothèse dans l'équation (24), mise sous la forme

$$\frac{1}{b}x^3 - 3x^2 - \frac{3}{b}x + 1 = 0,$$

elle s'abaisse au second degré en prenant une racine infinie (t. I, *Alg. élém.*, **241**) et devient

$$-3x^2 + 1 = 0.$$

Les trois racines sont donc alors

$$\infty, \quad +\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Les formules précédentes (78) conduisent aux mêmes résultats. Elles donnent, en effet, pour les trois racines (**27**, **22**),

$$\text{tang}\frac{a}{3} = \text{tang}\, 30° = +\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{tang}\left(60° + \frac{a}{3}\right) = \text{tang}\, 90° = \infty,$$

$$\text{tang}\left(120° + \frac{a}{3}\right) = \text{tang}\, 150° = -\,\text{tang}\, 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

80. Les exemples que nous venons de traiter suffisent pour indiquer la marche à suivre dans les problèmes particuliers relatifs à la division des arcs.

D'une manière générale, m étant un entier quelconque, si l'on veut trouver $\cos\frac{a}{m}$, $\sin\frac{a}{m}$ ou $\text{tang}\frac{a}{m}$, connaissant $\cos a$, $\sin a$ ou $\text{tang}\, a$, il faut commencer par former le développement correspondant de $\cos ma$, de $\sin ma$ ou de $\text{tang}\, ma$, en fonction des mêmes données; puis, remplacer l'arc quelconque a par l'arc $\frac{a}{m}$. On obtient ainsi l'équation dont les racines répondent à la question. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet (t. III, *Alg. supérieure*).

CHAPITRE III.

FORMULES RENDUES CALCULABLES PAR LOGARITHMES ET APPLICATIONS DIVERSES.

Formules rendues calculables par logarithmes.

81. Cherchons à rendre calculable par logarithmes la somme ou la différence de deux rapports trigonométriques.

Des formules

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b,$$

on déduit d'abord, par addition et soustraction,

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b,$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b,$$
$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\sin b.$$

Posons

$$a+b=p,\quad a-b=q,$$

c'est-à-dire

$$a=\frac{p+q}{2}\quad \text{et}\quad b=\frac{p-q}{2}.$$

Il en résulte

$$(25)\quad \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}, \\ \sin p - \sin q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}, \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}, \\ \cos q - \cos p = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Ces formules, d'un usage continuel, permettent de remplacer la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus par un produit de sinus et cosinus.

82. On peut exprimer d'une manière analogue la somme ou la différence d'un sinus et d'un cosinus. On peut écrire, en effet,

$$\cos p \pm \sin q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - p\right) \pm \sin q,$$

ou, d'après les formules qu'on vient de démontrer,

$$(26)\quad \begin{cases} \cos p + \sin q = 2 \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{p-q}{2}\right) \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{p+q}{2}\right), \\ \cos p - \sin q = 2 \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{p-q}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{p+q}{2}\right). \end{cases}$$

83. En divisant deux à deux les formules (25) du n° 81, on obtient encore les formules suivantes :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\tang \dfrac{p+q}{2}}{\tang \dfrac{p-q}{2}},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \tang \frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \tang \frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \cot\frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos q} = \cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}.$$

La première de ces formules, et la plus importante, s'énonce en disant que *la somme des sinus de deux arcs est à la différence des mêmes sinus comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est à la tangente de leur demi-différence.*

En divisant l'une par l'autre les formules (26) du n° 82, on a encore

$$\frac{\cos p + \sin q}{\cos p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)}.$$

84. Passons maintenant aux sommes ou différences de tangentes et cotangentes.

On a

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b},$$

c'est-à-dire

(27) $$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

On a de même

(28) $$\cot a \pm \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} \pm \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b},$$

(29) $$\cot a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\cos a}{\sin a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\cos(a \mp b)}{\sin a \cos b}.$$

Dans les formules qu'on vient d'écrire, on doit prendre parallèlement les signes indiqués dans les deux membres.

85. La différence des carrés de deux sinus ou de deux cosinus peut être rendue calculable par logarithmes comme il suit.

En multipliant entre elles les valeurs de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$, on trouve (t. I, *Alg. élém.*, 30)

$$\begin{aligned}\sin(a+b)\sin(a-b) &= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b \\ &= (1-\sin^2 b)\sin^2 a - (1-\sin^2 a)\sin^2 b \\ &= (1-\cos^2 a)\cos^2 b - (1-\cos^2 b)\cos^2 a.\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve finalement

(30) $\sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a = \sin(a+b)\sin(a-b)$.

86. Proposons-nous maintenant de rendre calculable par logarithmes une expression binôme de la forme

$$x = a \pm b,$$

où a et b sont des nombres positifs quelconques.

On peut écrire

$$x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$$

et poser, puisqu'il y a des tangentes de toutes les grandeurs (25),

$$\frac{b}{a} = \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

c'est-à-dire

$$x = a\left(1 \pm \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{a}{\cos\varphi}(\cos\varphi \pm \sin\varphi).$$

Mais, d'après les formules (26) du n° 82, on a, en y faisant $p = q = \varphi$,

$$\cos\varphi + \sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 2\sin 45^\circ \cos(45^\circ - \varphi),$$

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 2\cos 45^\circ \sin(45^\circ - \varphi).$$

Or (11, 17, 8)

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(45^\circ - \varphi) = \cos(45^\circ + \varphi).$$

Il vient donc

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi = \sqrt{2}\cos(45^\circ \mp \varphi)$$

et, par suite,

(31) $$x = a \pm b = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\varphi}\cos(45^\circ \mp \varphi).$$

Dans ces formules, on doit prendre parallèlement les signes indiqués dans les deux membres.

On peut opérer autrement, en séparant les signes.

Prenons d'abord

$$x = a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

et posons

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang}^2\varphi.$$

Il vient immédiatement (36, 7)

$$x = a + b = a(1 + \operatorname{tang}^2\varphi) = a\operatorname{séc}^2\varphi = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Soit maintenant

$$x = a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right),$$

et supposons $a > b$. Puisque $\frac{b}{a}$ est moindre que l'unité (14), nous pourrons poser

$$\frac{b}{a} = \sin^2\varphi,$$

d'où

$$x = a - b = a(1 - \sin^2\varphi) = a\cos^2\varphi.$$

Si, dans ce dernier cas, a était moindre que b, on calculerait directement

$$x_1 = -x = b - a.$$

87. Les procédés qu'on vient d'indiquer permettent de réduire à un monôme toute expression polynôme de la forme

$$x = a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots.$$

A l'aide d'un premier arc auxiliaire, on remplace les deux premiers termes du polynôme par un seul; un deuxième arc auxiliaire permet de diminuer encore d'une unité le nombre des termes restants, et l'on continue ainsi, jusqu'à ce que la valeur de x se trouve exprimée par un monôme.

Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

88. Nous voulons résoudre trigonométriquement l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dont les racines sont données par la formule (t. I, *Alg. élém.*, 232)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Supposons d'abord les racines *réelles*, c'est-à-dire $b^2 - 4ac > 0$; nous aurons trois cas à distinguer, suivant que c sera positif, négatif ou nul. a est supposé positif.

1° $c > 0$.

Nous pouvons écrire la valeur de x de la manière suivante :

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right).$$

En vertu de la condition $b^2 - 4ac > 0$, la quantité $\frac{4ac}{b^2}$, qui est positive, est aussi moindre que l'unité. On peut donc poser

$$\frac{4ac}{b^2} = \sin^2\varphi,$$

et il en résulte

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp \cos\varphi),$$

c'est-à-dire, en séparant les deux racines x_1 et x_2 et en appliquant les formules du n° 66,

$$x_1 = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

2° $c < 0$.

La condition de réalité des racines est alors remplie d'elle-même, et c'est la quantité $-\frac{4ac}{b^2}$ qui est positive. Nous poserons donc

$$-\frac{4ac}{b^2} = \text{tang}^2\varphi.$$

Il en résulte

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp \text{séc}\,\varphi) = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right),$$

c'est-à-dire, en séparant les deux racines x_1 et x_2 et en appliquant les mêmes formules que dans le cas précédent,

$$x_1 = -\frac{b}{2a}\,\frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi} = \frac{b}{a}\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi},$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a}\,\frac{\cos\varphi + 1}{\cos\varphi} = -\frac{b}{a}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

3° $c = 0$.

On a immédiatement

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

89. Si les racines de l'équation proposée sont *imaginaires*, on a $b^2 - 4ac < 0$, d'où l'on déduit $\frac{4ac}{b^2} > 1$. On peut donc poser

$$\frac{4ac}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

D'ailleurs, on peut mettre la valeur de x sous la forme

$$x = -\frac{b}{2a}\left[1 \mp \sqrt{-\left(\frac{4ac}{b^2} - 1\right)}\right].$$

La quantité $\frac{4ac}{b^2} - 1$ revient, d'après ce qui précède, à

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tang}^2\varphi.$$

Par suite,

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{-\operatorname{tang}^2\varphi}\right),$$

ou encore (t. I, *Alg. élém.*, **223**, **237**),

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp i \operatorname{tang}\varphi).$$

Sommation des sinus ou des cosinus d'une série d'arcs en progression arithmétique.

90. Soient m arcs en progression arithmétique

$$a, \quad a + h, \quad a + 2h, \quad \ldots, \quad a + (m-1)h.$$

Cherchons d'abord *la somme de leurs sinus*.

On a (81) la formule (25)

$$\cos\left[a + \frac{(2k-1)h}{2}\right] - \cos\left[a + \frac{(2k+1)h}{2}\right] = 2\sin\frac{h}{2}\sin(a + kh);$$

si l'on y remplace successivement l'entier k par les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots$,

$m-1$, on obtient les égalités

$$\cos\left(a-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)=2\sin\frac{h}{2}\sin a,$$

$$\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)=2\sin\frac{h}{2}\sin(a+h),$$

$$\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{5h}{2}\right)=2\sin\frac{h}{2}\sin(a+2h),$$

$$\cos\left(a+\frac{5h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{7h}{2}\right)=2\sin\frac{h}{2}\sin(a+3h),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\cos\left[a+\frac{(2m-3)h}{2}\right]-\cos\left[a+\frac{(2m-1)h}{2}\right]=2\sin\frac{h}{2}\sin[a+(m-1)h].$$

En ajoutant toutes ces égalités membre à membre et en désignant la somme cherchée par $\Sigma\sin$, on déduit évidemment de l'égalité résultante

$$\Sigma\sin=\frac{\cos\left(a-\frac{h}{2}\right)-\cos\left[a+\frac{(2m-1)h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}}$$

ou, en rendant le numérateur de l'expression calculable par logarithmes (81),

(32) $$\Sigma\sin=\frac{\sin\frac{mh}{2}\sin\left[a+\frac{(m-1)h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Cherchons maintenant *la somme des cosinus* des mêmes arcs.

Pour avoir cette somme, que nous désignerons par $\Sigma\cos$, il suffit de remplacer dans la formule (32) a par $\frac{\pi}{2}-a$ et h par $-h$.

En effet, le premier membre de cette formule devient ainsi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a-h\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a-2h\right)+\ldots$$
$$+\sin\left[\frac{\pi}{2}-a-(m-1)h\right],$$

c'est-à-dire (8)

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos[a+(m-1)h].$$

On a donc

$$\Sigma\cos=\frac{\sin\left(-\frac{mh}{2}\right)\sin\left[\frac{\pi}{2}-a-\frac{(m-1)h}{2}\right]}{\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}$$

ou, en changeant les signes (13) des deux termes de l'expression trouvée,

$$(33)\qquad \Sigma \cos = \frac{\sin \frac{mh}{2} \cos\left[a + \frac{(m-1)h}{2}\right]}{\sin \frac{h}{2}}.$$

91. En divisant membre à membre les égalités (32) et (33), on a

$$\frac{\Sigma \sin}{\Sigma \cos} = \frac{\sin\left[a + \frac{(m-1)h}{2}\right]}{\cos\left[a + \frac{(m-1)h}{2}\right]} = \text{tang}\left[a + \frac{(m-1)h}{2}\right].$$

Le rapport des deux sommes est donc représenté par la tangente de la moyenne des deux arcs extrêmes de la série donnée.

92. La somme des m arcs considérés (t. I, *Alg. élém.*, 329) est égale à

$$\frac{[2a + (m-1)h]m}{2}.$$

Si cette somme est égale à 2π,

$$2a + (m-1)h = \frac{4\pi}{m}, \quad \text{d'où} \quad a + \frac{(m-1)h}{2} = \frac{2\pi}{m}.$$

On a donc, dans cette hypothèse (90),

$$\Sigma \sin = \frac{\sin \frac{mh}{2} \sin \frac{2\pi}{m}}{\sin \frac{h}{2}}, \quad \Sigma \cos = \frac{\sin \frac{mh}{2} \cos \frac{2\pi}{m}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

Le rapport des deux sommes est alors égal à $\text{tang} \frac{2\pi}{m}$.

93. Pour que les extrémités des m arcs qui composent la progression arithmétique donnée déterminent un polygone régulier de m côtés, il faut que le plus grand de tous, augmenté de h, soit égal au plus petit, augmenté de 2π. En effet, les arcs successifs diffèrent tous de h. On a donc l'équation de condition

$$a + mh = a + 2\pi,$$

d'où

$$\frac{mh}{2} = \pi.$$

On a alors, d'après les formules générales du n° 90,

$$\Sigma \sin = \Sigma \cos = 0.$$

Mais la somme des sinus ou des cosinus des arcs considérés représente alors, en tenant compte des signes, la somme des perpendiculaires abaissées des sommets du polygone régulier déterminé, sur le diamètre qui passe par l'origine ou sur le diamètre perpendiculaire. L'origine étant d'ailleurs arbitraire, on peut énoncer ce théorème, qui généralise la propriété démontrée précédemment à l'égard du triangle équilatéral inscrit (74) :

La somme des perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone régulier inscrit sur un diamètre quelconque du cercle circonscrit est toujours nulle, lorsqu'on affecte de signes contraires les perpendiculaires qui tombent de côtés différents de ce diamètre.

Formules relatives aux rapports trigonométriques de trois arcs dont la somme est égale à 180°.

94. Lorsque la somme de trois arcs est égale à 180°, leurs rapports trigonométriques sont liés par un grand nombre de formules remarquables. Nous allons, comme utile exercice, en démontrer quelques-unes.

Nous désignerons les trois arcs considérés, supposés exprimés en degrés, par a, b, c, et nous admettrons la relation

$$a + b + c = 180^\circ.$$

95. 1° *La somme des tangentes des arcs a, b, c, est égale au produit de ces mêmes tangentes.*

Nous avons en effet, d'une manière générale (57),

$$\operatorname{tang}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tang}a + \operatorname{tang}b + \operatorname{tang}c - \operatorname{tang}a \operatorname{tang}b \operatorname{tang}c}{1 - \operatorname{tang}a \operatorname{tang}b - \operatorname{tang}a \operatorname{tang}c - \operatorname{tang}b \operatorname{tang}c}.$$

Si $a + b + c = 180^\circ$, on doit avoir $\operatorname{tang}(a+b+c) = 0$, c'est-à-dire précisément

$$\operatorname{tang}a + \operatorname{tang}b + \operatorname{tang}c = \operatorname{tang}a \operatorname{tang}b \operatorname{tang}c.$$

96. 2° *La somme des produits deux à deux des cotangentes des arcs a, b, c, est égale à l'unité.*

Nous avons en effet, d'une manière générale (57),

$$\cot(a+b+c) \frac{\cot a \cot b \cot c - \cot a - \cot b - \cot c}{\cot a \cot b + \cot a \cot c + \cot b \cot c - 1}.$$

Si $a + b + c = 180^\circ$, on doit avoir $\cot(a+b+c) = \infty$, c'est-à-dire précisément

$$\cot a \cot b + \cot a \cot c + \cot b \cot c = 1.$$

97. 3° *La somme des sinus des arcs a, b, c, est égale au quadruple produit des cosinus des arcs $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$.*

La somme des arcs a, b, c, étant égale à 180°, l'arc a et l'arc $(b+c)$ sont supplémentaires. On a donc (11)

$$\sin a = \sin(b+c),$$

et, par suite,

$$\sin a + \sin b + \sin c = \sin(b+c) + \sin b + \sin c.$$

Mais (59, 81),

$$\sin(b+c) = 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}, \quad \sin b + \sin c = 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}.$$

On peut donc écrire

$$\sin a + \sin b + \sin c = 2\sin\frac{b+c}{2}\left(\cos\frac{b+c}{2} + \cos\frac{b-c}{2}\right).$$

D'ailleurs, les arcs a et $(b+c)$ étant supplémentaires, leurs moitiés sont complémentaires, et l'on a (8)

$$\sin\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}.$$

De plus (81),

$$\cos\frac{b+c}{2} + \cos\frac{b-c}{2} = 2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Il vient donc finalement

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

98. 4° *La somme des carrés des cosinus des arcs a, b, c, plus le double produit de ces mêmes cosinus, est égale à l'unité.*

En vertu des propriétés des arcs supplémentaires, on a (17)

$$\cos a = -\cos(b+c) \quad \text{ou} \quad \cos^2 a = \cos^2(b+c),$$

c'est-à-dire (53)

$$\cos^2 a = \cos^2 b\cos^2 c - 2\cos b\cos c\sin b\sin c + \sin^2 b\sin^2 c.$$

Remplaçons $\sin^2 b$ et $\sin^2 c$ par $1-\cos^2 b$ et $1-\cos^2 c$; il viendra, en effectuant et en simplifiant,

$$\cos^2 a = 2\cos^2 b\cos^2 c - 2\cos b\cos c\sin b\sin c - \cos^2 b - \cos^2 c + 1,$$

ou

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos b\cos c(\cos b\cos c - \sin b\sin c) = 1.$$

Mais (53)

$$\cos b \cos c - \sin b \sin c = \cos(b+c) = -\cos a.$$

On a donc finalement

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1.$$

99. 5° *La somme des sinus des arcs $2a$, $2b$, $2c$, est égale au quadruple produit des sinus des arcs a, b, c.*

On a d'abord (81)

$$\sin 2a + \sin 2b = 2\sin(a+b)\cos(a-b).$$

De plus,

$$2a + 2b + 2c = 360°,$$

et il en résulte (13, 59),

$$\sin 2c = -\sin(2a+2b) = -2\sin(a+b)\cos(a+b).$$

Par suite,

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 2\sin(a+b)[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

Mais on a à la fois (11, 81)

$$\sin(a+b) = \sin c \quad \text{et} \quad \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b.$$

Il vient donc finalement

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4\sin a \sin b \sin c.$$

100. 6° *La somme des carrés des sinus des arcs $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, plus le double produit de ces mêmes sinus, est égale à l'unité.*

Les arcs a et $(b+c)$ étant supplémentaires, leurs moitiés sont complémentaires, et l'on a (53),

$$\cos\frac{a}{2} = \sin\frac{b+c}{2} = \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2},$$

c'est-à-dire, en élevant au carré et en remplaçant $\cos^2\frac{a}{2}$ par $1 - \sin^2\frac{a}{2}$,

$$1 - \sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} + 2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}.$$

Remplaçons $\cos^2\frac{b}{2}$ et $\cos^2\frac{c}{2}$ par $1 - \sin^2\frac{b}{2}$ et $1 - \sin^2\frac{c}{2}$; nous aurons,

en effectuant, en simplifiant et en renversant l'ordre des deux membres,

$$\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}+\sin^2\frac{c}{2}+2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)=1.$$

Mais (53)

$$\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=\cos\frac{b+c}{2}=\sin\frac{a}{2},$$

et l'on trouve finalement

$$\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}+\sin^2\frac{c}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=1.$$

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION ET USAGE DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

Notions et théorèmes préliminaires.

101. Pour que les rapports trigonométriques puissent être utilisés, il faut nécessairement avoir à sa disposition une Table dans laquelle on trouve, en face du nombre de degrés d'un angle ou d'un arc, les valeurs des rapports trigonométriques de cet angle ou de cet arc, ou mieux les valeurs des logarithmes de ces mêmes rapports.

Les angles ou les arcs considérés peuvent atteindre un nombre quelconque de degrés (4); mais il suffit que la Table s'étende de 0° à 90°.

En effet, comme nous l'avons vu en traitant de la *réduction d'un arc au premier quadrant* (33), on peut toujours déterminer un arc plus petit que 90° et ayant, sauf les signes, les mêmes rapports trigonométriques que l'arc donné, supposé plus grand que 90°.

La Table doit aller jusqu'à 90°; mais elle n'a besoin d'être calculée que jusqu'à 45°, car on a, en vertu des propriétés des arcs complémentaires (8),

$$\sin(45° + a) = \cos(45° - a),$$
$$\cos(45° + a) = \sin(45° - a),$$
$$\tang(45° + a) = \cot(45° - a).$$

En faisant varier dans ces formules a de 0° à 45°, les résultats obtenus de 0° à 45° se trouveront immédiatement applicables de 45° à 90°.

Une fois qu'on aura calculé les logarithmes des sinus et des

cosinus des angles ou des arcs compris dans la Table, la relation

$$\tang a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

permettra d'écrire

$$\log \tang a = \log \sin a - \log \cos a.$$

De même, de la formule

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a},$$

on déduira

$$\log \cot a = - \log \tang a.$$

On n'écrit pas en général, dans la Table, les logarithmes des sécantes et des cosécantes. On a d'ailleurs

$$\operatorname{séc} a = \frac{1}{\cos a} \quad \text{ou} \quad \log \operatorname{séc} a = - \log \cos a$$

et

$$\operatorname{coséc} a = \frac{1}{\sin a.} \quad \text{ou} \quad \log \operatorname{coséc} a = - \log \sin a.$$

102. Nous allons montrer, non pas comment on calculerait aujourd'hui en réalité une Table renfermant les logarithmes des rapports trigonométriques, mais comment on a calculé cette Table dans le principe à l'aide d'une méthode élémentaire.

L'exposition de cette méthode repose sur quelques propositions préliminaires, d'ailleurs indispensables à connaître. Nous allons les établir.

Dans ce qui suit, nous supposons expressément que les arcs considérés font partie du cercle trigonométrique et qu'ils sont compris entre 0° et 90°.

103. I. *Un arc, plus petit que 90°, est toujours compris entre son sinus et sa tangente.*

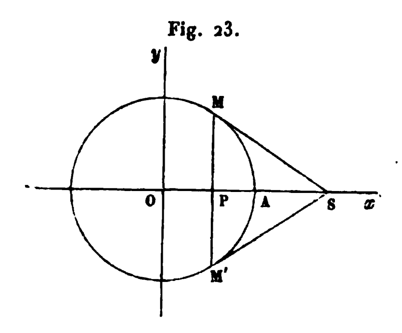
Soit l'arc AM $= a$ (*fig.* 23), dont le sinus est représenté par la perpendiculaire MP (8). Si l'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'en M', l'arc MM' est égal à $2a$. Si l'on mène, en M et en M', les tangentes au cercle trigonométrique, ces tangentes se croiseront au point S, et l'on aura

$$\text{MS} = \text{M'S} = \tang a.$$

On peut alors écrire immédiatement (*Géom.*, 224, 225)

$$MM' < \text{arc}\, MAM' < MS + M'S$$

Fig. 23.



ou, en divisant par 2 tous les termes considérés,

$$\sin a < a < \text{tang}\, a.$$

104. II. *Quand un arc décroît de $\frac{\pi}{2}$ à o, le rapport de cet arc à son sinus va constamment en décroissant et a pour limite l'unité quand l'arc devient nul.*

Comparons l'arc $(a+b)$ à l'arc a. Il s'agit d'abord de vérifier l'inégalité

$$\frac{a}{\sin a} < \frac{a+b}{\sin(a+b)},$$

c'est-à-dire en chassant les dénominateurs positifs et en transposant (t. I, *Alg. élém.*, 215),

$$a \sin(a+b) - (a+b)\sin a < 0.$$

En remplaçant $\sin(a+b)$ par sa valeur (53), cette dernière inégalité revient à

$$a \sin a \cos b + a \cos a \sin b - a \sin a - b \sin a < 0$$

ou à

$$a \sin a (\cos b - 1) + a \cos a \sin b - b \sin a < 0.$$

Or $\cos b$ étant moindre que 1, le premier terme du premier membre est nécessairement négatif, et il suffit de prouver qu'on a toujours

$$a \cos a \sin b - b \sin a < 0,$$

ou, en divisant par le facteur positif $\cos a$,

$$a \sin b - b \tang a < 0;$$

ce qui est évident, puisqu'on a à la fois

$$a < \tang a \quad \text{et} \quad \sin b < b.$$

Reprenons maintenant la relation qui exprime le théorème I (103) :

$$\sin a < a < \tang a.$$

En remplaçant $\tang a$ par $\frac{\sin a}{\cos a}$ et en divisant tout par $\sin a$, il vient

$$1 < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}.$$

Or, si a tend vers 0, $\cos a$ tend vers 1 en restant inférieur à 1. Le rapport $\frac{a}{\sin a}$ est donc toujours compris entre l'unité et un rapport supérieur à 1, mais tendant indéfiniment vers 1 lorsque a diminue, et atteignant cette valeur pour $a = 0$. On a donc rigoureusement à la limite

$$\lim \frac{a}{\sin a} \text{ (pour } a = 0) = 1;$$

il en résulte évidemment

$$\lim \frac{\sin a}{a} \text{ (pour } a = 0) = 1.$$

Comme on peut écrire

$$\frac{\tang a}{a} = \frac{\sin a}{a} \frac{a}{\cos a},$$

et que la limite d'un produit est égale au produit des limites des facteurs (*Géom.*, 217), on a de même

$$\lim \frac{\tang a}{a} \text{ (pour } a = 0) = 1,$$

$$\lim \frac{a}{\tang a} \text{ (pour } a = 0) = 1.$$

105. III. *La différence entre un arc et son sinus est moindre que le quart du cube de l'arc.*

Le théorème I (103) donne

$$\frac{a}{2} < \left(\tang\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right).$$

Multiplions les deux membres de l'inégalité par la quantité positive $2\cos^2\frac{a}{2}$. Nous aurons

$$a\cos^2\frac{a}{2} < \left(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a\right).$$

En substituant alors $1 - \sin^2\frac{a}{2}$ à la place de $\cos^2\frac{a}{2}$ et en effectuant, il vient

$$a - a\sin^2\frac{a}{2} < \sin a.$$

Mais l'inégalité subsistera *a fortiori* dans le même sens, si l'on remplace $\sin\frac{a}{2}$ par la quantité plus grande $\frac{a}{2}$. On a ainsi

$$a - \frac{a^3}{4} < \sin a$$

ou, en transposant,

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4}.$$

Ce théorème, combiné avec le théorème I (103), donne pour $\sin a$ deux limites, l'une supérieure, l'autre inférieure. On déduit, en effet, de ce qui précède,

$$a > \sin a > a - \frac{a^3}{4}.$$

106. IV. *Le cosinus d'un arc est compris entre l'excès de l'unité sur la moitié du carré de l'arc et cet excès augmenté du seizième de la quatrième puissance de l'arc.*

On a la formule (59),

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}.$$

Si l'on y remplace $\sin\frac{a}{2}$ par sa limite supérieure $\frac{a}{2}$ (105), il

vient évidemment

$$\cos a > 1 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \cos a > 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Si l'on remplace, dans la même formule, $\sin\frac{a}{2}$ par sa limit inférieure (**105**)

$$\frac{a}{2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2} - \frac{a^3}{32},$$

il vient évidemment

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2,$$

ou, en effectuant,

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{a^6}{512}.$$

Cette dernière inégalité subsiste *a fortiori* si l'on néglige l dernier terme du second membre, qui est négatif. En réunis sant les résultats obtenus, l'on peut donc écrire

$$1 - \frac{a^2}{2} < \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}.$$

107. Comme nous le verrons plus tard (*Algèbre supérieur* t. III), on peut indiquer, pour le sinus et le cosinus d'un ar compris entre 0° et 90°, des limites plus resserrées que le précédentes (**105, 106**); mais celles-ci suffisent pour l'obje que nous avons en vue.

Calcul du sinus et du cosinus de l'arc de 10 secondes.

108. Nous avons trouvé (**105**)

$$a > \sin a > a - \frac{a^3}{4}.$$

La demi-circonférence π renferme 648000″. On a donc

$$\text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0{,}00004\,84813\,68110\ldots.$$

Cette valeur représente *une limite supérieure* de sin 10″.

On peut écrire d'ailleurs

$$\text{arc } 10'' < 0{,}00005$$

et, par suite,

$$\frac{(\text{arc}\,10'')^3}{4} < 0,00000\,00000\,00031\ldots.$$

Il en résulte

$$\text{arc}\,10'' - \frac{(\text{arc}\,10'')^3}{4} > 0,00004\,84813\,68110 - 0,00000\,00000\,00031,$$

c'est-à-dire

$$\text{arc}\,10'' - \frac{(\text{arc}\,10'')^3}{4} > 0,00004\,84813\,68079\ldots.$$

Mais le premier membre de cette dernière inégalité représente *une limite inférieure* de $\sin 10''$; $\sin 10''$ tombe donc entre deux expressions qui ne diffèrent qu'à partir de la treizième décimale, et l'on peut poser évidemment, à moins d'une demi-unité du treizième ordre décimal,

$$\sin 10'' = 0,00004\,84813\,681.$$

109. Nous avons trouvé (**107**)

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}.$$

Si a désigne l'arc de $10''$, c'est-à-dire si l'on suppose a inférieur à $0,00005$, on a

$$\frac{a^4}{16} < \frac{5^4}{16.10^{20}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^4}{16} < \frac{1}{16^2.10^{16}},$$

inégalité qu'on peut encore écrire *a fortiori*

$$\frac{a^4}{16} < \frac{1}{2.10^{18}}.$$

Par conséquent, les deux limites de $\cos a$ diffèrent de moins d'une demi-unité du dix-huitième ordre décimal : il suffit donc de calculer la première de ces deux limites. Si l'on s'arrête à la treizième décimale, on obtient

$$\cos 10'' = 0,99999\,99988\,248.$$

Formules de Th. Simpson.

110. Il est facile maintenant de calculer, de $10''$ en $10''$, les sinus et les cosinus de tous les arcs compris entre $0°$ et $45°$. Prenons les formules

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b.$$

Posons

$$a=mb;$$

il viendra, en isolant $\sin(m+1)b$ et $\cos(m+1)b$,

$$\sin(m+1)b=2\sin mb.\cos b-\sin(m-1)b,$$
$$\cos(m+1)b=2\cos mb.\cos b-\cos(m-1)b.$$

Telles sont les *formules de Thomas Simpson.*

Pour résoudre le problème indiqué, on n'a qu'à faire dans ces formules $b=10''$ et à donner successivement à m toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à 16 200, nombre de fois que l'arc de $45°$ contient l'arc de $10''$. Si l'on fait $m=1, 2, 3, \ldots$, il vient

$$\sin 20''=2\sin 10''\cos 10'',$$
$$\cos 20''=2\cos^2 10''-1,$$
$$\sin 30''=2\sin 20''\cos 10''-\sin 10'',$$
$$\cos 30''=2\cos 20''\cos 10''-\cos 10'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces calculs, qui se poursuivent ainsi de proche en proche, sont très simples, mais très laborieux. On peut les abréger à l'aide de la remarque suivante.

Le multiplicateur constant $2\cos 10''$, qui entre dans toutes les égalités qu'on doit traiter, est très peu différent de 2 et contient beaucoup de chiffres significatifs. Si l'on représente par k la différence $2-2\cos 10''$, k comprend, au contraire, très peu de chiffres significatifs. On a, en effet (109),

$$k=2-2\cos 10''=2-1{,}99999\,99976\,496$$

ou

$$k=0{,}00000\,00023\,504.$$

k étant calculé, on peut remplacer, dans les formules de Simpson, $2\cos 10''$ par $2-k$, et les écrire comme il suit, en mettant en évidence les différences des sinus ou des cosinus successifs :

$$[\sin(m+1)b-\sin mb]=[\sin mb-\sin(m-1)b]-k\sin mb,$$
$$[\cos(m+1)b-\cos mb]=[\cos mb-\cos(m-1)b]-k\cos mb.$$

Si l'on a soin de dresser préalablement le Tableau des neuf premiers multiples du nombre auxiliaire k, on voit que les formules ainsi préparées réduiront l'ensemble des calculs à de simples additions et soustractions.

111. Quand on est parvenu au sinus et au cosinus de l'arc de $30°$ à l'aide des formules de Th. Simpson, on peut se servir de formules moins compliquées pour continuer les calculs depuis l'arc de $30°$ jusqu'à celui de $45°$.

On a, en effet (81),

$$\sin(30°+x)+\sin(30°-x)=2\sin 30°\cos x=\cos x,$$
$$\cos(30°-x)-\cos(30°+x)=2\sin 30°\sin x=\sin x,$$

en se rappelant que $\sin 30°=\frac{1}{2}\cdot$ Il vient donc

$$\sin(30°+x)=\cos x-\sin(30°-x),$$
$$\cos(30°+x)=\cos(30°-x)-\sin x.$$

En faisant varier x de $10''$ en $10''$, de $0°$ à $15°$, les formules qu'on vient d'écrire donneront de même les sinus et les cosinus des arcs compris entre $30°$ et $45°$, par de simples soustractions.

112. Les développements qui précèdent montrent comment on a pu effectivement construire une Table des sinus et des cosinus de tous les arcs variant de $10''$ en $10''$, depuis $0°$ jusqu'à $45°$, et en déduire les logarithmes de ces rapports trigonométriques. Mais, dans de pareils calculs, on doit craindre l'accumulation prolongée des erreurs. La question a été étudiée d'abord par A.-J.-H. Vincent. M. J.-A. Serret a prouvé depuis qu'en partant des valeurs de $\sin 10''$ et $\cos 10''$ calculées, comme nous l'avons fait, à une demi-unité près du treizième ordre décimal, il suffisait de conserver dix-sept décimales dans les

valeurs de tous les autres sinus et cosinus pour être assuré de pouvoir compter sur *huit* décimales exactes dans tous les résultats obtenus, jusqu'à l'achèvement de la Table.

Sans insister sur ce point, nous nous contenterons de remarquer qu'on a un moyen bien simple de soumettre les calculs effectués aux vérifications nécessaires.

On peut, en effet, déterminer par de simples extractions de racines carrées et, par conséquent, avec une approximation quelconque, les rapports trigonométriques d'autant d'arcs qu'on veut, compris entre 0° et 90°.

En comparant les résultats ainsi trouvés directement, et qui constituent ce qu'on peut appeler des *points de repère*, avec ceux qui résultent de l'emploi des formules générales, on est à même de vérifier à chaque instant les nombres inscrits dans la Table et leur degré d'approximation.

Avant de décrire les Tables trigonométriques et d'en indiquer le maniement, nous allons nous arrêter sur la détermination de ces points de repère, en nombre aussi grand qu'on le jugera utile.

Points de repère.

113. Nous avons donné en Géométrie l'inscription des polygones réguliers de 4, 3, 5 et 15 côtés, et nous avons vu comment on en déduisait les séries de polygones réguliers dont les nombres de côtés sont représentés par les formules $2^n, 3\times 2^n, 5\times 2^n, 3\times 5\times 2^n$, n étant un entier positif quelconque (*Géom.*, 204, 205, 206, 208). Or *le sinus d'un arc, dans le cercle trigonométrique, est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double;* si cette corde est le côté connu d'un certain polygone régulier, on a donc immédiatement le sinus et, par suite, le cosinus de l'arc moitié de celui qui correspond à ce côté. Les formules relatives à la bissection des arcs et à leur multiplication permettent de tirer de ces premiers résultats une série indéfinie d'autres points de repère.

114. *Carré inscrit.* — Partons du carré inscrit dont le côté, égal à $\sqrt{2}$, répond à l'arc $\frac{2\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2}$. On a d'abord (**113**)

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les formules 17 et 18 du n° 66,

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\quad \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

permettent ensuite d'écrire

$$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\qquad \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

. . . .

On peut donc calculer directement, par de simples extractions de racines carrées, les sinus et cosinus de tous les arcs compris dans la formule $\frac{\pi}{2^n}$ et, en employant ensuite les formules relatives à la multiplication des arcs (59 et suiv.), les sinus et cosinus de tous les arcs compris dans la formule plus générale $\frac{m\pi}{2^n}$, où m est aussi un entier positif quelconque.

115. *Triangle équilatéral inscrit.* — Partons du triangle équilatéral inscrit, dont le côté, égal à $\sqrt{3}$, répond à l'arc $\frac{2\pi}{3}$. On a d'abord

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad \cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2};$$

puis, par les formules de bissection,

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\qquad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},\qquad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2},$$

. . . .

On peut calculer ainsi, par de simples extractions de ra-

cines carrées, les sinus et cosinus des arcs compris dans la formule $\frac{m\pi}{3.2^n}$.

116. *Décagone régulier inscrit.* — Partons du décagone régulier inscrit convexe, dont le côté, égal à $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, répond à l'arc $\frac{2\pi}{10}$ ou $\frac{\pi}{5}$. On a d'abord

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

On peut ensuite, en partant de ces deux valeurs, calculer, par de simples extractions de racines carrées, les sinus et cosinus de tous les arcs compris dans la formule $\frac{m\pi}{5.2^n}$.

117. *Pentédécagone régulier inscrit.* — Partons du pentédécagone régulier inscrit convexe, dont le côté, égal à

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right),$$

répond à l'arc $\frac{2\pi}{15}$. On a d'abord

$$\sin\frac{\pi}{15} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right).$$

On pourrait calculer $\cos\frac{\pi}{15}$ par la formule

$$\cos\frac{\pi}{15} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{15}};$$

mais il est plus simple de se rappeler (*Géom.*, 208) que

$$\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}.$$

Il en résulte

$$\cos\frac{\pi}{15} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10},$$

c'est-à-dire, d'après les résultats précédents,

$$\cos\frac{\pi}{15} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right).$$

En partant des valeurs de $\sin\frac{\pi}{15}$ et $\cos\frac{\pi}{15}$, on peut calculer, par de simples extractions de racines carrées, les sinus et cosinus de tous les arcs compris dans la formule $\frac{m\pi}{3 \times 5 \times 2^n}$.

118. Pour terminer, nous allons calculer les sinus et cosinus de tous les arcs multiples de 9° ou de $\frac{\pi}{20}$, compris entre 0° et 90°.

Nous avons déjà trouvé (**114**, **116**)

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Nous savons, de plus, qu'on a (8)

$$\sin 72^\circ = \cos 18^\circ, \quad \cos 72^\circ = \sin 18^\circ.$$

$\sin 36^\circ$ et $\cos 36^\circ$ seront donnés par les formules (59)

$$\cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

et l'on a, en outre,

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ, \quad \cos 54^\circ = \sin 36^\circ.$$

Les formules du n° 68 et la remarque du n° 69 permettent, d'ailleurs, d'écrire

$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin 18^\circ} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin 18^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}},$$

$$\cos 9^\circ = \sin 81^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin 18^\circ} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin 18^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}},$$

$$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 54^\circ} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 54^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\cos 27^\circ = \sin 63^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 54^\circ} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 54^\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

En résumé, on obtiendra donc le Tableau suivant :

$$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0,$$
$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$
$$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$
$$\sin 63^\circ = \cos 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$
$$\sin 81^\circ = \cos 9^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1.$$

Disposition des Tables trigonométriques.

119. Parmi les meilleures Tables trigonométriques, on peut citer celles de Schrön (édition française), très bien conçues et très bien exécutées. Nous allons en indiquer la disposition et l'usage, comme nous l'avons fait précédemment (t. I, *Alg. élém.*, 363 et suiv.) pour la Table des logarithmes des nombres, qu'elles complètent.

120. Les Tables, que nous allons décrire, vont de la page 204 à la page 475 du Recueil de Schrön. Elles donnent, de dix secondes en dix secondes et avec sept décimales, les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes des arcs compris entre 0° et 90°.

D'après les propriétés des arcs complémentaires (8), les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes des arcs qui vont de 0° à 45°, sont en même temps les logarithmes des cosinus, sinus, cotangentes et tangentes des arcs qui vont de 90° à 45°. Aux titres *sinus*, *cosinus*, *tangentes* et *cotangentes*, placés en haut des différentes colonnes, correspondent donc les titres *cosinus*, *sinus*, *cotangentes* et *tangentes*, placés en bas de ces mêmes colonnes.

De 0° à 44°, le nombre de degrés de l'arc est indiqué *en haut des pages*, hors du cadre; de 45° à 89°, il est indiqué *en bas des pages*, hors du cadre.

De 0° à 44°, les minutes de l'arc sont marquées, pour chaque page, dans la *première colonne à gauche* et, d'une minute à l'autre, les dizaines de secondes de l'arc sont marquées dans la colonne *contiguë*. On suit alors ces colonnes *en descendant*. De 45° à 89°, les minutes de l'arc sont marquées, pour chaque page, dans la *dernière colonne à droite* et, d'une minute à l'autre, les dizaines de secondes de l'arc sont marquées dans la colonne *précédente*. On suit alors ces colonnes *en remontant*.

Six pages répondent à l'intervalle de 1°, avec répétition du dernier nombre de minutes ou de la dernière ligne, d'une page à l'autre.

Si l'on s'arrête à un logarithme quelconque, il convient à la fois, sous l'appellation convenable, aux deux arcs *complémen-*

taires qui aboutissent à la ligne correspondante. La somme de leurs degrés, lus en haut et en bas de la page considérée, est égale à 89°; et la somme de leurs minutes et secondes, comptées à gauche en descendant et à droite en remontant, est égale au degré qui manque. C'est ainsi qu'on trouve, par exemple, comme cela doit être,

$$\log \sin 16^\circ 53' 30'' = \log \cos 73^\circ 6' 30''.$$

Nous devons immédiatement faire une remarque très importante. Les sinus et les cosinus des arcs compris entre 0° et 90° sont plus petits que 1; il en est de même des tangentes des arcs compris entre 0° et 45° et des cotangentes des arcs compris entre 45° et 90° : les logarithmes de ces différents rapports auront dès lors des caractéristiques négatives (t. I, *Alg. élém.*, 361). En se plaçant au point de vue typographique, on a voulu éviter dans les Tables ces caractéristiques négatives; et, pour y arriver, *on a augmenté de* 10 les logarithmes correspondants. Il faut donc, si l'on veut se conformer au mode de calcul recommandé précédemment (t. I, *Alg. élém.*, 371), *retrancher* 10 aux caractéristiques de ces mêmes logarithmes. On a ainsi, par exemple,

$$\log \sin 0^\circ 47' 30'' = \log \cos 89^\circ 12' 30'' = \bar{2},1404059.$$

A partir de 3° jusqu'à la fin de la Table, c'est-à-dire entre 3° et 87°, après la colonne marquée *sinus*, vient une colonne marquée *différences ;* de même, après la colonne marquée *cosinus*. Ces différences sont celles qui existent entre deux logarithmes consécutifs de la Table, sinus ou cosinus; elles sont exprimées en unités du septième ordre décimal et écrites entre les logarithmes qu'il faut retrancher l'un de l'autre pour les obtenir. Entre la colonne des *tangentes* et celle des *cotangentes*, est une colonne intitulée *différences communes :* ces différences sont celles qui existent entre deux logarithmes consécutifs de la Table, tangentes ou cotangentes. Et elles sont *communes*, sauf le signe, aux logarithmes de ces rapports, parce que le produit de la tangente d'un arc par sa cotangente est égal à 1. Il en résulte qu'on a, pour deux arcs quelconques a et b,

$$\operatorname{tang} a \cot a = \operatorname{tang} b \cot b,.$$

d'où

$$\frac{\tang a}{\tang b} = \frac{\cot b}{\cot a}$$

et

$$\log \tang a - \log \tang b = \log \cot b - \log \cot a.$$

Les différences dont nous venons de parler sont appelées, d'une manière générale, *différences tabulaires*. Elles sont reproduites dans la portion à droite de chaque page, qui est intitulée P. P. (parties proportionnelles), et qui est séparée par un double trait de l'ensemble des colonnes dont nous nous sommes occupé jusqu'ici. Au-dessous de chacune des différences ainsi répétées, on a inscrit leurs produits par $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ..., jusqu'à $\frac{9}{10}$; ce qui constitue autant de petites Tables distinctes (dites *de parties proportionnelles*) qu'il y a de différences. Ces petites Tables, comme nous le verrons, permettent les mêmes simplifications que leurs analogues dans la Table des logarithmes des nombres (t. I, *Alg. élém.*, 363 et suiv.).

Les différences dont on doit former les parties proportionnelles étant trop nombreuses au début, on a été obligé de reporter un grand nombre des petites Tables correspondantes dans les *espaces vides* offerts par les pages qui précèdent la page 222. En effet, de 0° à 3° et, par conséquent, de 90° à 87°, les différences relatives aux sinus, tangentes et cotangentes, varient trop rapidement pour que leur emploi puisse conduire à une approximation suffisante, et on a dû les supprimer. On a eu soin d'ailleurs d'indiquer, après le titre P. P., les pages auxquelles se rapportent réellement les petites Tables ainsi données en avance, de la page 204 à la page 222, où commencent les colonnes des différences.

Nous terminerons ces explications en rappelant (t. I, *Alg. élém.*, 363), qu'un trait marqué *au-dessous* du dernier chiffre décimal d'un logarithme indique que ce logarithme a été obtenu *par excès*, à moins d'une demi-unité du dernier ordre conservé, c'est-à-dire qu'on a *forcé* ce logarithme (t. I, *Arithm.*, 257).

121. Nous croyons devoir mentionner ici les grandes Tables de *Callet* (1795), revues par Saigey (1861), et qui sont les plus complètes qu'on ait publiées.

Au point de vue trigonométrique, le Recueil de Callet renferme, avant

la Table principale où les arcs varient de dix secondes en dix secondes, une Table des logarithmes des sinus et tangentes, donnés de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés. Mais la Table principale ne contient pas les petites Tables de parties proportionnelles ajoutées par Schrön, aussi bien dans la Table des logarithmes des nombres, que dans celle des logarithmes des rapports trigonométriques.

122. Remarquons avec soin que, dans la pratique courante et quand on n'a pas à rechercher une précision scientifique, qu'il serait souvent illusoire de vouloir atteindre, on peut et l'on doit se contenter d'une moindre approximation que celle fournie par les Tables à sept décimales. On a alors intérêt à se servir de Tables plus simples, ne donnant les logarithmes des nombres ou des rapports trigonométriques qu'avec quatre ou cinq décimales.

Les meilleures que nous connaissions aujourd'hui sont les Tables de *Lalande*, à cinq décimales, refondues par M. Hoüel, qui en a beaucoup augmenté la valeur par les additions et les changements qu'il y a introduits.

Dans ce Recueil, la Table des logarithmes des nombres est *à simple entrée*, comme celle des logarithmes des rapports trigonométriques, c'est-à-dire qu'on trouve immédiatement, et sans aucune préparation spéciale, le logarithme cherché écrit en face même du nombre ou de l'arc proposé.

Dans la Table trigonométrique, où les arcs varient seulement de minute en minute, de sorte que la colonne des secondes est supprimée, M. Hoüel a intercalé utilement les sécantes et les cosécantes.

123. Les Tables trigonométriques servent à résoudre les deux questions suivantes :

1° *Étant donné un angle ou un arc, trouver les logarithmes de ses rapports trigonométriques;*

2° *Étant donné le logarithme d'un rapport trigonométrique, trouver l'angle ou l'arc plus petit que* 90° *auquel il appartient.*

Nous allons montrer comment il faut opérer pour résoudre ces deux problèmes, en admettant que le lecteur a entre les mains les Tables de Schrön; mais les détails dans lesquels nous allons entrer s'appliquent d'une manière analogue, quelles que soient les Tables qu'on emploie.

Usage des Tables trigonométriques, lorsque l'arc donné ou cherché est compris entre 3° et 87°.

124. Première question. — *Un angle ou un arc quelconque étant donné* (dans les limites indiquées), *trouver les logarithmes de ses rapports trigonométriques.*

Nous admettrons, comme pour les nombres (t. I, *Alg. élém.*, 364), qu'*il y a proportionnalité entre les petits accroissements donnés à un arc et les accroissements correspondants des logarithmes de ses rapports trigonométriques*, le mot accroissement signifiant toujours en Mathématiques une variation positive ou négative.

Ce principe ou cette *règle des parties proportionnelles* n'est pas rigoureusement exacte; mais, dans les limites de l'approximation adoptée, c'est-à-dire en s'arrêtant au septième chiffre décimal, on peut la vérifier à la simple inspection des Tables, en remarquant la valeur *constante* conservée par la *différence tabulaire* correspondante (120), lorsqu'on considère des séries d'arcs consécutifs plus ou moins prolongées, surtout au delà de 5°.

Cela posé, il y a une distinction à faire lorsqu'on demande, soit le logarithme d'un sinus ou d'une tangente, soit celui d'un cosinus ou d'une cotangente. En effet, lorsque l'arc augmente, les deux premiers rapports augmentent tandis que les deux autres diminuent, et inversement.

Soit demandé, *en premier lieu*, le logarithme du sinus de l'arc de $39°27'43'',6$.

Les Tables de Schrön donnent immédiatement, en corrigeant la caractéristique du logarithme (120), et en prenant l'arc de la Table qui est le plus approché *par défaut* de l'arc proposé,

$$\log \sin 39°27'40'' = \bar{1},803152\underline{7}.$$

La différence entre les log sin de deux arcs consécutifs de la Table, c'est-à-dire de deux arcs qui diffèrent de dix secondes, ou la *différence tabulaire* pour les sinus, est, à l'endroit où nous opérons, de 256 unités du septième ordre décimal. Si nous désignons par δ l'accroissement *positif* à faire subir au

log sin pour un accroissement *positif* de l'arc égal à 3″,6, la proportionnalité admise nous permet de poser

$$\frac{\delta}{256} = \frac{3'',6}{10''}, \quad \text{d'où} \quad \delta = 256\,\frac{3,6}{10}.$$

Le calcul peut s'achever très simplement, en ayant recours à la Table des parties proportionnelles qui répond à la différence tabulaire 256. Cette Table montre immédiatement que, pour 3 secondes, l'accroissement du logarithme est de 76,8 unités du septième ordre décimal et que, pour 0″,6, cet accroissement est, en divisant par 10 le nombre correspondant à 6 secondes, de 15,36 unités du même ordre.

L'algorithme qu'il convient d'adopter est alors celui-ci :

$$\begin{array}{lll} \log\sin 39^\circ 27' 40'' & = \bar{1},803152\underline{7} \\ \text{pour.....} + 3''\text{........} & + 76,8 \\ \text{pour.....} + 0'',6\text{......} & + 15,36 \\ \hline \log\sin 39^\circ 27' 43'',6 & = \bar{1},8031619\ldots \end{array}$$

La marche que nous venons d'indiquer s'applique identiquement à la recherche d'un logarithme tangente.

Soit demandé, *en second lieu*, le logarithme de la cotangente de l'arc de 72°25′17″,3.

Les Tables donnent immédiatement, en prenant l'arc de la Table qui approche le plus *par excès* de l'arc proposé,

$$\log\cot 72^\circ 25' 20'' = \bar{1},5007740.$$

La différence tabulaire est, en cet endroit, égale à 731, c'est-à-dire que, si l'arc *diminue* de 10 secondes, son log cot doit *augmenter* de 731 unités du septième ordre décimal. Or, pour passer de l'arc de la Table à l'arc proposé, il faut *diminuer* l'arc de la Table de l'écart entre 20″ et 17″,3 ou de 2″,7. Le logarithme de la Table devra donc subir en même temps l'accroissement *positif* δ, déterminé par la proportion

$$\frac{\delta}{731} = \frac{2'',7}{10''}, \quad \text{d'où} \quad \delta = 731\,\frac{2,7}{10}.$$

En ayant recours comme précédemment à la Table des par-

ties proportionnelles de 731, on écrira immédiatement

$$\begin{array}{lr} \log\cot 72^\circ 25' 20'' &= \bar{1},5007740 \\ \text{pour} \ldots\ldots - 2'' \ldots\ldots & + \quad 146,2 \\ \text{pour} \ldots\ldots - 0'',7 \ldots\ldots & + \quad 51,17 \\ \hline \log\cot 72^\circ 25' 17'',3 &= \bar{1},5007937\ldots \end{array}$$

La marche que nous venons d'indiquer s'applique identiquement à la recherche d'un logarithme cosinus.

125. *En résumé :*

S'il s'agit de trouver le logarithme d'un *sinus* ou d'une *tangente,* on prend le log sin ou le log tang de l'arc de la Table qui approche le plus *par défaut* de l'arc proposé ;

S'il s'agit de trouver le logarithme d'un *cosinus* ou d'une *cotangente,* on prend le log cos ou le log cot de l'arc de la Table qui approche le plus *par excès* de l'arc proposé :

DANS LES DEUX CAS, on *augmente* le logarithme pris dans la Table de la quantité

$$\delta = \Delta \frac{d}{D}.$$

Dans cette expression, Δ est la différence tabulaire présentée par les deux logarithmes de la Table qui comprennent le logarithme cherché; d est la différence qui existe entre l'arc donné et celui considéré dans la Table; enfin, D est la différence constante entre deux arcs consécutifs de la Table. On a donc toujours $\frac{d}{D} < 1$.

On voit par là que l'approximation atteinte pour δ est au moins de même ordre que celle de Δ. Par conséquent, le logarithme d'un rapport trigonométrique est toujours obtenu à moins d'une unité du dernier ordre décimal inscrit dans la la Table.

126. SECONDE QUESTION. — *Étant donné le logarithme d'un rapport trigonométrique, trouver l'angle ou l'arc plus petit que 90° auquel il appartient.*

Nous devrons encore distinguer deux cas, suivant que le logarithme donné sera celui d'un sinus ou d'une tangente, ou bien celui d'un cosinus ou d'une cotangente.

Soit demandé, *en premier lieu*, de calculer l'arc x d'après la condition

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{1},8750812.$$

Il faut, par la pensée, augmenter de 10 la caractéristique $\bar{1}$ (120), et chercher dans la Table le log tang qui approche le plus *par défaut* du logarithme proposé ainsi modifié. Ce logarithme est celui de tang 36°52′ 10″, et l'on a

$$\log \operatorname{tang} 36^\circ 52' 10'' = \bar{1},8750541.$$

La différence entre les deux logarithmes comparés est de 271 unités du septième ordre décimal et, en cet endroit de la Table, la différence tabulaire relative aux log tang est de 439 unités du même ordre. En désignant par d l'accroissement *positif* à faire subir à l'arc de la Table pour qu'il devienne égal à l'arc cherché x, la règle des parties proportionnelles permet de poser

$$\frac{d}{10} = \frac{271}{439};$$

on en déduit

$$d = \frac{271}{439}\, 10 = \frac{271}{\frac{439}{10}}.$$

On peut alors, pour achever rapidement le calcul, se servir des Tables des parties proportionnelles, comme nous l'avons indiqué en traitant de la détermination d'un nombre d'après son logarithme (t. I, *Alg. élém.*, 366).

En effet, si l'on prend la petite Table qui se rapporte à la différence tabulaire 439, on voit que d est égal au quotient de 271 par 43,9, qui est le premier produit de la Table. Or, le multiple de cette Table qui approche le plus du dividende 271 est 263,4, qui correspond à 6 secondes d'augmentation de l'arc. C'est donc là le premier chiffre du quotient. Il reste à tenir compte de $271 - 263,4 = 7,6$. Comme une seconde répond à 43,9, un dixième de seconde répondra à 4,39. Il ne restera plus à tenir compte que de $7,6 - 4,39 = 3,21$; ce qui conduira, toujours d'après la Table et en opérant par défaut, à sept centièmes de seconde représentant 3,073.

Nous écrirons donc finalement

$$\begin{array}{llll} \log\operatorname{tang} 36^\circ 52' 10'' & & = & \bar{1},8750541 \\ \text{pour} \ldots & + 6'' \ldots\ldots & + & 263,4 \\ \text{pour} \ldots & + 0'',1 \ldots\ldots & + & 4,39 \\ \text{pour} \ldots & + 0'',07 \ldots\ldots & + & 3,073 \\ \hline \log\operatorname{tang} 36^\circ 52' 16'',17 & & = & \bar{1},8750812\ldots \end{array}$$

$$x = 36^\circ 52' 16'',17.$$

Nous avons *forcé* dans le logarithme définitif le dernier chiffre conservé, parce que le chiffre suivant est égal à 8.

Pour calculer un angle ou un arc x, étant donnée $\log \sin x$, on suivra identiquement la marche que nous venons d'exposer.

Soit demandé, *en second lieu*, de calculer l'arc x d'après la condition

$$\log \cos x = \bar{1},7280956.$$

Il faut, par la pensée, augmenter la caractéristique de 10 et chercher dans la Table le log cos qui approche le plus *par excès* du logarithme donné ainsi modifié. On trouve que ce log cos est celui de l'arc de $57^\circ 40' 30''$, et l'on a

$$\log \cos 57^\circ 40' 30'' = \bar{1},7281273.$$

La différence entre les deux logarithmes comparés est de 317 unités du dernier ordre et, en cet endroit de la Table, la différence tabulaire pour les cosinus est de 332 unités du même ordre. Par conséquent, l'arc de la Table *augmentant* de 10 secondes, son log cos *diminuera* de 332 unités du dernier ordre. Si l'on désigne par d l'accroissement *positif* à faire subir à l'arc de la Table pour qu'il devienne égal à l'arc cherché x, c'est-à-dire pour que son log cos *diminue* de 317 unités du dernier ordre, la règle des parties proportionnelles conduit à la relation

$$\frac{d}{10} = \frac{317}{332};$$

et l'on en déduit

$$d = \frac{317}{332}\,10 = \frac{317}{\frac{332}{10}}.$$

En ayant recours comme précédemment à la Table des par-

ties proportionnelles de 332, on peut écrire immédiatement

$\log\cos 57°40'30''$		$= \bar{1},7281\,273$
pour...	$+\ 9''$........	$-298,8$
pour...	$+\ 0'',5$......	$-\ 16,6$
pour...	$+\ 0'',05$.....	$-\ 1,66$
		$-317,06$
$\log\cos 57°40'39'',55$		$= \bar{1},7280\,956...$

$$x = 57°40'39'',55.$$

Nous avons *forcé* le dernier chiffre conservé dans le logarithme définitif, parce que le chiffre suivant est égal à 9.

Pour calculer un angle ou un arc x, étant donné $\log\cot x$, on suivra identiquement la marche que nous venons d'exposer.

127. *En résumé :*

Si l'on part de $\log\sin x$ ou $\log\tan x$, on prend le logarithme de la Table qui approche le plus *par défaut* du logarithme proposé;

Si l'on part de $\log\cos x$ ou $\log\cot x$, on prend le logarithme de la Table qui approche le plus *par excès* du logarithme proposé :

Dans les deux cas, on *augmente* l'arc trouvé dans la Table de la quantité

$$d = D\frac{\delta}{\Delta}.$$

Dans cette expression, D est toujours la différence constante entre deux arcs consécutifs de la Table; δ est la différence qui existe entre le logarithme donné et celui considéré dans la Table; enfin, Δ est la différence tabulaire des logarithmes des deux arcs de la Table qui comprennent l'arc cherché. On a toujours $\frac{\delta}{\Delta} < 1$.

128. Cherchons à déterminer l'approximation qu'on obtient ainsi pour d et, par suite, pour x. D étant une quantité constante, c'est le quotient $\frac{\delta}{\Delta}$ qu'il faut considérer.

On peut admettre que δ et Δ sont exacts à une demi-unité près de leur dernier ordre (qui est le même pour ces deux quantités), soit par excès, soit par défaut.

Or, il est facile de démontrer ([1]) que l'erreur absolue présentée alors par la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$ est, dans tous les cas, moindre que $\frac{1}{\Delta}$; elle est donc moindre pour d et, par suite, pour x, que $D\frac{1}{\Delta}$ ou que le quotient $\frac{D}{\Delta}$.

On a donc intérêt, pour la seconde question qu'on vient de résoudre, à faire correspondre une plus petite valeur de D à

([1]) En effet, si δ est pris *par défaut* et Δ *par excès*, l'erreur absolue de leur quotient est moindre que

$$\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta-\frac{1}{2}}{\Delta+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{\delta+\Delta}{\Delta\left(\Delta+\frac{1}{2}\right)}$$

et, *a fortiori*, moindre que

$$\frac{1}{2}\,\frac{2\Delta}{\Delta^2}=\frac{1}{\Delta}.$$

Si δ est pris *par excès* et Δ *par défaut*, l'erreur absolue de leur quotient est moindre que

$$\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\Delta-\frac{1}{2}}-\frac{\delta}{\Delta}=\frac{1}{2}\,\frac{\delta+\Delta}{\Delta\left(\Delta-\frac{1}{2}\right)}.$$

Mais, δ est au plus égal à $\Delta-1$; donc le résultat obtenu est au plus égal à

$$\frac{1}{2}\,\frac{2\Delta-1}{\Delta\left(\Delta-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\Delta}.$$

C'est encore la même limite supérieure.

Si δ et Δ sont approchés tous deux dans le même sens, *par défaut* ou *par excès*, l'erreur de leur quotient est évidemment moindre que dans l'un ou l'autre des deux cas précédents; car on a (*Arithm.*, t. I, 182, 196)

$$\frac{\delta}{\Delta}>\frac{\delta-\frac{1}{2}}{\Delta-\frac{1}{2}}>\frac{\delta-\frac{1}{2}}{\Delta+\frac{1}{2}}$$

et

$$\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\Delta-\frac{1}{2}}>\frac{\delta+\frac{1}{2}}{\Delta+\frac{1}{2}}>\frac{\delta}{\Delta}.$$

une plus grande valeur de Δ, c'est-à-dire à se servir de Tables où les arcs varient par degrés plus rapprochés et où les logarithmes soient exprimés avec un plus grand nombre de décimales. Les *grandes Tables* offrent donc ici un avantage sérieux sur les *petites Tables*.

129. Ajoutons que c'est en employant les log tang qu'on introduit les différences tabulaires les plus considérables et qu'on obtient, par conséquent, pour les arcs à calculer, l'approximation la plus satisfaisante.

On s'en rend compte immédiatement en remarquant que, de 0° à 90°, la tangente croît de 0 à $+\infty$, tandis que le sinus et le cosinus restent compris entre 0 et $+1$. Les différences tabulaires relatives aux tangentes doivent donc, *a priori*, être les plus grandes. On peut vérifier d'ailleurs que ces différences sont précisément les sommes des différences tabulaires qui correspondent aux sinus et aux cosinus des mêmes arcs. Car, si l'on représente par A et A + D deux arcs consécutifs de la Table, on a

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \operatorname{tang}(A + D) = \frac{\sin(A + D)}{\cos(A + D)}.$$

On en déduit, en prenant les logarithmes et en retranchant la première égalité obtenue de la seconde,

$$\begin{aligned} &\log \operatorname{tang}(A + D) - \log \operatorname{tang} A \\ &\quad = [\log \sin(A + D) - \log \sin A] + [\log \cos A - \log \cos(A + D)], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en appelant Δ, Δ', Δ'' les différences tabulaires qui répondent aux tangentes, aux sinus et aux cosinus des mêmes arcs,

$$\Delta = \Delta' + \Delta''.$$

En résumé, *un arc est toujours mieux déterminé par sa tangente* que par ses autres rapports trigonométriques.

130. En examinant les Tables, on s'assure que, pour les sinus, la différence tabulaire va *en diminuant*, depuis 0° jusqu'à 90°. Les arcs peu éloignés de 90° sont donc très mal déterminés par leurs sinus et, par conséquent, d'après les propriétés des arcs complémentaires, les arcs peu éloignés de 0° le sont très mal par leurs cosinus.

Pour ces derniers arcs, les différences tabulaires relatives aux cosinus sont très faibles. Il en résulte (**129**) qu'un petit arc est à peu près aussi bien déterminé par son sinus que par sa tangente.

Enfin, pour les tangentes et cotangentes, la différence tabulaire va en diminuant depuis 0° jusqu'à 45°, pour croître ensuite depuis 45° jusqu'à 90°. Le maximum de l'erreur possible sur l'arc cherché correspond donc à l'angle de 45° (**128**), pour lequel on a, avec les Tables de Schrön,

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{10}{421} = 0{,}023\ldots$$

Ainsi, lorsqu'on calcule un arc d'après sa tangente ou sa cotangente, l'erreur commise est toujours moindre que 0",03, et elle peut être beaucoup plus faible.

Calculs relatifs aux petits arcs.

131. Nous avons laissé de côté (**124**, **126**) les arcs compris entre 0° et 3° et, par suite, entre 90° et 87°. Pour ces arcs, les différences tabulaires varient trop rapidement, et l'on ne peut plus admettre qu'il y ait proportionnalité entre les petits accroissements des arcs et ceux des logarithmes de leurs rapports trigonométriques. Voici alors comment on doit opérer.

132. Première question. — *Étant donné un arc compris entre* 0° *et* 3°, *trouver les logarithmes de ses rapports trigonométriques*.

Considérons un arc compris entre 0° et 3°, et réduisons cet arc en secondes : soient a la partie entière du résultat obtenu et h sa partie décimale. Comme il s'agit d'un arc peu éloigné de 0°, on peut, eu égard au degré d'approximation auquel on s'arrête, admettre les égalités

$$\frac{\sin(a+h)}{a+h} = \frac{\sin a}{a} \quad \text{et} \quad \frac{a+h}{\operatorname{tang}(a+h)} = \frac{a}{\operatorname{tang} a}.$$

En effet, chacun des rapports proposés est très peu distant de la limite 1, vers laquelle il converge, quand on fait tendre simultanément a et h vers zéro (**104**). On déduit des deux éga-

lités posées, en prenant les logarithmes,

$$(\beta)\quad \begin{cases} \log\sin(a+h) = \log(a+h) + \log\dfrac{\sin a}{a}, \\ \log\operatorname{tang}(a+h) = \log(a+h) + \log\dfrac{\operatorname{tang} a}{a}. \end{cases}$$

Pour avoir les deux inconnues, il faut donc calculer d'une part le logarithme de $(a+h)$ et, d'autre part, les logarithmes des rapports $\dfrac{\sin a}{a}$ et $\dfrac{\operatorname{tang} a}{a}$.

Pour effectuer commodément ces calculs, il faut nous reporter, dans le Recueil de Schrön, *à la Table des logarithmes des nombres*.

On peut diviser les arcs compris entre 0° et 3° *en trois séries :* ceux qui vont de 0° à $99'' = 1'39''$; ceux qui continuent de $100'' = 1'40''$ à $999'' = 16'39''$; ceux qui s'étendent de $1000'' = 16'40''$ à $10799'' = 2°59'59''$.

La réduction des arcs de la *première série* en secondes est obtenue, de la page 1 à la page 5 de la Table des logarithmes des nombres, à l'aide d'une colonne établie *à gauche* de la colonne Num. Les arcs variant de seconde en seconde sont indiqués dans la colonne additionnelle *de dix lignes en dix lignes;* et l'on trouve, en face de chacun d'eux, leur nombre de secondes inscrit dans la colonne Num., à la condition de supprimer par la pensée le zéro terminal du nombre qu'on lit dans cette colonne. Le logarithme de a, dont la caractéristique est alors 0 l'ou 1, peut donc s'écrire immédiatement, et on interpole ensuite, comme à l'ordinaire, pour avoir celui de $(a+h)$.

De la page 6 à la page 185 de la Table des logarithmes des nombres, on trouve deux colonnes additionnelles établies à gauche de la colonne Num.

La première répond, *dans des conditions identiques à celle qu'on vient d'expliquer,* aux arcs de la *deuxième série.* Le nombre des minutes de l'arc est ici indiqué en haut de la colonne, et son nombre de secondes dans la colonne elle-même. La caractéristique du logarithme, qui est 2, est rappelée par le signe $k.2$ placé au bas de la colonne.

Enfin, de la page 6 à la page 185, la seconde colonne additionnelle, qui continue ensuite *seule* de la page 186 jusqu'à la fin de la Table, répond, dans toute son étendue, aux arcs

de la *troisième série* variant toujours de seconde en seconde. Le nombre de degrés et minutes auquel on est parvenu, est inscrit en haut de la colonne; puis, les nombres consécutifs de secondes, avec intercalation des nombres de minutes atteints successivement, sont écrits dans la colonne elle-même; mais *sans espacement aucun*. Les nombres qu'on lit dans la colonne Num., en face des nombres de secondes considérés, et qui représentent les valeurs consécutives de a, doivent être pris tels qu'ils sont, *sans suppression du dernier chiffre*. La connaissance de $\log a$, dont la caractéristique 3 ou 4 est rappelée par le signe $k.3$ ou $k.4$ placé au bas de la colonne des secondes, s'ensuit donc immédiatement, ainsi que celle de $\log(a+h)$.

Voyons maintenant comment on peut obtenir les valeurs de $S=\log\frac{\sin a}{a}$ et de $T=\log\frac{\tan a}{a}$.

Au bas de chaque page de la Table des logarithmes des nombres, on a introduit une petite Table auxiliaire qui permet de trouver, précisément pour les arcs *variant de dix secondes* dont les nombres de secondes tombent dans cette page ou dans la page suivante, les valeurs de S et de T. Ces *logarithmes-rapports* sont donnés avec huit décimales; leur caractéristique (*augmentée de* 10) et leurs trois premières décimales sont écrites à côté des titres S et T.

L'interpolation a lieu à l'aide d'une colonne *différence* (D), comme pour les logarithmes ordinaires. Il faut seulement remarquer avec soin (ce que rappelle d'ailleurs le signe placé en haut de chaque colonne D) que les différences sont *négatives* pour S et *positives* pour T. Nous avons vu, en effet, que le rapport $\frac{\sin a}{a}$ *décroît* à mesure que l'arc *augmente* (104); et il est facile de prouver, par un raisonnement analogue, que le contraire a lieu pour le rapport $\frac{\tan a}{a}$.

133. Pour montrer la suite des calculs, proposons-nous, par exemple, de chercher, d'après ces indications, le logarithme de $\sin 1^\circ 2' 17'',94$.

On trouve d'abord, à la page 60 de la Table des logarithmes des nombres, que l'arc $1^\circ 2' 17''$ équivaut à $3737''$. On a donc ici

$$a=3737 \quad \text{et} \quad a+h=3737,94.$$

La Table permet d'écrire immédiatement

$$\begin{array}{l} \log 37379 \quad = 4,5726277 \\ \text{pour} + 0,4 \ldots\ldots\ldots + \quad 46,4 \\ \hline \log 3737,94 = 3,5726323 \end{array}$$

La Table auxiliaire placée au bas de la page 60 montre ensuite que, pour l'arc de $1°2'10''$ et en retranchant 10 à la caractéristique, on a

$$S = \bar{6},68555120.$$

Il faut interpoler pour trouver la valeur de S qui convient à l'arc donné. Nous aurons donc à multiplier la différence tabulaire, qui est ici -13 et qui exprime des unités du huitième ordre, par le rapport à 10 de l'excès de l'arc donné sur l'arc pris dans la Table auxiliaire, c'est-à-dire par $\frac{7'',94}{10''}$ ou par $0,794$. La valeur de S qui convient à l'arc donné est donc

$$\bar{6},68555120 - 0,00000010 = \bar{6},68555111.$$

Nous aurons donc finalement, en appliquant la première des deux formules (β) du n° 132,

$$\log \sin 1°2'17'',94 = 3,5726323 + \bar{6},68555111 = \bar{2},2581834.$$

On opère absolument de même, si l'on demande de calculer le log tang d'un petit arc, en remplaçant S par T et en donnant, pour l'interpolation, le signe + à la différence tabulaire.

Si l'on veut obtenir le log cot d'un petit arc, on cherche le log tang du même arc, et l'on prend ce logarithme en signe contraire.

Enfin, on ne peut pas calculer exactement, à l'aide des Tables, le log cos d'un petit arc (130). On peut le voir encore comme il suit. Si cet arc est $(a + h)$, on a

$$\operatorname{tang}(a + h) = \frac{\sin(a + h)}{\cos(a + h)},$$

et l'on en déduit

$$\log \cos(a + h) = \log \sin(a + h) - \log \operatorname{tang}(a + h),$$

ou, d'après les formules (β) du n° 132,

$$\log\cos(a+h) = \log\sin a - \log\operatorname{tang} a = \log\cos a.$$

Les Tables doivent donc donner sensiblement, pour les arcs $(a+h)$ et a, le même log cos, et la partie décimale h devient inutile à considérer : c'est ce que vérifie d'autant mieux leur examen direct entre 0° et 3°, que l'arc a est plus rapproché de 0°.

134. Seconde question. — *Étant donné le logarithme d'un des rapports trigonométriques d'un arc compris entre* 0° *et* 3°, *déterminer cet arc.*

Les formules (β) du n° 132 peuvent s'écrire

$$(\beta')\quad \begin{cases} \log(a+h) = \log\sin(a+h) \quad - \log\dfrac{\sin a}{a}, \\ \log(a+h) = \log\operatorname{tang}(a+h) - \log\dfrac{\operatorname{tang} a}{a}. \end{cases}$$

Ce qui est donné, c'est $\log\sin(a+h)$ ou $\log\operatorname{tang}(a+h)$, et il faut trouver l'arc $(a+h)$.

Pour cela, on commence par obtenir l'arc inconnu à 10″ près, en consultant, dans les petites Tables auxiliaires placées au bas des pages de la Table des logarithmes des nombres, les colonnes intitulées Log Sin et Log Tang. On n'a qu'à chercher entre quels nombres consécutifs de la colonne considérée tombe le logarithme donné : les deux arcs différant de 10″, qui comprennent entre eux l'arc inconnu, sont alors inscrits en face de ces nombres, dans la première colonne de la Table auxiliaire. L'un d'eux étant pris pour a, on a sur la même ligne une valeur très approchée de $S = \log\dfrac{\sin a}{a}$ ou de $T = \log\dfrac{\operatorname{tang} a}{a}$; et le calcul s'achève sans peine, d'après les formules (β') indiquées ci-dessus.

La limite supérieure de l'erreur qu'on peut ainsi commettre relativement à $(a+h)$ est fournie par les nombres $\Delta a''$ écrits au bas de la Table auxiliaire employée.

Si l'on désire une approximation plus grande, on peut se servir de la valeur de l'arc $(a+h)$ trouvée comme nous venons de le dire, pour corriger la valeur de S ou de T, dont on

a d'abord fait usage; et cette correction s'applique ensuite à la nouvelle recherche de l'arc $(a+h)$.

135. Pour montrer la suite des calculs, proposons-nous, par exemple, de trouver l'arc x d'après la condition

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{2},4578106 = \log \operatorname{tang}(a+h).$$

En ajoutant par la pensée 10 à la caractéristique, la Table trigonométrique montre immédiatement que l'arc x est compris entre 1°38′30″ et 1°38′40″. Nous sommes donc dans les conditions voulues pour appliquer les considérations qui précèdent.

En cherchant, dans la Table des logarithmes des nombres et dans la seconde colonne additionnelle à gauche, le titre 1°38′, nous parvenons à la page 104. La petite Table auxiliaire, placée au bas de cette page, nous indique alors, d'après les nombres de la colonne Log Tang entre lesquels tombe $\log \operatorname{tang}(a+h)$, augmenté de 10, que l'arc $(a+h)$ tombe lui-même, comme nous le savions déjà, entre les arcs 1°38′30″ et 1°30′40″, mais plus près du dernier. Si nous adoptons la valeur de T placée sur la même ligne que l'arc 1°38′40″, nous aurons, en diminuant de 10 la caractéristique et en supprimant ici le dernier chiffre décimal,

$$\log \frac{\operatorname{tang} a}{a} = \bar{6},6856941,$$

et, par suite, d'après la seconde formule (β') du n° 134,

$$\log(a+h) = \bar{2},4578106 - \bar{6},6856941 = 3,7721165.$$

Nous trouverons, dans la même page 104, en prenant le logarithme de la Table dont la partie décimale approche le plus par défaut de celle du logarithme ci-dessus,

$$\log 59172 = 4,7721162;$$

ce qui nous permettra d'écrire, d'après la différence tabulaire 73, qui répond au logarithme du nombre 59172,

$$\begin{array}{l}
\log(a+h) = 3,7721165 \\
\log 59172 \quad = \underline{4,7721162} \\
\hfill 3 \\
\text{pour} \ldots\ +0,04 \ldots\ldots\ +3 \\
\hline
a+h = 5917'',204 = 1°38'37'',204
\end{array}$$

La conversion de $5917''$ en degrés, minutes et secondes, s'effectue immédiatement à l'aide de la seconde colonne additionnelle.

Comme on a opéré par défaut en prenant pour T une valeur trop grande, on peut s'arrêter, pour l'arc x, à la valeur

$$x = 1°38'37'',21.$$

Si l'on doit chercher x connaissant $\log \sin x$, on opère d'une manière identique, en remplaçant Log Tang par Log Sin et T par S.

Pour calculer x connaissant $\log \cot x$, on pose

$$\log \operatorname{tang} x = - \log \cot x,$$

et l'on rentre dans ce qui précède.

Enfin, d'après ce qui a été dit déjà (130, 133), il est impossible de déterminer exactement x par son log cos.

136. *S'il s'agit de déterminer un arc compris entre* 87° *et* 90°, on a recours aux propriétés des arcs complémentaires pour remplacer les arcs donnés par des arcs compris entre 0° et 3°, de manière à pouvoir appliquer les procédés que nous venons de développer (132, 133, 134, 135).

Applications diverses.

137. I. *Résoudre l'équation*

$$(1) \qquad a \sin x + b \cos x = c,$$

où a, b, c, sont des nombres donnés, positifs ou négatifs.

On pourrait, en remplaçant $\cos x$ par $\sqrt{1 - \sin^2 x}$, ramener le problème à la résolution d'une équation du second degré où l'inconnue serait $\sin x$; mais il est bien plus simple d'introduire dans la question un angle auxiliaire φ, compris entre 0° et 180°, et déterminé par la condition

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a}.$$

L'équation (1), pouvant s'écrire

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a},$$

deviendra alors

$$\sin x + \operatorname{tang}\varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

ou, en remplaçant $\operatorname{tang}\varphi$ par $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ et en chassant le dénominateur $\cos\varphi$,

$$\sin x \cos\varphi + \sin\varphi \cos x = \frac{c\cos\varphi}{a},$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \sin(x+\varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a}.$$

Il faut que $\sin(x+\varphi)$ soit compris entre $+1$ et -1, ou bien que $\sin^2(x+\varphi)$ soit inférieur à l'unité. La condition de possibilité du problème est donc

$$\frac{c^2\cos^2\varphi}{a^2} < 1.$$

Mais, de $\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}$, on déduit immédiatement (38)

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{ou} \quad \cos^2\varphi = \frac{a^2}{a^2+b^2};$$

et l'inégalité précédente devient

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} < 1 \quad \text{ou} \quad c^2 < a^2 + b^2.$$

Si cette condition est remplie, il reste à calculer toutes les valeurs de $(x+\varphi)$ qui satisfont à l'équation (2), et les valeurs correspondantes de x seront les solutions ou les racines de l'équation (1).

Si le second membre de l'équation (2) est *positif*, il est évident que, quels que soient les signes des quantités qui le constituent, on pourra les rendre positives toutes les trois sans rien changer au résultat; ce qui permettra le calcul par logarithmes (t. I, *Alg. élém.*, 350).

Par exemple, si a est positif tandis que c et $\cos\varphi$ sont négatifs, on doit remplacer c par $-c$ et $\cos\varphi$ par $\cos(180^\circ - \varphi)$.

Pour fixer les idées, supposons que a, c, $\cos\varphi$, soient positifs. Nous aurons, en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation (2) (t. I, *Alg. élém.*, 371),

$$\log\sin(x+\varphi) = \log c + \log\cos\varphi + \overline{\mathrm{L}}a.$$

Les Tables feront alors connaître un arc α, compris entre 0° et 90°, et satisfaisant à l'équation (2). Tous les arcs compris dans les deux formules (12)

$$2k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - \alpha,$$

où k est un entier quelconque, y satisferont donc également. Par suite,

on pourra écrire

$$x + \varphi = 2k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad (x + \varphi) = (2k + 1)\pi - \alpha,$$

de sorte que toutes les racines de l'équation (1) seront comprises elles-mêmes dans les deux expressions

$$x = 2k\pi + \alpha - \varphi \quad \text{et} \quad x = (2k + 1)\pi - (\alpha + \varphi).$$

Si le second membre de l'équation (2) est *négatif*, on changera son signe, on calculera ensuite l'angle α, comme nous venons de le voir, et on l'introduira dans les expressions précédentes en changeant son signe (13).

138. II. *La somme de deux arcs variables α et β étant constante, chercher la condition pour que le produit* $\sin\alpha \sin\beta$ *soit un maximum ou un minimum.*

On a (81)

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin\alpha \sin\beta.$$

On en déduit, en représentant par A la somme constante $\alpha + \beta$,

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos A].$$

On voit alors immédiatement que le *maximum* du produit $\sin\alpha \sin\beta$ correspond à celui de $\cos(\alpha - \beta)$, qui est 1 pour $\alpha - \beta = 2n\pi$, n étant un entier quelconque.

Des deux égalités

$$\alpha + \beta = A, \quad \alpha - \beta = 2n\pi,$$

on tire

$$\alpha = \frac{A}{2} + n\pi, \quad \beta = \frac{A}{2} - n\pi.$$

On doit donner à n la même valeur dans les deux formules.

Le *maximum* du produit $\sin\alpha \sin\beta$ est ainsi (59)

$$\frac{1}{2}(1 - \cos A) = \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Si les arcs α et β doivent demeurer positifs, il faut qu'on ait

$$\frac{A}{2} - n\pi > 0 \quad \text{ou} \quad n < \frac{A}{2\pi}.$$

Si la somme constante A est alors inférieure à une circonférence, n ne peut admettre que la valeur zéro, et l'on a, pour le *maximum*,

$$\alpha = \beta = \frac{A}{2}.$$

Le *minimum* du produit $\sin\alpha \sin\beta$ correspond de même à celui de

$\cos(\alpha - \beta)$, qui est -1 pour $\alpha - \beta = (2n+1)\pi$, n étant un entier quelconque.

Des deux égalités

$$\alpha + \beta = A, \quad \alpha - \beta = (2n+1)\pi,$$

on tire

$$\alpha = \frac{A+\pi}{2} + n\pi, \quad \beta = \frac{A-\pi}{2} - n\pi.$$

On doit encore donner à n la même valeur dans les deux formules.

Le *minimum* du produit $\sin\alpha \sin\beta$ est ainsi (59)

$$-\frac{1}{2}(1 + \cos A) = -\cos^2\frac{A}{2} = \sin^2\frac{A}{2} - 1.$$

Si les arcs α et β doivent demeurer positifs, il faut qu'on ait

$$\frac{A-\pi}{2} - n\pi > 0 \quad \text{ou} \quad n < \frac{A-\pi}{2\pi}.$$

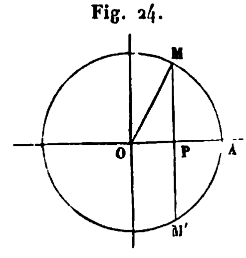
Si la somme constante A, nécessairement plus grande que π, est alors inférieure à une circonférence, n ne peut encore admettre que la valeur zéro, et l'on a, pour le *minimum*,

$$\alpha = \frac{A+\pi}{2}, \quad \beta = \frac{A-\pi}{2}.$$

139. III. *Chercher quel doit être le rayon d'un cercle pour que la différence entre un arc de ce cercle de longueur déterminée et sa corde soit inférieure à une limite donnée.*

Soient (*fig.* 24) O le cercle inconnu, dont nous désignerons le rayon OM par r, MM' l'arc de ce cercle dont la longueur a est imposée, et c le nombre qui mesure la corde correspondante. Les quantités a, c, r, sont supposées exprimées en mètres. On doit avoir, par exemple,

Fig. 24.



$$a - c < \frac{1}{10^n}.$$

Si nous menons le rayon OA perpendiculaire en P à la corde MM' et si nous désignons par θ la mesure de l'angle AOM, nous aurons à la fois (2, 7)

$$\theta = \frac{\frac{a}{2}}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\frac{c}{2}}{r}.$$

Il en résulte

$$a = 2r\theta, \quad c = 2r\sin\theta, \quad a - c = 2r(\theta - \sin\theta).$$

Mais l'on a (105)

$$\theta - \sin\theta < \frac{\theta^3}{4},$$

et, par suite,

$$a - c < \frac{r\theta^3}{2}.$$

Si l'on remplace θ par sa valeur $\frac{a}{2r}$, il vient donc

$$a - c < \frac{a^3}{16r^2}.$$

Par conséquent, pour que la condition imposée soit remplie, il suffit *a fortiori* qu'on ait

$$\frac{a^3}{16r^2} < \frac{1}{10^n},$$

d'où l'on déduit, comme limite de r^2,

$$r^2 > \frac{a^3.10^n}{16}$$

ou, comme limite de r,

$$r > \frac{a}{4}\sqrt{a.10^n}.$$

Nous verrons (t. III, *Alg. supér.*) que, de 0° à 90°, la différence entre un arc et son sinus est moindre en réalité que le *sixième* du cube de l'arc. On peut donc obtenir une limite plus resserrée que la précédente, en partant de la condition

$$\theta - \sin\theta < \frac{\theta^3}{6}.$$

On voit que, dans le dénominateur 6 qu'on a ainsi à considérer au lieu du dénominateur 4, un facteur 2 est simplement remplacé par un facteur 3. On arrivera donc sans calcul à la nouvelle limite

$$r^2 > \frac{a^3.10^n}{24} \quad \text{ou} \quad r > \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5a.10^{n-1}}{3}}.$$

Si l'on a, par exemple, $a = 100^m$ et $n = 2$, c'est-à-dire si l'on cherche quel doit être le rayon d'un cercle pour que la différence entre un arc de 100^m mesuré sur ce cercle et sa corde soit moindre que $0^m,01$, on trouve immédiatement que ce rayon doit être *au moins* égal à

$$50\sqrt{\frac{5000}{3}} = 2041^m.$$

LIVRE DEUXIÈME.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

140. Un triangle rectiligne renferme trois côtés et trois angles. ***Résoudre*** un triangle, c'est déterminer ***numériquement*** trois de ses six éléments en fonction des trois autres. Il faut nécessairement que, parmi les éléments donnés, il y ait au moins un côté.

Nous conviendrons de désigner les angles du triangle considéré exprimés en degrés par les lettres A, B, C, et les côtés ***opposés*** exprimés en mètres par les lettres correspondantes a, b, c.

Si le triangle est *rectangle*, A désignera toujours l'angle droit et, par suite, a l'hypoténuse.

La résolution des triangles repose sur certaines formules fondamentales que nous allons d'abord démontrer.

Formules relatives aux triangles rectangles.

141. I. *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou le cosinus de l'angle adjacent* (*fig.* 25).

En regardant le sommet B comme le centre d'un cercle de

rayon a, les définitions du sinus et du cosinus (7) donnent immédiatement

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a},$$

d'où

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Fig. 25.

142. II. ***Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé ou la cotangente de l'angle adjacent*** (*fig.* 25).

Les définitions de la tangente et de la cotangente (7) donnent immédiatement

$$\text{tang} B = \frac{b}{c}, \quad \cot B = \frac{c}{b},$$

d'où

$$b = c \,\text{tang} B, \quad c = b \cot B.$$

143. Il faut ajouter aux relations qu'on vient d'écrire celles qui résultent des propriétés géométriques du triangle rectangle (*Géom.*, 60, 168) :

$$B + C = 90^\circ, \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

144. Les six relations que nous venons d'indiquer ne sont pas *distinctes* (35).

La première divisée par la deuxième et la deuxième divisée par la première (141) reproduisent la troisième et la quatrième (142). La première et la deuxième élevées au carré et ajoutées membre à membre reproduisent la dernière (143). Les six relations ci-dessus se réduisent donc, en réalité, aux trois suivantes :

$$B + C = 90^\circ, \quad b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Il ne peut d'ailleurs exister, entre les éléments d'un triangle rectangle, aucune relation distincte de ces trois-là ; car, s'il en

était ainsi, on pourrait remplacer dans cette relation b et c par leurs valeurs $a \sin B$ et $a \cos B$, de sorte qu'elle ne contiendrait plus que a et les angles du triangle.

Il en résulterait que l'hypoténuse d'un triangle rectangle serait déterminée par la seule connaissance de ses angles; ce qui est absurde (*Géom.*, 147).

145. L'aire S d'un triangle rectangle est donnée immédiatement par la formule

$$S = \frac{1}{2} bc.$$

Formules relatives aux triangles quelconques.

146. I. *Dans tout triangle rectiligne, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Soit le triangle quelconque ABC (*fig.* 26); en menant la hauteur CD relative au sommet C, nous le partagerons en deux triangles rectangles qui nous donneront immédiatement (141)

Fig. 26.

$$CD = b \sin A = a \sin B,$$

et il en résultera

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

De même, en menant la hauteur du triangle ABC qui est relative au sommet B, nous trouverons pour cette hauteur la double expression

$$c \sin A = a \sin C,$$

d'où

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

On a donc cette suite de rapports égaux

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

147. La démonstration précédente ne fait pas connaître la

valeur du rapport constant $\frac{a}{\sin A}$. Voici une seconde démonstration qui, à ce point de vue, est préférable.

Considérons (*fig.* 27) le cercle O circonscrit au triangle ABC, et abaissons du centre O, sur le côté BC, la perpendiculaire OPD. Si l'on joint OC, on voit que l'angle au centre COD est égal à l'angle inscrit CAB (*Géom.*, 108); les sinus de ces deux angles sont donc égaux, et l'on a

Fig. 27.

$$\sin A = \sin COD = \frac{CP}{OC}.$$

Mais OC est le rayon R du cercle circonscrit, et $CP = \frac{a}{2}$; par suite,

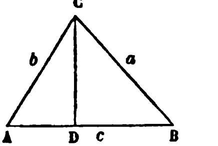
$$\sin A = \frac{a}{2R} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

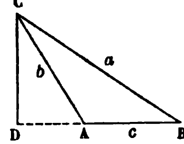
Ainsi, *le rapport d'un côté quelconque du triangle au sinus de l'angle opposé est égal au diamètre du cercle circonscrit au triangle*, et l'on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

148. II. *Dans tout triangle rectiligne, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de ces mêmes côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Fig. 28.





Soit le triangle ABC (*fig.* 28). Abaissons sur AB la perpendiculaire CD. Si l'angle A est *aigu*, on a (*Géom.*, 170)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c.AD.$$

Le triangle rectangle ACD donne, dans ce cas (141),

$$AD = b \cos A.$$

Il vient, par suite,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Si l'angle A est *obtus*, on a (*Géom.*, 171)

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c.AD.$$

Mais le triangle rectangle ACD donne alors

$$AD = b\cos CAD.$$

L'angle A du triangle ABC et l'angle CAD étant supplémentaires, on a (17)

$$\cos CAD = -\cos A$$

et, par suite,

$$AD = -b\cos A.$$

En substituant, il vient encore

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

En appliquant cette formule à chaque côté, on obtient donc les trois relations

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

149. III. *Dans tout triangle rectiligne, un côté quelconque est égal à la somme des produits qu'on obtient en multipliant respectivement chacun des deux autres côtés par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le côté considéré.*

Soient ABC le triangle donné (*fig.* 28) et CD la perpendiculaire abaissée du sommet C sur le côté AB.

Si les angles A et B sont aigus, le point D tombe entre A et B, et l'on a

$$c = BD + AD = a\cos B + b\cos A.$$

Si l'un des angles A ou B est obtus, le point D tombe extérieurement au triangle, du côté de l'angle obtus, et l'on a

$$c = BD - AD = a\cos B - b\cos CAD;$$

mais, comme au numéro précédent, $\cos CAD = -\cos A$, et l'on retrouve encore

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

En appliquant cette formule à chaque côté, on obtient donc les trois relations

$$a = b\cos C + c\cos B,$$
$$b = a\cos C + c\cos A,$$
$$c = a\cos B + b\cos A.$$

150. Il faut ajouter, aux relations qu'on vient d'établir, la relation fondamentale entre les angles d'un triangle (*Géom.*, 59)

$$A + B + C = 180^\circ.$$

151. Puisqu'on peut toujours construire un triangle connaissant *trois* de ses éléments, parmi lesquels il doit entrer au moins un côté, les *dix* relations que nous venons d'indiquer (**146**, **148**, **149**, **150**) ne sont pas *distinctes*, et elles doivent se réduire à *trois* seulement.

La démonstration *a posteriori* de ce fait va nous fournir d'utiles exercices de calcul.

Les relations trouvées peuvent se partager en trois groupes :

$$(1)\quad \begin{cases} A + B + C = 180^\circ, \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} a = b\cos C + c\cos B, \\ b = a\cos C + c\cos A, \\ c = a\cos B + b\cos A. \end{cases}$$

Nous allons montrer, par des transformations algébriques, qu'*un des trois groupes* étant pris pour point de départ, les *deux autres* s'ensuivent nécessairement.

1° *Du groupe* (1), *déduire les groupes* (2) *et* (3).

On a d'abord évidemment, d'après les formules du groupe (1),

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = \frac{bc}{\sin B \sin C} = \frac{2bc\cos A}{2\sin B\sin C\cos A}.$$

Par suite (t. I, *Alg. élém.*, 63)

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A}.$$

Le groupe (2) sera une conséquence du groupe (1), si l'on peut prouver que les dénominateurs de ces deux fractions égales sont égaux.

Or, la condition $A + B + C = 180°$ donne à la fois

$$\sin A = \sin(B + C) \quad \text{et} \quad \cos(B + C) = -\cos A.$$

On a alors, par des transformations connues,

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= \sin^2 B \cos^2 C + 2\sin B \sin C \cos B \cos C + \cos^2 B \sin^2 C\\ &= \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B \sin C(\cos B \cos C - \sin B \sin C)\\ &= \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A,\end{aligned}$$

et il en résulte

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

qui est la première formule du groupe (2).

D'autre part, si, d'après la condition $A + B + C = 180°$, l'on pose

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B,$$

on peut remplacer dans cette égalité les quantités $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, par les quantités a, b, c, qui leur sont respectivement proportionnelles, et il vient alors

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

qui est la première formule du groupe (3).

On trouvera d'une manière analogue, sans qu'il soit besoin d'insister, les autres formules des groupes (2) et (3).

2° *Du groupe* (2), *déduire les groupes* (1) *et* (3).

Prenons la première formule du groupe (2); nous en déduirons

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

et, par suite,

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2},$$

c'est-à-dire, en simplifiant et en divisant par a^2,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2b^2c^2}.$$

Si l'on permute simultanément les quantités $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, et les quantités a, b, c, il est clair que le second membre de l'égalité précédente, qui est symétrique en a, b, c, ne change pas. On obtient, par conséquent, des valeurs identiques pour les rapports $\frac{\sin^2 A}{a^2}$, $\frac{\sin^2 B}{b^2}$, $\frac{\sin^2 C}{c^2}$, et l'on en déduit, en admettant que A, B, C, soient moindres que 180°,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Si l'on remplace maintenant, dans la première formule du groupe (2), les quantités a, b, c, par les quantités $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, qui leur sont respectivement proportionnelles, il vient

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A,$$

ou, en remplaçant $\sin^2 A$ par $1 - \cos^2 A$ et en transposant les termes,

$$1 - \sin^2 B - \sin^2 C = \cos^2 A - 2 \sin B \sin C \cos A.$$

En complétant dans le second membre de cette égalité le carré de $(\cos A - \sin B \sin C)$ par l'addition aux deux membres du terme $\sin^2 B \sin^2 C$ et en écrivant le second membre le premier, on a

$$\begin{aligned}(\cos A - \sin B \sin C)^2 &= 1 - \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 B \sin^2 C \\ &= (1 - \sin^2 B)(1 - \sin^2 C) \\ &= \cos^2 B \cos^2 C.\end{aligned}$$

En extrayant alors la racine carrée des deux membres, on trouve

$$\cos A - \sin B \sin C = \pm \cos B \cos C,$$

d'où

(1) $$\cos A = \cos(B - C),$$

(2) $$\cos A = -\cos(B + C) = \cos[\pi - (B + C)].$$

En se reportant à la condition pour que deux arcs admettent

le même cosinus (42), l'équation (1) exige qu'on ait

$$A+B-C \quad \text{ou} \quad A+C-B=2n\pi.$$

Mais, si la somme $A+B+C$ est supposée inférieure à 180°, il en est de même *a fortiori* de la différence $A+B-C$ ou $A+C-B$. On ne peut donc donner à n que la valeur 0; ce qui entraîne

$$A+B=C \quad \text{ou} \quad A+C=B.$$

Or, ce résultat est inadmissible, puisqu'un angle quelconque d'un triangle ne peut pas être égal à la somme des deux autres.

L'équation (2), à son tour, exige qu'on ait

$$A+\pi-B-C=2n\pi \quad \text{ou} \quad A+B+C-\pi=2n\pi;$$

comme on ne peut encore donner à n que la valeur 0, on obtient

$$B+C-A=\pi \quad \text{ou} \quad A+B+C=\pi,$$

et la dernière relation est évidemment la seule qu'on puisse conserver.

Ainsi, le groupe (2) entraîne le groupe (1).

Pour passer à présent du groupe (2) au groupe (3), nous n'avons qu'à ajouter, par exemple, les deux premières relations du groupe (2). Il vient, en effet, en simplifiant,

$$0=2c^2-2c(b\cos A+a\cos B)$$

ou

$$c=a\cos B+b\cos A,$$

qui est la première relation du groupe (3).

3° *Du groupe* (3), *déduire les groupes* (1) *et* (2).

Multiplions respectivement les deux premières relations du groupe (3) par a et b, et retranchons-les membre à membre. Il vient

$$a^2-b^2=c(a\cos B-b\cos A).$$

Mais, d'après la troisième relation du même groupe,

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A \\ &= a^2-b^2-a^2\sin^2 B+b^2\sin^2 A, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

En combinant de la même manière la première et la troisième relation du groupe (3), on trouvera

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

On a donc le droit de remplacer, dans la première relation du groupe (3), les quantités a, b, c, par les quantités $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, qui leur sont respectivement proportionnelles, et l'on trouve ainsi, en appliquant les considérations précédentes (2°),

$$\sin A = \sin(B + C), \quad \text{d'où} \quad A + B + C = 180°.$$

Enfin, pour remonter du groupe (3) au groupe (2), nous multiplierons respectivement par a, b, c, les trois relations du groupe (3), et nous retrancherons la première de la somme des deux autres. Nous aurons comme résultat

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

qui est la première relation du groupe (2). Les deux autres s'obtiendront d'une manière analogue.

152. D'après ce que nous venons de vérifier, on peut prendre pour les *trois relations distinctes* auxquelles se réduisent les *dix* relations considérées, celles qui forment l'un quelconque des trois groupes, par exemple, celles du premier groupe

$$A + B + C = 180°,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Il est facile de voir qu'il ne peut exister, entre les éléments d'un triangle rectiligne quelconque, aucune relation qui soit distincte de ces trois-là; car, s'il en était ainsi, on pourrait toujours remplacer, dans cette relation, b et c par leurs valeurs

$$\frac{a \sin B}{\sin A} \quad \text{et} \quad \frac{a \sin C}{\sin A},$$

léduites des relations primitives. La nouvelle relation supposée ne contiendrait plus alors que le côté a et les angles A, B, C, du triangle; et il en résulterait qu'un côté d'un triangle rectiligne quelconque serait déterminé par la seule connaissance de ses angles, conclusion absurde (*Géom.*, 147).

153. L'aire S d'un triangle rectiligne quelconque (*fig.* 28) est (*Géom.*, 248)

$$S = \frac{1}{2} AB.CD = \frac{1}{2} c.CD.$$

Le triangle rectangle ACD donne (141)

$$CD = b \sin A.$$

On a, par suite,

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

L'aire d'un triangle rectiligne quelconque est donc *égale à la moitié du produit de deux de ses côtés par le sinus de l'angle qu'ils comprennent.* Cette formule est d'un usage continuel.

154. Il est clair que, pour $A = 90°$, les formules relatives aux triangles rectilignes quelconques reproduisent celles qui se rapportent aux triangles rectilignes rectangles.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

155. La résolution des triangles rectangles présente *quatre cas*.

On peut donner l'hypoténuse en même temps qu'un angle aigu ou un côté de l'angle droit; ou bien, un côté de l'angle droit avec un angle aigu ou le second côté.

Premier cas.

156. *On donne l'hypoténuse a et l'angle aigu* B : *on demande les deux côtés b et c et l'angle* C (*fig.* 29).

Fig. 29.

C b a A c B

On a immédiatement

$$C = 90° - B.$$

La formule (141)

$$b = a \sin B$$

donne

$$\log b = \log a + \log \sin B.$$

On a ensuite (141)

$$c = a \cos B,$$

d'où

$$\log c = \log a + \log \cos B.$$

Quant à l'aire S du triangle considéré, *qu'il faut avoir soin d'exprimer en fonction des données*, on a (145)

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B,$$

d'où (t. I, *Alg. élém.*, 371)

$$\log S = 2\log a + \log\sin B + \log\cos B + \overline{L}.2.$$

Deuxième cas.

157. *On donne l'hypoténuse a et le côté b : on demande l'autre côté c et les deux angles* B *et* C (*fig.* 29).

On a

$$b = a\cos C, \quad \text{d'où} \quad \cos C = \frac{b}{a},$$

et

$$\log\cos C = \log b - \log a.$$

C étant connu, on en déduit

$$B = 90° - C.$$

Enfin, la relation

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

donne

$$\log c = \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)].$$

L'hypoténuse a et le côté b diffèrent souvent très peu. L'angle C est alors très petit et, en le déterminant par son cosinus, on ne peut plus compter sur l'exactitude du résultat (**130**). La formule (19) du n° 66 lève cette difficulté. On a, en effet, d'après cette formule,

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}.$$

En substituant à $\cos C$ sa valeur $\frac{b}{a}$, il vient

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

d'où

$$\log\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}[\log(a-b) - \log(a+b)].$$

L'angle $\frac{C}{2}$, étant déterminé par sa tangente, l'est aussi exactement que possible (129), et il en est de même, par conséquent, de l'angle C.

On voit que les logarithmes qui servent au calcul de $\tang\frac{C}{2}$ sont précisément ceux qui servent au calcul du côté c. On doit donc suivre de préférence la marche indiquée en dernier lieu, lors même que b n'approche pas de a.

Quant à l'aire S du triangle, on a

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b\sqrt{(a+b)(a-b)},$$

d'où

$$\log S = \log b + \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)] + \overline{L}.2.$$

Troisième cas.

158. *On donne le côté b et l'angle* B : *on demande l'hypoténuse a, le côté c et l'angle* C (*fig.* 29).

On a

$$C = 90° - B.$$

De la formule $b = a\sin B$, on déduit

$$a = \frac{b}{\sin B},$$

d'où

$$\log a = \log b - \log\sin B.$$

La formule (142)

$$c = b\cot B$$

donne ensuite

$$\log c = \log b + \log\cot B.$$

Quant à l'aire S du triangle, on a

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b^2 \cot B,$$

d'où

$$\log S = 2\log b + \log\cot B + \overline{L}.2.$$

Quatrième cas.

159. *On donne les deux côtés b et c : on demande l'hypoténuse a et les deux angles* B *et* C (*fig.* 29).

La formule (142)

$$b = c \operatorname{tang} B$$

donne

$$\operatorname{tang} B = \frac{b}{c},$$

d'où

$$\log \operatorname{tang} B = \log b - \log c.$$

On a ensuite

$$C = 90^\circ - B.$$

Connaissant B, on peut, de la relation $b = a \sin B$, déduire

$$a = \frac{b}{\sin B} \quad \text{et} \quad \log a = \log b - \log \sin B.$$

L'aire S du triangle est immédiatement

$$S = \frac{1}{2} bc,$$

d'où

$$\log S = \log b + \log c + \overline{L}.2.$$

On pourrait vouloir déterminer d'abord l'hypoténuse a, en partant de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

qu'il faudrait alors rendre *calculable par logarithmes* (t. I, *Alg. élém.*, 372),

On écrirait donc (86)

$$a^2 = b^2 \left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right),$$

et l'on poserait, par exemple, en désignant par φ un angle auxiliaire,

$$\frac{c^2}{b^2} = \cot^2 \varphi.$$

Il en résulterait (36, 7)

$$a^2 = b^2 (1 + \cot^2 \varphi) = b^2 \operatorname{coséc}^2 \varphi = \frac{b^2}{\sin^2 \varphi},$$

c'est-à-dire

$$a = \frac{b}{\sin\varphi}.$$

Mais nous avons aussi $a = \frac{b}{\sin B}$. L'angle auxiliaire φ n'est donc autre que l'angle B, que la première marche suivie nous a conduit à trouver d'abord, et il est inutile de chercher à déterminer directement l'hypoténuse a.

Formules de vérification.

160. Il est toujours utile de soumettre les calculs à des *vérifications*, qui puissent permettre de découvrir les erreurs commises et d'apprécier le degré d'approximation obtenu.

Pour la résolution des triangles, ces vérifications sont fournies, en général, par des formules différentes de celles qu'on a employées et qui doivent contenir à la fois *des éléments donnés et des éléments calculés.*

Si ces formules se trouvent satisfaites exactement ou, du moins, avec une approximation convenable, il y a une très grande probabilité que les calculs primitifs ont été effectués dans de bonnes conditions.

161. Les calculs qui se rapportent aux triangles rectangles sont si simples, qu'on se dispense ordinairement de les vérifier.

Nous allons indiquer néanmoins les formules dont on peut faire usage à cet effet.

Premier cas. — *Les données sont a et* B (156).

On peut alors appliquer la formule

$$\tang\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad \text{ou} \quad \tang\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}},$$

démontrée en traitant le deuxième cas (157).

Si l'on avait recours à la relation plus simple

$$\tang B = \frac{b}{c},$$

les erreurs commises sur b et sur c pourraient se compenser en partie.

DEUXIÈME CAS. — *Les données sont a et b* (157).

On peut alors employer l'une des deux formules

$$\tang\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}},\quad b=\sqrt{(a+c)(a-c)}.$$

Il en sera de même pour le troisième cas (158), où les données sont b et B, et pour le quatrième cas (159), où les données sont b et c.

Applications numériques.

162. Nous donnons ici les différents éléments d'un triangle rectangle, ainsi que les logarithmes correspondants qui peuvent entrer dans le calcul des *quatre cas* que nous venons de considérer. Le lecteur pourra les *résoudre* successivement, en choisissant dans le Tableau ci-dessous les valeurs convenables; et il pourra ensuite se rendre compte de l'exactitude de ses propres résultats, en les comparant aux nombres du Tableau.

$$a=4765^{m},35,\quad b=2753^{m},357,\quad c=3889^{m},420,$$
$$A=90^{\circ},\quad B=35^{\circ}17'42'',17,\quad C=54^{\circ}42'17'',83,$$
$$a+b=7518^{m},707,\quad a+c=8654^{m},770,$$
$$a-b=2011^{m},993,\quad a-c=875^{m},930,$$
$$\log a=3,6780948,\quad \log b=3,4398626,\quad \log c=3,5898848,$$
$$\log(a+b)=3,8761432,\quad \log(a+c)=3,9372556,$$
$$\log(a-b)=3,3036264,\quad \log(a-c)=2,9424694,$$
$$\log\sin B=\bar{1},7617678=\log\cos C,$$
$$\log\cos B=\bar{1},9117900=\log\sin C,$$
$$\log\tang B=\bar{1},8499779=\log\cot C,$$
$$\log\cot B=0,1500221=\log\tang C,$$
$$\log\tang\frac{B}{2}=\bar{1},5026071,\quad \log\tang\frac{C}{2}=\bar{1},7137416,$$
$$\log 2=0,3010300,\quad \overline{L}.2=\bar{1},6989700,$$
$$\log S=6,7287174,\quad S=5354481^{mq}.$$

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES.

163. La résolution des triangles rectilignes quelconques présente aussi *quatre cas.*

Les trois premiers correspondent aux trois cas d'égalité des triangles, c'est-à-dire qu'on peut donner : 1° *un côté et deux angles;* 2° *deux côtés et l'angle qu'ils comprennent;* 3° *les trois côtés.*

Le quatrième cas est celui où l'on donne *deux côtés et l'angle opposé à l'un deux.* Nous avons vu (*Géom.*, 120) qu'il pouvait y avoir alors *deux* triangles construits avec les données. Ce quatrième cas est donc un cas *douteux*, sujet à discussion.

Premier cas.

164. *On donne le côté c et les angles* A *et* B : *on demande les côtés a, b, et le troisième angle* C (*fig.* 30).

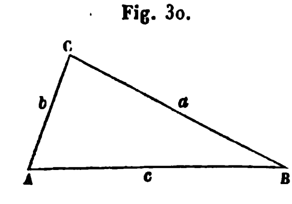


Fig. 30.

On a immédiatement (150)

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

On a ensuite (146)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

d'où

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C},$$

et

$$\log a = \log c + \log \sin A + \overline{L}.\sin C,$$
$$\log b = \log c + \log \sin B + \overline{L}.\sin C.$$

Quant à l'aire S du triangle, *qu'il faut avoir soin d'exprimer en fonction des données*, on a (153), en conservant sin C qu'on pourrait remplacer par sin (A + B),

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C},$$

d'où

$$\log S = 2 \log c + \log \sin A + \log \sin B + \bar{L} \sin C + \bar{L}.2.$$

Deuxième cas.

165. *On donne les deux côtés a, b, et l'angle compris* C : *on demande le troisième côté c et les deux autres angles* A *et* B (*fig.* 30).

Comme on a immédiatement

$$A + B = 180° - C \quad \text{ou} \quad \frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2},$$

on doit chercher à déterminer la demi-différence $\frac{A-B}{2}$, de manière à trouver à la fois les deux angles A et B (t. I, *Alg. élém.*, 2).

Or, nous avons (146)

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

En supposant $a > b$, nous en déduirons (t. I, *Arithm.*, 393)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tang \frac{A+B}{2}}{\tang \frac{A-B}{2}} \quad (83).$$

Mais, puisque A + B est le supplément de C, $\frac{A+B}{2}$ est le complément de $\frac{C}{2}$, et l'on peut remplacer $\tang \frac{A+B}{2}$ par $\cot \frac{C}{2}$. La relation précédente donne donc finalement

$$\tang \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2},$$

d'où

$$\log\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\log(a-b)+\log\cot\frac{C}{2}+\overline{L}(a+b).$$

Si les Tables conduisent alors à $\frac{A-B}{2}=n^\circ$, on a à la fois

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2},\quad \frac{A}{2}-\frac{B}{2}=n^\circ,$$

c'est-à-dire

$$A=90^\circ+n^\circ-\frac{C}{2},\quad B=90^\circ-n^\circ-\frac{C}{2}.$$

En ajoutant ces deux valeurs, on retrouve l'égalité

$$A+B=180^\circ-C;$$

mais ce n'est pas là une vérification, puisqu'on a introduit cette même condition dans le calcul. On voit d'ailleurs qu'en ajoutant A et B, l'erreur qu'on a pu commettre sur n disparaît nécessairement avec n lui-même.

Il reste à trouver le côté c. On peut le tirer de la proportion

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},\quad \text{qui donne}\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A};$$

mais on a alors trois nouveaux logarithmes à calculer. Il est donc préférable d'opérer comme il suit.

Des rapports égaux

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

on déduit (t. I, *Alg. élém.*, 63)

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a-b}{\sin A-\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Il en résulte

$$c=\frac{(a+b)\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{(a-b)\sin C}{\sin A-\sin B}.$$

Il faut rendre ces valeurs calculables par logarithmes. Or, on

a immédiatement (59, 81), en se rappelant que $\frac{A+B}{2}$ est le complément de $\frac{C}{2}$,

$$\frac{\sin C}{\sin A + \sin B} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

$$\frac{\sin C}{\sin A - \sin B} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Il vient donc

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Comme la détermination de la demi-différence $\frac{A-B}{2}$ exige le calcul de $\log(a+b)$ et de $\log(a-b)$, on voit qu'en s'arrêtant à l'une des deux valeurs précédentes de c on n'aura que deux nouveaux logarithmes à chercher au lieu de trois.

Les deux formules qu'on vient d'établir sont d'ailleurs très importantes, en dehors même de la résolution spéciale du deuxième cas. Elles donnent

$$\log c = \log(a+b) + \log\sin\frac{C}{2} + \overline{L}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\log c = \log(a-b) + \log\cos\frac{C}{2} + \overline{L}\sin\frac{A-B}{2}.$$

Enfin, on a immédiatement, pour l'aire S du triangle,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

d'où

$$\log S = \log a + \log b + \log\sin C + \overline{L}.2.$$

166. Il arrive souvent dans la pratique, quand on a un *réseau* de triangles à calculer, que *les côtés a et b se trouvent donnés par leurs logarithmes*. Il faut alors employer directement ces

logarithmes et éviter de remonter aux nombres. Les indications précédentes doivent donc être modifiées.

Reprenons la formule

$$\tang \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Posons $\frac{b}{a} = \tang\varphi$, c'est-à-dire déterminons l'angle auxiliaire φ par la condition

$$\log\tang\varphi = \log b - \log a.$$

Nous pourrons, dans la fraction $\frac{a-b}{a+b}$, remplacer b par $a\tang\varphi$, et diviser ses deux termes par a. Elle deviendra ainsi (55)

$$\frac{1-\tang\varphi}{1+\tang\varphi} = \tang(45^\circ - \varphi),$$

et l'on devra calculer $\tang\frac{A-B}{2}$ par la formule transformée

$$\tang\frac{A-B}{2} = \tang(45^\circ-\varphi)\cot\frac{C}{2},$$

qui donne

$$\log\tang\frac{A-B}{2} = \log\tang(45^\circ-\varphi) + \log\cot\frac{C}{2}.$$

Dans l'hypothèse que nous considérons, il faut avoir soin de calculer directement le côté c par la relation $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, puisque $\log a$ est connu. On a donc

$$\log c = \log a + \log\sin C + \overline{L}\sin A.$$

167. Il peut arriver encore, comme cela a lieu en Astronomie, que *les côtés a et b se trouvent donnés, le premier par son logarithme, le second directement.* Voici comment il convient alors d'opérer.

Des deux relations (146, 149)

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad b = a\cos C + c\cos A$$

on déduit

$$c\sin A = a\sin C,$$
$$c\cos A = b - a\cos C;$$

en divisant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\operatorname{tang} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}.$$

L'angle A est *aigu* ou *obtus* suivant que tang A est *positive* ou *négative*, ou suivant que le dénominateur $b - a\cos C$ est lui-même *positif* ou *négatif*. Les quantités négatives n'ayant pas de logarithmes (t. I, *Alg. élém.*, 350), il faut, pour que l'expression obtenue se prête toujours au calcul logarithmique, la mettre sous la forme

$$\pm \operatorname{tang} A = \frac{a \sin C}{\pm(b - a \cos C)},$$

les signes + et — se correspondant dans les deux membres. On a donc

$$\log \pm \operatorname{tang} A = \log a + \log \sin C + \overline{\mathrm{L}} \pm (b - a \cos C).$$

Ainsi, lorsque la quantité $(b - a\cos C)$ sera *négative*, on changera le signe de cette quantité en même temps que celui de l'inconnue tang A; et les Tables, au lieu de l'angle obtus A, feront connaître son supplément $180° - A$, qu'on devra retrancher de $180°$ pour avoir finalement A.

Pour calculer d'ailleurs $\log \pm (b - a\cos C)$, il faut calculer d'abord le produit $a\cos C$ en se servant des Tables, le retrancher directement de b, puis revenir aux Tables.

Une fois A connu, on a

$$B = 180° - (A + C) \quad \text{et} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

168. On pourrait vouloir déterminer d'abord le côté c en partant de la relation (148)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

qu'il faudrait alors rendre calculable par logarithmes (t. I, *Alg. élém.*, 372).

On multiplierait d'abord $(a^2 + b^2)$ par l'unité mise sous la forme $\sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$ (34); puis, l'on remplacerait $\cos C$ par $\cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}$ (59). On aurait ainsi

$$c^2 = (a^2 + b^2)\left(\sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}\right).$$

c'est-à-dire, en développant,

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2}.$$

On en déduit évidemment (86)

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} \left[1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cot^2 \frac{C}{2} \right].$$

Si l'on pose alors, en désignant par φ un angle auxiliaire,

$$\frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \operatorname{tang}\varphi,$$

il vient

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} \operatorname{séc}^2\varphi = \frac{(a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2}}{\cos^2\varphi},$$

d'où

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{C}{2}}{\cos\varphi}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut (165)

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}.$$

L'angle auxiliaire φ n'est donc autre que la demi-différence $\frac{A-B}{2}$, que la première marche indiquée nous a conduit à calculer d'abord; et il est, par conséquent, inutile de chercher à déterminer directement le côté c.

Troisième cas.

169. *On donne les trois côtés* a, b, c *: on demande les trois angles* A, B, C (*fig.* 30).

Nous résoudrons la question en calculant directement les demi-angles du triangle.

La relation (148)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

donne immédiatement

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

On a d'ailleurs (66)

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}.$$

Or, d'après la valeur de $\cos A$,

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{1 - \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2 - (b - c^2)}{4bc},$$

ou, en appliquant un théorème connu (t. I, *Alg. élém.*, 30),

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{4bc}.$$

De même,

$$\frac{1 + \cos A}{2} = \frac{1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc},$$

ou, en appliquant la même transformation,

$$\frac{1 + \cos A}{2} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4bc}.$$

Pour simplifier, nous représenterons alors par $2p$ le périmètre du triangle considéré. Nous aurons ainsi

$$a + b + c = 2p, \quad b + c - a = 2(p - a),$$
$$a + c - b = 2(p - b), \quad a + b - c = 2(p - c).$$

En substituant ces valeurs des différents facteurs dans les relations précédentes, on peut supprimer le facteur commun 4 aux deux termes de chaque fraction, et il vient finalement

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{(p - b)(p - c)}{bc}, \quad \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{p(p - a)}{bc}.$$

Il en résulte

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}.$$

On trouve de même, par de simples permutations de lettres,

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

En divisant membre à membre et deux par deux les formules relatives aux sinus et aux cosinus des demi-angles du triangle, on obtient les trois suivantes, relatives à leurs tangentes :

$$\tang\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\tang\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\tang\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Dans les neuf relations qu'on vient d'établir, et qui sont très importantes en dehors même de la résolution spéciale du troisième cas, *tous les radicaux indiqués doivent être pris avec le signe* +, puisque les demi-angles d'un triangle sont nécessairement aigus.

Lorsqu'on veut déterminer *un seul angle*, quel que soit celui des trois groupes de formules qu'on considère, on a *quatre* logarithmes à calculer. Mais, lorsqu'on veut *tous les angles*, les formules *sinus* exigent qu'on calcule *six* logarithmes, les formules *cosinus* exigent qu'on en calcule *sept*, et les *formules* tangentes exigent qu'on en calcule *quatre* seulement. *Ce sont donc ces dernières qu'il faut préférer dans les applications*, puisque, en outre, en les employant, on détermine les angles cherchés avec une plus grande exactitude (**129**).

En prenant les logarithmes, on a

$$\log\tang\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left[\log(p-b)+\log(p-c)+\overline{\mathrm{L}}p+\overline{\mathrm{L}}(p-a)\right],$$

$$\log\tang\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left[\log(p-a)+\log(p-c)+\overline{\mathrm{L}}p+\overline{\mathrm{L}}(p-b)\right],$$

$$\log\tang\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left[\log(p-a)+\log(p-b)+\overline{\mathrm{L}}p+\overline{\mathrm{L}}(p-c)\right].$$

Il convient de calculer d'abord les quantités p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, et leurs logarithmes *directs* et *préparés* (t. I, *Alg. élém.*, 371); puis, on n'a plus qu'à substituer convenablement les valeurs trouvées dans les trois formules précédentes.

170. Pour que le triangle soit *possible*, il faut que chaque côté soit plus petit que la somme des deux autres (*Géom.*, 35).

Si cette condition n'était pas remplie, si l'on avait, par exemple, $c > a + b$, il en résulterait nécessairement

$$a < b + c, \quad b < a + c.$$

On aurait donc à la fois

$$a + b - c < 0, \quad b + c - a > 0, \quad a + c - b > 0,$$

c'est-à-dire (169)

$$p - c < 0, \quad p - a > 0, \quad p - b > 0.$$

La valeur de $\tang \frac{A}{2}$ se présenterait, par conséquent, *sous forme imaginaire* (t. I, *Alg. élém.*, 223), et il en serait de même des valeurs de $\tang \frac{B}{2}$ et $\tang \frac{C}{2}$.

On voit qu'*une valeur négative* trouvée pour l'une des trois différences $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$, indique l'*impossibilité du problème*.

171. On a, pour l'aire S du triangle (153),

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

D'ailleurs, comme $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ (59), il vient, d'après les formules précédentes (169),

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$= \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

et il en résulte l'expression déjà connue (*Géom.*, 251)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

On a donc, en prenant les logarithmes,

$$\log S = \frac{1}{2}[\log p + \log(p-a) + \log(p-b)\log(p-c)].$$

Les quatre logarithmes qui ont servi (169) à calculer les demi-angles du triangle serviront donc également à calculer son aire.

172. *Rayon du cercle circonscrit.* — On peut demander de calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle donné.

De la relation (147)

$$\frac{a}{\sin A} = 2R,$$

on déduit

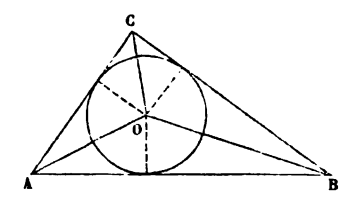
$$R = \frac{a}{2\sin A}.$$

Si l'on se reporte à la valeur qu'on vient de trouver pour $\sin A$ (171), on a donc

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{4S} \quad (\textit{Géom.}, 253).$$

173. *Rayons des cercles inscrit et exinscrits.* — Cherchons d'abord le rayon r du cercle *inscrit* au triangle donné (*Géom.*, 130, 252). Pour cela, joignons (*fig.* 31) le centre O de ce

Fig. 31.



cercle aux trois sommets du triangle. La somme des aires des trois triangles partiels ainsi formés équivaut à l'aire totale du triangle, de sorte qu'on a

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}r.$$

Le périmètre $(a+b+c)$ du triangle étant représenté par

$2p$ (169), il vient

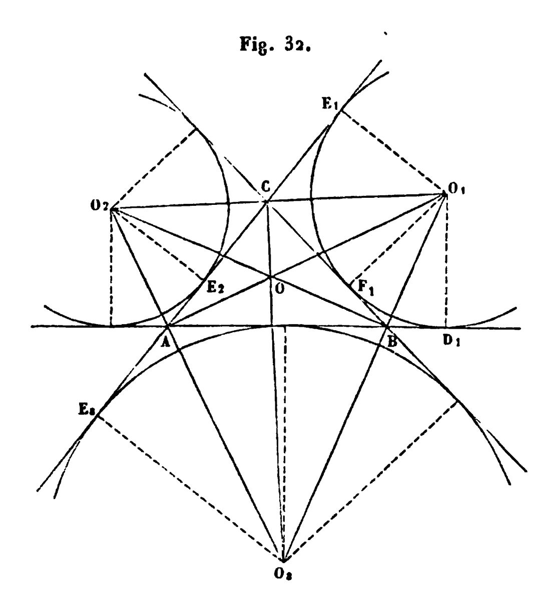
$$S = pr,$$

d'où

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Cherchons maintenant les rayons r_a, r_b, r_c, des cercles *ex-inscrits* au triangle donné (*Géom.*, 130). Nous désignons par r_a le rayon O_1E_1 (*fig.* 32) du cercle exinscrit qui touche di-

Fig. 32.



rectement le côté a du triangle; de même, r_b et r_c sont les rayons O_2E_2 et O_3E_3 des cercles exinscrits qui s'appuient sur les côtés b et c.

Le triangle rectangle O_1E_1A donne

$$r_a = AE_1 . \tang\frac{A}{2}.$$

On a d'ailleurs, en se rappelant les propriétés des tangentes issues d'un même point (*Géom.*, 128),

$$AE_1 = b + CE_1 = b + CF_1,$$

$$AE_1 = AD_1 = c + BD_1 = c + BF_1.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$2AE_1 = a + b + c = 2p \quad \text{et} \quad AE_1 = p.$$

Par suite,

$$r_a = p \operatorname{tang} \frac{A}{2} = p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

On trouvera de même

$$r_b = p \operatorname{tang} \frac{B}{2} = p\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$r_c = p \operatorname{tang} \frac{C}{2} = p\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Parmi les formules qu'on peut déduire de celles qu'on vient d'établir, nous nous contenterons de remarquer la suivante :

$$rr_a r_b r_c = S^2, \quad \text{d'où} \quad S = \sqrt{rr_a r_b r_c}.$$

174. *Seconde méthode pour la résolution du troisième cas.* — La considération du rayon r du cercle inscrit au triangle permet de calculer le *troisième cas* avec plus de rapidité et moins de chances d'erreur.

On commence par calculer ce rayon r par la formule (173)

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

qui donne

$$\log r = \frac{1}{2}[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \overline{L}.p].$$

On remarque ensuite que, pour diviser la valeur de r par $(p-a)$, il faut diviser par $(p-a)^2$ la quantité placée sous le radical qui représente cette valeur. On trouve alors, en simplifiant,

$$\frac{r}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \operatorname{tang} \frac{A}{2}.$$

On a donc la formule

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a},$$

qu'il serait facile d'obtenir directement par la Géométrie, en se reportant à la *fig.* 31 et en calculant r comme nous avons calculé r_a.

De même, en divisant successivement la valeur de r par $p-b)$ et $(p-c)$, on a

$$\text{tang}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b},\quad \text{tang}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}.$$

On peut donc, pour calculer les demi-angles du triangle, avoir recours aux relations suivantes, qui sont d'une application plus commode que celles indiquées au n° 169 :

$$\log\text{tang}\frac{A'}{2}=\log r-\log(p-a),$$

$$\log\text{tang}\frac{B}{2}=\log r-\log(p-b),$$

$$\log\text{tang}\frac{C}{2}=\log r-\log(p-c).$$

L'aire S du triangle se calcule enfin à l'aide de la formule $S=pr$, qui donne

$$\log S=\log r+\log p.$$

On doit bien entendu, comme dans la première méthode, déterminer d'abord les quantités p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, ainsi que leurs logarithmes directs, plus le logarithme préparé de p seulement; puis, substituer convenablement ces logarithmes dans les relations précédentes.

Quatrième cas.

175. *On donne les deux côtés a, b, et l'angle* A *du triangle : on demande les deux angles* B *et* C, *et le troisième côté c* (*fig.* 33).

Fig. 33.

Nous savons d'avance par la Géométrie (*Géom.*, 120) qu'il peut exister deux solutions ou une seule, et que le problème peut être impossible.

La suite (146)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

donne immédiatement

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}\quad \text{et}\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A};$$

on a ensuite

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

Il reste à discuter cette solution.

Discussion. — La valeur de $\sin B$ doit être moindre que l'unité. Il faut donc, pour que le problème soit possible, qu'on ait

$$b \sin A < a.$$

Mais, si l'on abaisse la perpendiculaire CD sur la base du triangle, elle a précisément pour valeur $b \sin A$, et l'on retrouve la condition de possibilité indiquée en Géométrie

$$CD < a.$$

Si cette condition est remplie, les Tables font connaître un angle *aigu* B, dont le sinus est égal à $\frac{b \sin A}{a}$ et qui répond à la question; mais l'angle supplémentaire $B' = 180^\circ - B$, ayant même sinus que B, *peut y répondre également*. Si cela a lieu, il existe aussi, pour l'angle C et pour le côté c, deux valeurs qui sont

$$C = 180^\circ - (A + B), \quad C' = 180^\circ - (A + B') = B - A,$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin(A + B)}{\sin A},$$

$$c' = \frac{a \sin C'}{\sin A} = \frac{a \sin(B - A)}{\sin A}.$$

Or, pour que la seconde valeur C' soit admissible, il faut qu'elle soit positive et qu'on ait

$$B > A, \quad \text{d'où} \quad b > a.$$

B étant aigu, il faut donc que A le soit.

On ne peut, par conséquent, *avoir deux solutions que lorsque l'angle* A *est aigu, et qu'en outre le côté* a *qui lui est opposé est le plus petit des deux côtés donnés.*

Dans toute autre hypothèse, le problème, quand il est possible, n'admet qu'une solution, et le triangle est complètement déterminé.

Nous retrouvons ainsi les résultats indiqués en Géométrie.

On aurait pu remarquer *a priori* que, lorsque l'angle A est

obtus, la seconde solution B′ *ne peut plus être admise*, puisque un triangle ne peut pas présenter deux angles obtus.

Quand il y a deux solutions, les aires S et S′ des triangles correspondants ont pour valeurs

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad S' = \frac{1}{2} bc' \sin A,$$

c'est-à-dire, en exprimant c et c' en fonction des données,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin(A + B), \quad S' = \frac{1}{2} ab \sin(B - A).$$

En résumé et au point de vue numérique, *s'il y a deux solutions*, la formule

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A + \overline{L} a$$

fait connaître B.

On en déduit ensuite successivement

$$C = 180^\circ - (A + B), \quad C' = B - A,$$

$$\log c = \log a + \log \sin(A + B) + \overline{L} \sin A,$$
$$\log c' = \log a + \log \sin(B - A) + \overline{L} \sin A,$$

$$\log S = \log a + \log b + \log \sin(A + B) + \overline{L} . 2,$$
$$\log S' = \log a + \log b + \log \sin(B - A) + \overline{L} . 2.$$

Lorsqu'il n'y a qu'une solution, on calcule seulement B, C, c et S, d'après les formules ci-dessus.

176. On pourrait vouloir commencer par calculer directement le troisième côté c, à l'aide de la relation (148)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

qui ne renferme pas d'autre inconnue que c. On a alors à résoudre l'équation du second degré

$$(1) \qquad c^2 - 2b \cos A . c + b^2 - a^2 = 0,$$

qui donne

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cos^2 A - b^2 + a^2},$$

ou

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

Pour que c soit *réel*, il faut qu'on ait

$$a^2 > b^2 \sin^2 A \quad \text{ou} \quad (b \sin A = CD) < a;$$

c'est la condition de possibilité trouvée précédemment (175).

Il faut, de plus, que c soit *positif*. Or, les deux racines de l'équation (1), supposées réelles, seront positives, si leur somme $2b\cos A$ est positive et si leur produit $(b^2 - a^2)$ est positif; ce qui correspond aux deux conditions

$$\cos A > 0 \quad \text{ou} \quad A < 90°,$$
$$b^2 - a^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a < b.$$

Ce sont aussi les conditions d'une double solution trouvées précédemment (175).

Si l'on a $b^2 - a^2 < 0$ ou $a > b$, les deux racines de l'équation (1) sont de signes contraires (t. I, *Alg. élém.*, 244), et la première seule est admissible.

Qu'il y ait ou non deux solutions, il est toujours nécessaire de rendre la valeur de c calculable par logarithmes. Pour cela, nous la mettrons sous la forme

$$c = b\cos A \pm a\sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}}.$$

Comme on suppose $a > b \sin A$, on peut déterminer un angle auxiliaire φ tel qu'on ait

$$\sin\varphi = \frac{b \sin A}{a}.$$

Il vient, par suite,

$$c = b\cos A \pm a\cos\varphi.$$

Mais, de la relation posée, on peut déduire

$$b = \frac{a \sin\varphi}{\sin A},$$

et, en substituant cette valeur dans celle de c, on trouve en simplifiant

$$c = \frac{a \sin\varphi \cos A}{\sin A} \pm a\cos\varphi = \frac{a \sin(\varphi \pm A)}{\sin A}.$$

Le but est donc atteint; mais, puisqu'on a

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \sin \varphi,$$

'angle auxiliaire φ n'est autre que l'angle B déterminé d'abord ar la première méthode, et l'on n'a aucun intérêt à commencer le calcul par la recherche du troisième côté c.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que la relation qui donne l'angle auxiliaire conduit à deux angles supplémentaires φ et $\varphi' = 180° - \varphi$. Mais, en se reportant à la valeur de c et en y remplaçant φ par $180° - \varphi$, on trouve

$$\sin(180° - \varphi \pm A) = \sin(\varphi \mp A).$$

Les deux solutions qui seraient fournies par φ' sont donc les mêmes que celles qui répondent à φ.

Formules de vérification.

177. D'après les considérations présentées au n° 160, nous indiquerons les formules suivantes comme pouvant servir à la vérification des calculs relatifs à la résolution des triangles quelconques.

178. **Premier cas.** — *Les données sont* c, A, B (164).

On peut avoir recours à l'une des deux formules (165)

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Deuxième cas. — *Les données sont* a, b, C (165).

Si l'on multiplie membre à membre les deux expressions (169)

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

on trouve

$$\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2} = \frac{p-a}{p},$$

et cette relation peut servir de formule de vérification pour le deuxième cas.

TROISIÈME CAS. — *Les données sont a, b, c* (169).

On doit trouver, exactement ou très approximativement,

$$A + B + C = 180^\circ.$$

QUATRIÈME CAS. — *Les données sont a, b,* A (175).

S'il n'y a qu'une solution, on peut se servir de l'une des formules de vérification employées pour le premier et le deuxième cas.

S'il y a deux solutions, la *fig.* 33 du n° 175 donne

$$AB = c, \quad AB' = c', \quad AD = c' + \frac{c-c'}{2} = \frac{c+c'}{2}.$$

D'autre part, on a, d'après le triangle rectangle ADC,

$$AD = b\cos A.$$

On peut donc prendre, comme formule très simple de vérification,

$$\frac{c+c'}{2} = b\cos A \quad \text{ou} \quad c + c' = 2b\cos A.$$

Applications numériques.

179. Nous donnons ici, comme nous l'avons fait pour le triangle rectangle (162), les éléments d'un triangle quelconque, ainsi que les logarithmes correspondants qui peuvent entrer dans le calcul des *quatre* cas que nous venons d'étudier. Le lecteur pourra les résoudre successivement, en choisissant dans le Tableau ci-contre les valeurs convenables, et vérifier les résultats qu'il aura obtenus en les comparant aux nombres du Tableau.

$$a = 3257^{m},894,\quad b = 5431^{m},782,\quad c = 7046^{m},358,$$
$$A = 26^{\circ}26'24'',75,\quad B = 47^{\circ}56'2'',48,\quad C = 105^{\circ}37'32'',77.$$

$$\text{og}\,a = 3,5129369,\quad \log b = 3,7349423,\quad \log c = 3,8479646,$$

$$\begin{aligned}
b + a &= 8689^{m},676, & \log(b + a) &= 3,939003\underline{6},\\
b - a &= 2173,888, & \log(b - a) &= 3,337237\underline{2},\\
c + a &= 10304,252, & \log(c + a) &= 4,013016\underline{5},\\
c - a &= 3788,464, & \log(c - a) &= 3,578463\underline{1},\\
c + b &= 12478,140, & \log(c + b) &= 4,096149\underline{9},\\
c - b &= 1614,576, & \log(c - b) &= 3,2080584,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 7868^{m},017, & \log p &= 3,8958653, & \bar{L}p &= \bar{4},1041347,\\
a &= 4610,123, & \log(p-a) &= 3,6637125, & \bar{L}(p-a) &= \bar{4},3362875,\\
b &= 2436,235, & \log(p-b) &= 3,3867192, & \bar{L}(p-b) &= \bar{4},6132808,\\
c &= 821,659, & \log(p-c) &= 2,9146916, & \bar{L}(p-c) &= \bar{3},0853084,
\end{aligned}$$

$$r = 1083^{m},011,\quad \log r = 3,0346290,$$
$$S = 8521072^{mq},\quad \log S = 6,9304943,$$

$$\begin{aligned}
A &= \bar{1},6486172, & \log\cos A &= \bar{1},9520267, & \log\text{tang}\,A &= \bar{1},696600\underline{4},\\
B &= \bar{1},8706226, & \log\cos B &= \bar{1},826065\underline{7}, & \log\text{tang}\,B &= 0,044556\bar{9},\\
C &= \bar{1},9836449, & \log(-\cos C) &= \bar{1},430321\underline{8}, & \log(-\text{tang}\,C) &= 0,5533232,
\end{aligned}$$

$$\log\sin\frac{A}{2} = \bar{1},3592519,\quad \log\cos\frac{A}{2} = \bar{1},9883355,$$
$$\log\sin\frac{B}{2} = \bar{1},6087513,\quad \log\cos\frac{B}{2} = \bar{1},9608415,$$
$$\log\sin\frac{C}{2} = \bar{1},9012762,\quad \log\cos\frac{C}{2} = \bar{1},7813388,$$

$$\log\text{tang}\frac{A}{2} = \bar{1},3709165,\quad \log\cot\frac{A}{2} = 0,6290835,$$
$$\log\text{tang}\frac{B}{2} = \bar{1},6479098,\quad \log\cot\frac{B}{2} = 0,3520902,$$
$$\log\text{tang}\frac{C}{2} = 0,1199374,\quad \log\cot\frac{C}{2} = \bar{1},8800626.$$

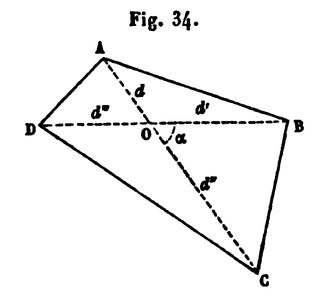
CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS.

---

180. I. *L'aire d'un quadrilatère quelconque est égale à la moitié du produit de ses diagonales par le sinus de l'angle qu'elles comprennent.*

Fig. 34.



Soit le quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 34). Désignons par D et D′ ses deux diagonales AC et BD, et par α leur angle; elles se coupent en un point O qui détermine sur la première les segments d et d'' et, sur la seconde, les segments d' et d'''.

En se rappelant (153) que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux de ses côtés par le sinus de l'angle qu'ils forment, et que deux angles supplémentaires ont même sinus, la figure donne immédiatement :

$$\text{tr. AOB} = \frac{1}{2} dd' \sin\alpha,$$

$$\text{tr. BOC} = \frac{1}{2} d'd'' \sin\alpha,$$

$$\text{tr. COD} = \frac{1}{2} d''d''' \sin\alpha,$$

$$\text{tr. DOA} = \frac{1}{2} dd''' \sin\alpha.$$

Par suite, en représentant l'aire cherchée par S, il vient, en ajoutant membre à membre les égalités précédentes,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,(dd' + d'd'' + d''d''' + dd''') \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,[d(d' + d''') + d''(d' + d''')] \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,(d + d'')(d' + d''') \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{DD'}\sin\alpha. \end{aligned}$$

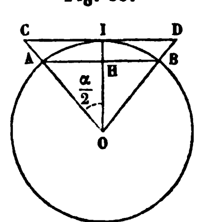
On voit, d'après cette formule, que tous les quadrilatères pour lesquels D, D′ et α, ont les mêmes valeurs, sont équivalents ; et l'on retrouve ainsi ce théorème de Géométrie :

Deux quadrilatères, dont les diagonales se coupent sous le même angle et ont respectivement des longueurs égales, sont équivalents.

181. II. *Expressions trigonométriques des aires des polygones réguliers de n et de 2n côtés, inscrits et circonscrits à un cercle de rayon* R. — *Rapports de ces aires.*

Soit AB (*fig.* 35) le côté du polygone régulier inscrit de n côtés ; désignons par $\alpha = \frac{360°}{n}$ l'angle au centre AOB de ce polygone. Nous aurons, pour l'aire du triangle isocèle AOB,

Fig. 35.



$$\text{tr.AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha.$$

Le polygone considéré se composant de n triangles égaux au triangle AOB, on a, pour son aire s,

$$s = \frac{n R^2 \sin \alpha}{2}.$$

Soit CD le côté du polygone régulier circonscrit de n côtés, qui se compose de n triangles égaux au triangle COD. En se reportant à la figure, on a, pour l'aire de ce triangle,

$$\text{tr.COD} = \text{CI.OI} = R^2 \tang \frac{\alpha}{2}.$$

L'aire S du polygone régulier circonscrit de n côtés est donc

$$S = n R^2 \tang \frac{\alpha}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{s}{S} = \frac{\sin \alpha}{2 \tang \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Si l'on suppose, par exemple, $n = 6$, on a $\frac{\alpha}{2} = 30°$ et, par suite (15), $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le rapport des aires des hexagones réguliers inscrit et cir-

conscrit au même cercle est donc égal à $\frac{3}{4}$: c'est là un théorème connu de Géométrie.

Désignons maintenant par s' et par S' les aires des polygones réguliers inscrit et circonscrit de $2n$ côtés. On a évidemment sans calcul, en remplaçant simplement dans les formules précédentes n par $2n$ et α par $\frac{\alpha}{2}$,

$$s' = nR^2 \sin\frac{\alpha}{2}, \quad S' = 2nR^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}.$$

Comparons s à s' et s' à S. Nous trouverons

$$\frac{s}{s'} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{s'}{S} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2};$$

par suite,

$$\frac{s}{s'} = \frac{s'}{S},$$

c'est-à-dire que *l'aire du polygone régulier inscrit de* $2n$ *côtés est moyenne proportionnelle entre les aires des polygones réguliers inscrit et circonscrit de* n *côtés.*

Par exemple, l'aire du carré inscrit étant égale à $2R^2$ et celle du carré circonscrit à $4R^2$, on peut en conclure immédiatement, en prenant la moyenne proportionnelle des deux expressions, que l'aire de l'octogone régulier inscrit est égale à $\sqrt{2R^2.4R^2}$ ou à $2R^2\sqrt{2}$; c'est ce qu'on peut facilement vérifier par la Géométrie.

Comparons encore S' à s'. Nous aurons

$$\frac{S'}{s'} = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

On a d'ailleurs (59)

$$1 + \cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4}$$

et, par suite, on peut écrire

$$\frac{S'}{s'} = \frac{2}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Comme on vient d'obtenir

$$\frac{s}{s'} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

on trouve finalement

$$\frac{S'}{s'} = \frac{2}{1 + \frac{s}{s'}} = \frac{2s'}{s + s'}$$

ou, d'après la relation $s' = \sqrt{s.S}$,

$$S' = \frac{2s'^2}{s + s'} = \frac{2sS}{s + s'}.$$

182. III. *Expression trigonométrique de l'aire d'un segment circulaire.*

Nous allons compléter ici ce que nous avons indiqué au n° 262 de la *Géométrie*.

Nous voulons, par exemple, calculer l'aire du segment circulaire AIB (*fig.* 35), dont l'angle au centre est égal à $\alpha°$. Ce segment circulaire est la différence du secteur circulaire AOB et du triangle isocèle AOB. Or, on a (*Géom.*, 261)

$$\text{sect. circ. AOB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad \text{et} \quad \text{tr. AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha.$$

Par conséquent, on peut écrire, en désignant par S l'aire du segment,

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \sin\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}\left(1 - \frac{180 \sin\alpha}{\pi\alpha}\right).$$

Pour rendre cette formule calculable par logarithmes, nous emploierons un angle auxiliaire φ déterminé par la condition

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{180 \sin\alpha}{\pi\alpha}.$$

On a alors (82)

$$1 - \operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\varphi}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

Il en résulte

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha \sqrt{2}}{360 \cos\varphi}\cos(45° + \varphi).$$

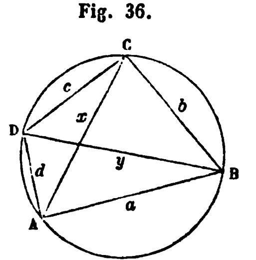
Pour vérifier cette formule, supposons $\alpha = 180°$. Nous aurons alors $\sin\alpha = 0$ et, par suite, $\operatorname{tang}\varphi = 0$, $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$. Comme $\cos 45°$ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on trouve précisément dans ce cas $S = \frac{\pi R^2}{2}$, comme cela doit être.

183. IV. Propriétés du quadrilatère inscriptible.

On suppose donnés les quatre côtés a, b, c, d, *d'un quadrilatère inscriptible* ABCD (*fig.* 36), *et l'on demande de calculer ses angles, ses diagonales, son aire et le rayon du cercle circonscrit.*

Le quadrilatère étant *inscriptible*, ses angles opposés A et C, B et D, sont *supplémentaires*.

Fig. 36.



Sa diagonale $AC = x$ le partageant en deux triangles ABC, ACD, on peut poser à la fois (148)

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D.$$

Mais $\cos D = -\cos B$, et il vient

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 + 2cd\cos B,$$

d'où l'on déduit

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Comme cette formule n'est pas calculable par logarithmes, nous nous servirons de la relation (59)

$$\tang\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}},$$

qui devient, par substitution,

$$\tang\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}}{1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}}}.$$

On obtient sans peine, en simplifiant et en appliquant une décomposition connue,

$$\tang\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{(a + b^2) - (c - d)^2}} = \sqrt{\frac{(c + d + a - b)(c + d + b - a)}{(a + b + c - d)(a + b + d - c)}}.$$

Désignons, pour simplifier, par $2p$ le périmètre du quadrilatère. Nous

urons successivement

$$\begin{aligned}
a+b+c+d &= 2p,\\
b+c+d-a &= 2p-2a = 2(p-a),\\
a+c+d-b &= 2p-2b = 2(p-b),\\
a+b+d-c &= 2p-2c = 2(p-c),\\
a+b+c-d &= 2p-2d = 2(p-d).
\end{aligned}$$

On trouve alors, en supprimant le facteur commun qui apparaît,

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

On a de même, en permutant simplement les lettres b et d comme l'indique la figure,

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Connaissant A et B, il en résulte $C = 180° - A$ et $D = 180° - B$.

Passons à la détermination des diagonales $AC = x$ et $BD = y$.

Si, dans la première expression de x^2 indiquée précédemment, nous remplaçons $\cos B$ par sa valeur, il vient

$$\begin{aligned}
x^2 = a^2+b^2-2ab\,\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} &= \frac{(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab}{ab+cd}\\
= \frac{a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2}{ab+cd} &= \frac{ad(ac+bd)+bc(ac+bd)}{ab+cd}\\
= \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$x = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

et ensuite, par de simples et évidentes permutations de lettres,

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

Si l'on multiplie et si l'on divise les valeurs de x et de y l'une par l'autre, on obtient les relations remarquables

$$xy = ac+bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

qui démontrent ces deux théorèmes de Géométrie (*voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4[e] édition, 240, 241):

Dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des deux diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, et leur rapport est égal à

celui des sommes formées par les produits des côtés qui aboutissent respectivement aux extrémités de chaque diagonale.

Cherchons maintenant l'aire du quadrilatère, que nous représenterons par S. En considérant les deux triangles ABC, ACD, dans lesquels les angles B et D sont supplémentaires, on a immédiatement

$$S = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D = \frac{ab + cd}{2} \sin B.$$

Tout revient donc à calculer $\sin B$.

D'après la valeur de $\cos B$, on peut écrire

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2} = \sqrt{\frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}}$$

En faisant usage de transformations bien connues, on obtient

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{1}{2(ab + cd)} \sqrt{[2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2][2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2]} \\ &= \frac{1}{2(ab + cd)} \sqrt{[(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2]} \\ &= \frac{1}{2(ab + cd)} \sqrt{(a + b + c - d)(a + b + d - c)(c + d + a - b)(c + d + b - a)} \end{aligned}$$

ou, en exprimant les facteurs placés sous le radical en fonction du périmètre $2p$ du quadrilatère, comme nous l'avons fait pour calculer $\tang \frac{B}{2}$,

$$\sin B = \frac{2}{ab + cd} \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

La valeur de l'aire du quadrilatère est donc

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

Enfin, R étant le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère, le triangle inscrit ABC permet de poser (147)

$$2R = \frac{x}{\sin B},$$

d'où

$$R = \frac{x}{2 \sin B} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)(ab + cd)}{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}.$$

En faisant $d = 0$ dans toutes les formules relatives au quadrilatère inscriptible, on retrouve, comme cela doit être, toutes les formules correspondantes applicables aux triangles quelconques.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES DE TRIGONOMÉTRIE PRATIQUE.

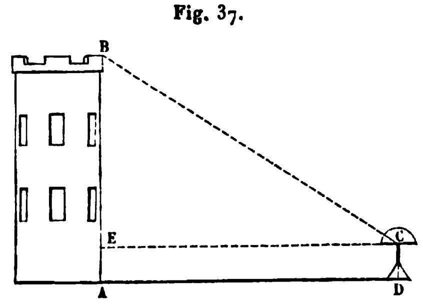
184. Nous nous proposons de traiter dans ce Chapitre quelques questions qui se présentent fréquemment dans le *Levé des plans*. Nous supposons donc le lecteur familiarisé avec cette partie de la Géométrie appliquée. Il pourra, du reste, trouver les notions de *Topographie* qui lui seraient nécessaires, exposées avec beaucoup de soin dans la NOTE III des ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse (3e édition, 1881).

Dans les problèmes que nous allons parcourir, les données sont toujours des *angles*, évalués à l'aide du *graphomètre*, et une droite limitée prise pour *base* et mesurée avec la *chaîne d'arpenteur*.

Mesure des hauteurs.

185. I. *Déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible et qui repose sur un terrain sensiblement horizontal* (*fig.* 37).

Fig. 37.



Soit AB la hauteur à évaluer. On trace sur le terrain, à partir du point A, une *base* horizontale AD qu'on mesure avec

la chaîne et qui, autant que possible, doit être *à peu près égale* à la hauteur AB elle-même. On établit alors en D un graphomètre dont le centre doit se projeter sur le terrain précisément en D. On peut facilement s'assurer que cette condition est remplie, à l'aide d'un *fil à plomb*. On place le *limbe* ou le cercle du graphomètre verticalement, de manière que son plan renferme le point extrême B et que son diamètre fixe soit horizontal et parallèle à AD.

Cela fait, on dirige l'*alidade* mobile du graphomètre vers le point B, et on lit sur l'instrument le nombre de degrés et minutes de l'angle BCE, la droite CE étant le prolongement de son diamètre fixe et ayant même longueur que la base AD. En considérant le triangle rectangle BEC, on a

$$BE = CE \tang BCE,$$

et, en ajoutant à BE la hauteur CD = AE du centre du graphomètre au-dessus du terrain horizontal, on obtient la hauteur AB cherchée.

Nous avons dit que la base AD = CE devait être prise à peu près égale à la hauteur qu'on voulait mesurer. Il faut expliquer pourquoi.

Le cercle du graphomètre est divisé en demi-degrés et, en employant un *vernier*, on arrive, en général, à évaluer les angles à 2′ près. Tous les angles calculés à l'aide de l'instrument peuvent donc être entachés d'une certaine erreur, variable d'un observateur à l'autre, mais constante en général pour chaque observateur, et que nous désignerons par ε.

Admettons, par suite, que la valeur exacte de l'angle BCE ou C soit $C + \varepsilon$. L'erreur commise sur $BE = CE \tang C$ ou sur la hauteur à déterminer est alors

$$CE[\tang(C+\varepsilon) - \tang C] = BE\,\frac{\tang(C+\varepsilon) - \tang C}{\tang C}.$$

Mais (84)

$$\tang(C+\varepsilon) - \tang C = \frac{\sin[(C+\varepsilon) - C]}{\cos(C+\varepsilon)\cos C}.$$

Par conséquent, l'erreur que nous cherchons à évaluer a pour expression, en multipliant par $\frac{BE}{\tang C}$,

$$BE\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos(C+\varepsilon)\sin C}.$$

D'après la relation connue (81)

$$\sin(2C+\varepsilon)-\sin\varepsilon = 2\cos(C+\varepsilon)\sin C,$$

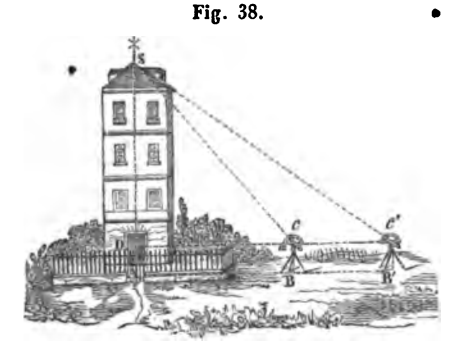
cette expression devient

$$BE\frac{2\sin\varepsilon}{\sin(2C+\varepsilon)-\sin\varepsilon}.$$

Et l'on voit que l'erreur commise sur la hauteur AB est *minimum*, lorsque $\sin(2C+\varepsilon)$ devient *maximum*, c'est-à-dire, puisque la constante ε est une quantité très-petite, lorsque $2C$ s'approche de 90° ou C de 45°. Le triangle rectangle BCE doit donc être, autant que possible, isocèle.

186. II. *Déterminer la hauteur d'un édifice qui repose sur un terrain sensiblement horizontal, mais dont le pied est inaccessible* (*fig.* 38).

Fig. 38.



La hauteur à mesurer est ici AS. On installe un graphomètre en un point B' convenablement choisi, le centre c' de l'instrument se projetant en B'; puis, en prenant les mêmes précautions que dans le problème précédent, on évalue l'angle $Sc'D$. Cela fait, on transporte l'instrument parallèlement à lui-même, de manière que la nouvelle position c du centre se projette en B, sur l'alignement B'B parallèle au diamètre horizontal du limbe à la première *station*. On évalue alors l'angle ScD et l'on chaîne la distance $B'B = c'c$.

Ces éléments étant déterminés, le triangle Scc' donne

$$Sc' = \frac{cc'\sin Scc'}{\sin cSc'}.$$

Les angles Scc' et ScD étant supplémentaires et l'angle cSc' étant égal à la différence des angles ScD et $Sc'D$, cette relation devient

$$Sc' = \frac{cc' \sin ScD}{\sin(ScD - Sc'D)}.$$

Le triangle rectangle $Sc'D$ donne d'ailleurs

$$SD = Sc' \sin Sc'D.$$

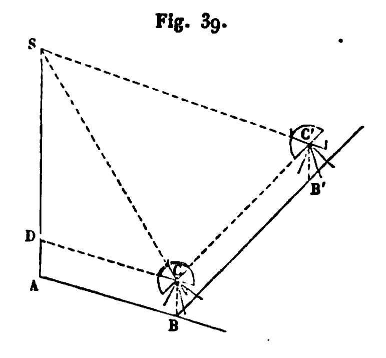
On a donc finalement

$$SD = \frac{cc' \sin ScD \sin Sc'D}{\sin(ScD - Sc'D)}.$$

Ajoutant à SD la hauteur du centre du graphomètre au-dessus du sol, on obtient la hauteur AS.

187. III. *Déterminer la hauteur d'une montagne* (*fig.* 39).

Fig. 39.



Le procédé que nous allons indiquer est, au fond, le même que dans le cas précédent (186), auquel il peut aussi s'appliquer. La seule différence, c'est qu'en transportant le graphomètre à la seconde station, on change d'alignement.

Soient S le sommet de la montagne et SA la hauteur à mesurer.

On choisit une première station B qui soit, autant que possible, dans le plan horizontal du pied A de la hauteur inconnue. On en choisit une seconde B', telle qu'on puisse chaîner facilement la base BB', et l'on plante en B' un *jalon* muni d'un signal.

Cela posé, on établit le graphomètre à la première station B.

On amène d'abord le limbe de l'instrument dans le plan SCC′ déterminé par CS et par la parallèle CC′ à BB′, et l'on mesure l'angle SCC′. On fait ensuite tourner le limbe jusqu'à ce qu'il soit dans le plan vertical SCD et, son diamètre fixe étant horizontal ou parallèle à BA, on mesure l'angle SCD. On transporte alors l'instrument à la seconde station B′, en le remplaçant en B par un jalon également muni d'un signal, et on mesure l'angle SC′C comme on a mesuré l'angle SCC′. Tous ces éléments étant ainsi évalués, et CC′ étant égal à BB′, le triangle SCC′ donne

$$SC = \frac{CC' \sin SC'C}{\sin CSC'} = \frac{CC' \sin SC'C}{\sin(SCC' + SC'C)}.$$

Le triangle rectangle SCD donne à son tour

$$SD = SC \sin SCD$$

ou

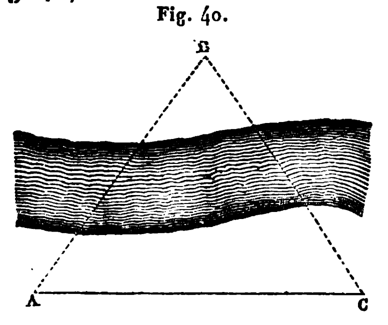
$$SD = \frac{CC' \sin SC'C \sin SCD}{\sin(SCC' + SC'C)}.$$

En ajoutant à SD la hauteur CB du centre du graphomètre au-dessus du sol, on a la hauteur SA.

Mesure des distances inaccessibles.

188. I. *Déterminer la distance d'un point donné à un point inaccessible* (*fig.* 40).

Fig. 40.



Soient A le point donné et B le point inaccessible. Il faut évaluer AB.

On mesure avec la chaîne, sur la partie accessible du terrain, une base AC des extrémités de laquelle on puisse aper-

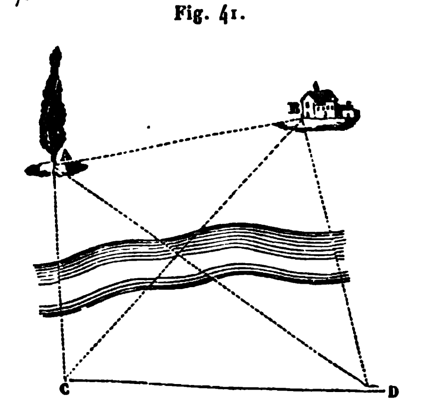
cevoir le point B; puis, à l'aide d'un graphomètre, on mesure successivement, dans le plan ABC, les angles BAC et BCA. La base AC doit être telle que les angles ainsi mesurés ne s'écartent pas beaucoup de 45° (on sait que les angles trop aigus nuisent à l'exactitude des résultats).

Le triangle ABC, où l'on connaît un côté et deux angles, donne alors

$$AB = \frac{AC \sin BCA}{\sin ABC} = \frac{AC \sin BCA}{\sin(BAC + BCA)}.$$

189. II. ***Déterminer la distance de deux points inaccessibles*** (*fig.* 41).

Fig. 41.



Soient A et B les deux points inaccessibles. Il faut mesurer AB.

On *chaîne*, sur la partie accessible du terrain, une base CD des extrémités de laquelle on puisse apercevoir les points A et B. Puis, à l'aide du graphomètre, on détermine les quatre angles formés par CD avec les côtés adjacents et les diagonales du quadrilatère ABCD. Si ce quadrilatère est *plan*, l'angle ADB est connu comme différence des angles CDB et CDA. Mais si, comme il arrive presque toujours, ce quadrilatère est *gauche*, on doit mesurer directement l'angle ADB.

Cela posé, on connaît dans le triangle CDA un côté CD et deux angles CDA, ACD : on peut donc calculer AD. De même, on connaît dans le triangle CDB un côté CD et deux angles CDB, BCD : on peut donc calculer BD. Le triangle ADB, dans lequel on connaît alors deux côtés et l'angle compris, permet enfin de déterminer la distance inaccessible AB.

On a successivement, en désignant par a, b, d, les côtés du

dernier triangle, et par A, B, D, ses angles :

$$b = \frac{\text{CD} \sin \text{ACD}}{\sin \text{CAD}}, \quad a = \frac{\text{CD} \sin \text{BCD}}{\sin \text{CBD}}.$$

Pouvant connaître les côtés b et a par leurs logarithmes, on pose

$$\frac{a}{b} = \text{tang}\,\varphi,$$

et le triangle ADB donne (166)

$$\text{tang}\,\frac{\text{B}-\text{A}}{2} = \text{tang}(45^\circ - \varphi)\cot\frac{\text{D}}{2},$$

relation à l'aide de laquelle on calcule les angles A et B, puisque $\frac{\text{B}+\text{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\text{D}}{2}$. On a ensuite

$$\text{AB} \quad \text{ou} \quad d = \frac{a \sin \text{D}}{\sin \text{A}}.$$

Les formules logarithmiques à employer sont, par conséquent,

$$\log \text{tang}\,\varphi = \log a - \log b,$$

c'est-à-dire

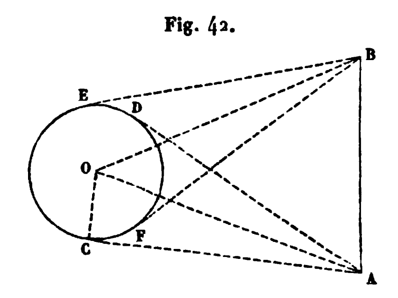
$$\log \text{tang}\,\varphi = \log\sin \text{BCD} + \overline{\text{L}}\sin \text{CBD} + \overline{\text{L}}\sin \text{ACD} + \log\sin \text{CAD},$$

$$\log \text{tang}\,\frac{\text{B}-\text{A}}{2} = \log \text{tang}\,(45^\circ - \varphi) + \log\cot\frac{\text{D}}{2},$$

$$\log d = \log \text{CD} + \log\sin \text{BCD} + \overline{\text{L}}\sin \text{CBD} + \log\sin \text{D} + \overline{\text{L}}\sin \text{A}.$$

190. III. *Déterminer l'axe et le rayon d'une tour circulaire dont le pied est inaccessible* (*fig.* 42).

Fig. 42.



Le terrain est supposé sensiblement horizontal. On mesure,

sur sa partie accessible, une base AB. En prenant pour stations les extrémités A et B, on peut, à l'aide d'un graphomètre dont on placera le limbe horizontalement et dont la droite des centres aux deux stations sera égale et parallèle à AB, mener des rayons visuels AC et AD, BE et BF, tangents à la section correspondante de la tour. On mesure en même temps les angles CAB et DAB, EBA et FBA.

Cela posé, la question sera résolue si l'on détermine la position O du centre de la section de la tour et le rayon OC de cette section.

Or, dans le triangle OAB, on connaît le côté AB et les deux angles adjacents; car (*Géom.*, 128) AO et BO sont les bissectrices des angles CAD et EBF, de sorte qu'on a

$$\text{OAB} = \frac{\text{CAB} + \text{DAB}}{2}, \quad \text{OBA} = \frac{\text{EBA} + \text{FBA}}{2}.$$

On peut donc calculer AO et BO, qui se trouvent connus de position et de grandeur, et le point O est lui-même déterminé.

Quant au rayon OC, le triangle rectangle ACO donne

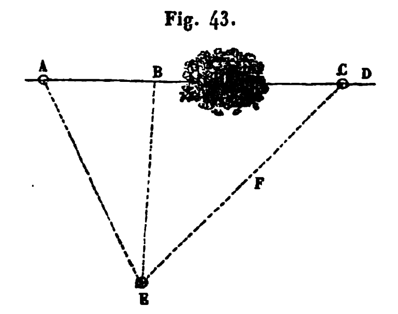
$$\text{OC} = \text{OA}.\sin \text{CAO},$$

et l'on a

$$\text{CAO} = \frac{\text{CAB} - \text{DAB}}{2}.$$

191. IV. *Prolonger un alignement au delà d'un obstacle qui arrête la vue* (*fig.* 43).

Fig. 43.



On veut continuer exactement la droite ou *l'alignement* AB au delà de l'obstacle O.

En partant d'un point A convenablement choisi, on chaîne la distance AB. On prend alors, sur la partie accessible du terrain, un point E d'où l'on puisse apercevoir à la fois AB et le prolongement qu'on cherche à déterminer. En plaçant un graphomètre aux deux stations A et B, on mesure les angles BAE et ABE. Dans le triangle ABE, on connaît donc un côté et deux angles, et l'on peut calculer le côté AE.

Supposons maintenant que CD soit le prolongement cherché, et admettons qu'on trace à partir du point E un alignement EF qui vienne couper ce prolongement au point C : c'est le point C qu'il faut déterminer. Or, en transportant le graphomètre au point E, on peut mesurer l'angle AEF. On connaît alors, dans le triangle AEC, un côté et deux angles : ce qui permet de calculer EC et l'angle ACE. Il ne reste plus qu'à marquer, à l'aide de la chaîne et sur l'alignement EF, la véritable position du point C; puis, avec le graphomètre, à tracer CD de manière que l'angle ECD soit le supplément de l'angle ACE.

Si l'alignement AB était *inaccessible*, il faudrait par le point E, sur la partie accessible du terrain, tracer une base convenable qu'on rattacherait à AB, comme nous l'avons indiqué dans le problème du n° 189; ce qui permettrait, en opérant comme dans ce même problème, de calculer les éléments du triangle ABE. On terminerait ensuite la question comme ci-dessus.

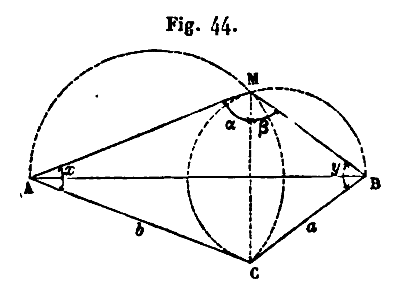
Problème de la Carte.

192. *On donne trois points* A, B, C, *situés sur un terrain uni et rapportés sur une Carte; les distances* AC *et* CB *ayant été vues d'un quatrième point* M *sous des angles* α *et* β *qu'on a mesurés, on demande de rapporter ce point* M *sur la carte* (*fig.* 44).

La solution géométrique est évidente. On n'a qu'à décrire sur AC et sur BC des segments capables des angles α et β (*Géom.*, 131), pour obtenir deux lieux géométriques du point M. Ce point se trouve donc sur la Carte, au second point d'intersection des deux circonférences qui ont déjà le point C commun. Mais, si ces circonférences se coupent sous un angle trop aigu, le point M est mal déterminé. On peut alors avoir recours à la Trigonométrie, comme il suit.

Le triangle ABC est donné sur la Carte. On connaît, par suite, le côté $BC = a$, le côté $AC = b$, et l'angle C.

Fig. 44.



Prenons pour inconnues principales l'angle $MAC = x$ et l'angle $MBC = y$. L'angle AMB représentant la somme des angles α et β, le quadrilatère AMBC donne immédiatement

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + C).$$

Il faut donc chercher la différence $x - y$. Pour cela, nous exprimerons dans les deux triangles AMC et BMC la valeur du côté MC. On a

$$MC = \frac{b \sin x}{\sin \alpha}, \quad MC = \frac{a \sin y}{\sin \beta},$$

d'où

$$\frac{b \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin y}{\sin \beta} \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}.$$

Posons $\dfrac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} = \operatorname{tang} \varphi$. Il vient

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{1},$$

et l'on en déduit facilement

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tang} \varphi - 1}{\operatorname{tang} \varphi + 1} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ)$$

ou (83)

$$\frac{\operatorname{tang} \dfrac{x - y}{2}}{\operatorname{tang} \dfrac{x + y}{2}} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ).$$

Or $\frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta+C}{2}$. On a donc

$$\tang \frac{x-y}{2} = \tang(\varphi - 45^\circ) \tang\left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta+C}{2}\right).$$

Cette formule permet de calculer la différence $\frac{x-y}{2}$ et, comme on connaît la somme $\frac{x+y}{2}$, on trouve immédiatement les inconnues x et y. Les triangles AMC et BMC sont alors complètement déterminés, puisqu'on y connaît un côté et deux angles, et l'on peut calculer la distance du point M au point C. On marque ensuite nettement la position du point M en construisant les angles x et y et en traçant, du point C comme centre avec CM pour rayon, un petit arc de cercle.

Il peut arriver qu'on ait

$$180^\circ - \frac{\alpha+\beta+C}{2} = 90^\circ.$$

$\tang\left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta+C}{2}\right)$ prend alors une valeur infinie. Dans ce cas, on a

$$\alpha+\beta+C = 180^\circ.$$

Les angles C et AMB sont supplémentaires, le quadrilatère AMBC est inscriptible, et les deux segments capables des angles α et β, décrits sur les côtés AC et BC, coïncident. Il y a donc *indétermination* au point de vue géométrique.

Il en est de même au point de vue algébrique. En effet, le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère AMBC (*fig.* 44) a pour expression, soit $\frac{b}{\sin\alpha}$ relativement au triangle AMC, soit $\frac{a}{\sin\beta}$ relativement au triangle BMC (147). On en conclut

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta},$$

c'est-à-dire

$$\tang\varphi = \frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta} : \frac{b}{\sin\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = 45^\circ.$$

Le facteur $\tang\left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta+C}{2}\right)$ étant *infini*, et le fac-

teur $\tang(\varphi - 45°)$ étant *nul*, la valeur de $\tang\frac{x-y}{2}$ se présente bien sous forme indéterminée (t. I, *Alg. élém.*, 118); ce qui doit être, puisque le point M peut se trouver, comme on vient de le dire, en un point quelconque du cercle circonscrit au quadrilatère AMBC.

On pourrait d'ailleurs avoir $\varphi = 45°$, sans que la condition $\alpha + \beta + C = 180°$ fût remplie (il suffit, pour qu'on ait $\varphi = 45°$, que les deux segments capables correspondent à des cercles égaux); et alors les deux angles x et y seraient simplement égaux entre eux et à $180° - \frac{\alpha + \beta + C}{2}$.

LIVRE TROISIÈME.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

193. Un triangle sphérique renferme trois côtés et trois angles. *Résoudre* un triangle sphérique, c'est déterminer *numériquement* trois quelconques de ces six éléments en fonction des trois autres.

Nous conviendrons de désigner les angles du triangle considéré par les lettres A, B, C, et les côtés *opposés*, exprimés en degrés comme les angles eux-mêmes, par les lettres correspondantes a, b, c. Si le triangle est *rectangle*, A désignera toujours l'angle droit et, par suite, a l'hypoténuse.

Si l'on connaît les côtés d'un triangle sphérique par leurs nombres de degrés, il est facile de trouver leur longueur en mètres. On a, en effet, la formule (*Géom.*, 230)

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Nous ne nous occuperons que des triangles sphériques *dont les côtés sont moindres que* 180°, et nous rappellerons les propositions suivantes.

Nous remarquerons d'abord que, si l'on joint le centre de la sphère au sommet d'un pareil triangle, on forme un angle trièdre dont les faces sont mesurées par les côtés du triangle

sphérique et dont les angles dièdres sont précisément ceux du triangle (*Géom.*, 534). Il en résulte que *les angles du triangle doivent aussi être inférieurs à* 180°.

Dans tout triangle sphérique, *chaque côté est plus petit que la somme des deux autres; la somme des trois côtés est inférieure à* 360° (*Géom.*, 536, 540).

Dans tout triangle sphérique, *à un plus grand angle est opposé un plus grand côté, et réciproquement* (*Géom.*, 537).

Étant donné un triangle sphérique, *il en existe toujours un autre dont les côtés et les angles sont les suppléments respectifs des angles et des côtés du premier triangle. Ces deux triangles sont appelés* supplémentaires *ou* polaires, *et on peut les construire l'un au moyen de l'autre* (*Géom.*, 541, 542, 543).

La somme des angles d'un triangle sphérique est toujours comprise entre deux et six droits (*Géom.*, 546).

Enfin, *l'excès sphérique* d'un triangle est l'excès sur π de la somme de ses angles évalués en parties du rayon pris comme unité de longueur (*Géom.*, 232). *Cet excès mesure* précisément *l'aire du triangle sphérique, quand on prend pour unité d'aire le triangle sphérique trirectangle,* alors représenté par $\frac{\pi}{2}$ (*Géom.*, 581).

194. Nous allons d'abord établir les relations numériques qui lient les côtés et les angles d'un triangle sphérique *quelconque*, et qui sont au nombre de *quinze*. Nous en déduirons ensuite les *dix* relations qui se rapportent spécialement aux triangles sphériques *rectangles*.

La relation fondamentale, celle dont on peut tirer toutes les autres, est la relation qui existe entre les trois côtés du triangle et l'un de ses angles.

FORMULES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES QUELCONQUES.

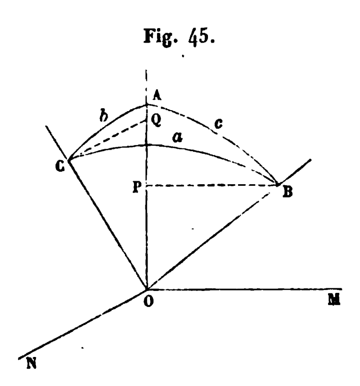
Formules renfermant les trois côtés et un angle.

195. Soit ABC (*fig.* 45) un triangle sphérique quelconque. En joignant ses sommets au centre O de la sphère correspondante, on forme l'angle trièdre OABC qui a ses dièdres égaux

ıux angles A, B, C, du triangle, et qui a ses faces mesurées par les mêmes nombres que les côtés *a*, *b*, *c*, du triangle, lorsqu'on prend le rayon de la sphère pour unité de longueur.

Soit MON l'angle rectiligne du dièdre OA. Abaissons sur 'arête OA les perpendiculaires BP et CQ; elles seront respecivement parallèles à OM et à ON.

Fig. 45.



Il est clair que, l'arc *c* étant supposé décrit du sommet A vers le sommet B, + BP représentera toujours $\sin c$, puisque *c* est moindre que π; tandis que OP, pris avec le signe + si *c* est moindre que $\frac{\pi}{2}$, avec le signe — si *c* surpasse $\frac{\pi}{2}$, représentera $\cos c$.

De même, l'arc *b* étant supposé décrit du sommet A vers le sommet C, + CQ représentera $\sin b$, tandis que $\cos b$ sera représenté par $\pm$ OQ, suivant que *b* sera moindre ou plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

Cela posé, projetons le *contour triangulaire* OPBO sur la direction OC, en nous rappelant que, lorsqu'un contour est *fermé*, la somme des projections de ses côtés sur un axe donné est *nulle* (48).

La projection du côté OP sera OP $\cos b$, si OP est dirigé suivant OA; cette projection sera OP $\cos(\pi - b)$ ou — OP $\cos b$, si OP est dirigé suivant le prolongement de OA. Mais, dans le premier cas, on a OP $= \cos c$; dans le second, on a — OP $= \cos c$. Par conséquent, la projection du côté OP a toujours pour expression

$$\cos b \cos c.$$

La projection de PB sur OC est toujours

$$\sin c \cos \mathrm{COM},$$

puisque PB est parallèle à OM.

Enfin, d'après des considérations pareilles à celles qui précèdent, la projection de $\mathrm{OB} = 1$ sur OC étant toujours $\cos a$, celle de BO sera toujours (46)

$$-\cos a.$$

On a donc, dans toutes les hypothèses,

$$\cos b \cos c + \sin c \cos \mathrm{COM} - \cos a = 0.$$

Mais, si l'on projette sur OM le contour triangulaire OQCO, la projection de OQ est nulle, puisque OA est perpendiculaire au plan MON. La projection de QC, parallèle à ON, est toujours

$$\sin b \cos \mathrm{A}.$$

Enfin, la projection de $\mathrm{OC} = 1$ étant $\cos \mathrm{COM}$, la projection de CO est

$$-\cos \mathrm{COM}.$$

On a donc toujours

$$\sin b \cos \mathrm{A} - \cos \mathrm{COM} = 0$$

ou

$$\cos \mathrm{COM} = \sin b \cos \mathrm{A}.$$

En substituant dans la première égalité trouvée, on obtient la formule complètement générale

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}.$$

On peut l'exprimer en disant que *le cosinus d'un côté est égal au produit des cosinus des deux autres côtés, augmenté du produit des sinus des mêmes côtés multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

En l'appliquant à chaque côté, on obtient ce *premier groupe de trois formules :*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \mathrm{B}, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \mathrm{C}. \end{aligned} \right.$$

196. On peut remarquer immédiatement que, puisqu'on peut prendre arbitrairement trois des six éléments d'un triangle sphérique quelconque (*Géom.*, 564), il ne peut y avoir *a priori* entre ses éléments aucune relation *distincte* des trois précédentes. Et, en effet, si elle existait, on pourrait y remplacer les trois angles A, B, C, par leurs valeurs déduites des formules du groupe (1), et l'on aurait ainsi une équation de condition *non identique* entre les côtés *a, b, c,* du triangle sphérique; ce qui est absurde. Mais on peut déduire des relations fondamentales que nous venons d'établir d'autres formules indispensables à connaître.

Formules renfermant les trois angles et un côté.

197. Considérons le triangle sphérique supplémentaire du triangle ABC. Si l'on désigne ses côtés et ses angles par les mêmes lettres accentuées, on aura, d'après ce qui précède (195),

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Mais (193)

$$a' = 180° - A, \quad b' = 180° - B, \quad c' = 180° - C,$$
$$A' = 180° - a;$$

c'est-à-dire

$$\cos a' = -\cos A, \quad \cos b' = -\cos B, \quad \cos c' = -\cos C,$$
$$\sin b' = \sin B, \quad \sin c' = \sin C, \quad \cos A' = -\cos a.$$

On peut donc écrire

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

ou, en changeant les signes des deux membres,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

On est ainsi conduit à un nouveau groupe de trois formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases}$$

Formules renfermant deux côtés et les deux angles opposés.

198. De la relation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on déduit

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Par suite,

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

c'est-à-dire, en remplaçant au numérateur après réduction $\sin^2 b \sin^2 c$ par $(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c)$,

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

ou

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

On en déduit

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Cette valeur du rapport $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}$ ne change pas quand on permute les angles A, B, C et les côtés *a*, *b*, *c*. On a donc

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c};$$

et, comme il s'agit d'angles et de côtés moindres que 180°, cette première série de rapports égaux entraîne la suivante :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \tag{3}$$

Ainsi, dans tout triangle sphérique, *les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.*

Formules renfermant deux côtés, l'angle qu'ils comprennent et l'angle opposé à l'un d'eux.

199. Prenons la relation (195)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et remplaçons $\cos c$ par sa valeur

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

nous aurons ainsi une relation où entreront les côtés a, b et les angles C, A. Il viendra

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$

d'où

$$\cos a(1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Si l'on remplace $(1 - \cos^2 b)$ par $\sin^2 b$, et si l'on divise les deux membres de l'égalité par $\sin a \sin b$, on trouve

$$\frac{\cos a \sin b}{\sin a} = \cos b \cos C + \frac{\sin c \cos A}{\sin a}.$$

Mais on a, pour éliminer le côté c (198),

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A};$$

le dernier terme du second membre revient donc à $\sin C \cot A$, comme le premier membre à $\cot a \sin b$. Par conséquent, la relation cherchée est la suivante :

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Nous obtenons ainsi un dernier groupe de six formules, car on peut considérer, en même temps que les côtés a, b et l'angle C, soit l'angle A opposé au côté a, soit l'angle B opposé au côté b. Ces six formules sont :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \cot a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \cot A, \\ \cot b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B, \\ \cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A, \\ \cot c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C, \\ \cot b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B, \\ \cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C. \end{aligned} \right.$$

200. *En résumé,* nous avons *quatre* groupes, contenant en tout *quinze* formules : chacune de ces formules renferme *quatre éléments,* et le nombre 15 est celui des combinaisons qu'on peut former avec *six* objets pris *quatre à quatre.*

FORMULES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES.

201. Pour avoir les formules qui conviennent à la résolution des triangles *rectangles,* il suffit de faire dans les précédentes $A = 90°$. On obtient ainsi les *dix* formules suivantes, qui contiennent chacune *trois* éléments : l'angle droit étant toujours donné, il ne reste à considérer que *cinq* éléments dans le triangle, et *dix* est précisément le nombre des combinaisons qu'on peut former avec *cinq* objets pris *trois à trois.* Voici les dix formules :

$$(5) \qquad \cos a = \cos b \cos c,$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \sin b = \sin a \sin B, \\ \sin c = \sin a \sin C, \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \tang b = \tang a \cos C, \\ \tang c = \tang a \cos B, \end{cases}$$

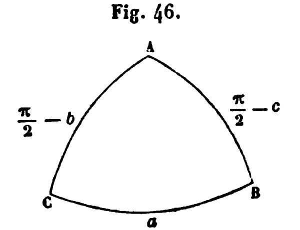
$$(8) \qquad \begin{cases} \tang b = \sin c \tang B, \\ \tang c = \sin b \tang C, \end{cases}$$

$$(9) \qquad \cos a = \cot B \cot C,$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \cos B = \sin C \cos b, \\ \cos C = \sin B \cos c. \end{cases}$$

202. On en fait un usage continuel. Pour les retrouver, on peut se servir du moyen mnémonique suivant.

Fig. 46.



Soit le triangle rectangle ABC (*fig.* 46). Considérons les cinq éléments de ce triangle dans l'ordre où ils se présentent, en faisant abstraction de l'angle droit A et en ayant soin de remplacer les côtés b et c de cet angle par leurs compléments $\frac{\pi}{2} - b$ et $\frac{\pi}{2} - c$.

Le cosinus de l'un quelconque des cinq éléments est alors égal au produit des cotangentes des deux éléments adjacents ou au produit des sinus des deux autres éléments.

Si l'on demande, par exemple, une relation entre les côtés a, b, c, on aura (puisque les côtés b et c sont séparés de a par les angles B et C)

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos b \cos c.$$

C'est la relation (5).

Si l'on demande une relation entre l'angle B et les côtés a et b, il viendra (puisque le côté b est séparé du côté a et de l'angle B par l'angle C et le côté c)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin a \sin B \quad \text{ou} \quad \sin b = \sin a \sin B.$$

C'est la première des deux formules (6).

Enfin, si l'on demande une relation entre le côté a et les angles B et C, on aura (le côté a étant adjacent aux angles B et C)

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

C'est la relation (9).

203. Il est essentiel de s'arrêter un moment sur les propriétés des triangles rectangles qui résultent des relations précédentes (201).

La relation (5)

$$\cos a = \cos b \cos c$$

exprime que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux côtés de l'angle droit.*

Par suite, les trois cosinus sont positifs, ou il n'y en a que deux négatifs. Le cosinus d'un arc plus petit que 180° étant positif ou négatif, suivant que cet arc est moindre ou plus grand que 90°, il en résulte que, dans tout triangle rectangle, *les trois côtés sont ensemble inférieurs à 90°, ou un seul remplit cette condition* (*Géom.*, 564, 3°).

Les équations (6)

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\sin c = \sin a \sin C,$$

montrent que *le sinus de chaque côté de l'angle droit est égal*

au sinus de l'hypoténuse multiplié par le sinus de l'angle opposé.

Les équations (7)

$$\tang b = \tang a \cos C,$$
$$\tang c = \tang a \cos B,$$

montrent que *la tangente de chaque côté de l'angle droit est égale à la tangente de l'hypoténuse, multipliée par le cosinus de l'angle adjacent.*

Et les équations (8)

$$\tang b = \sin c \tang B,$$
$$\tang c = \sin b \tang C,$$

montrent que *la tangente de chaque côté de l'angle droit est égale au sinus de l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.*

Les sinus d'arcs moindres que 180° étant toujours positifs, il en résulte que *la tangente de chaque angle oblique* [1] *est de même signe que la tangente du côté opposé;* en d'autres termes, *les côtés de l'angle droit et les angles qui leur sont opposés sont de même espèce*, c'est-à-dire *ensemble plus petits ou plus grands que* 90° (*Géom.*, 564, 3°).

L'équation (9)

$$\cos a = \cot B \cot C$$

exprime que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cotangentes des deux angles obliques.*

Enfin, les équations (10)

$$\cos B = \cos b \sin C,$$
$$\cos C = \cos c \sin B,$$

signifient que *le cosinus de chaque angle oblique est égal au produit du cosinus du côté opposé par le sinus du second angle oblique.*

204. Un triangle sphérique, dans lequel un côté a est égal à 90°, est dit *rectilatère*. Le triangle supplémentaire d'un pareil triangle est évidemment *rectangle* en A (193). Par suite,

---

[1] On appelle *angles obliques* d'un triangle rectangle les angles non droits.

les formules relatives aux triangles rectilatères peuvent se déduire facilement de celles qui se rapportent aux triangles rectangles (201). Mais on les obtient tout aussi facilement, en faisant $a = 90^\circ$ dans les formules générales des groupes (1), (2), (3), (4), qui renferment cet élément. Nous ne nous y arrêterons pas.

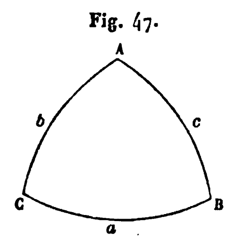
CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES.

---

205. Nous ne considérons que les triangles rectangles qui ont *un seul angle droit.*

Fig. 47.



En effet, si le triangle ABC (*fig.* 47) est *birectangle* en A et en B, le sommet C est le pôle du côté c (*Géom.*, 514); de sorte que les côtés a et b sont égaux à 90°, et que l'angle C a pour mesure le côté c (*Géom.*, 528).

Si le triangle ABC est *trirectangle*, chaque sommet est le pôle du côté opposé, et les trois côtés sont égaux à 90°.

206. Avant de parcourir les six cas distincts que présente la résolution des triangles rectangles, rappelons une fois pour toutes qu'il s'agit de côtés ou d'angles compris entre 0° et 180°. Par conséquent, lorsqu'un côté ou un angle sera donné par *son cosinus, sa tangente ou sa cotangente,* il sera complétement déterminé. Il n'en sera pas de même pour un côté ou un angle donné par *son sinus,* parce qu'à un même sinus, entre 0° et 180°, correspondent deux arcs supplémentaires. Enfin, si la valeur d'un cosinus, d'une tangente ou d'une cotangente est *négative, on la changera de signe,* et l'on prendra ensuite *le supplément* de l'arc ou de l'angle obtenu à l'aide de la formule ainsi modifiée (Liv. I, Chap. I).

Premier cas.

207. *On donne l'hypoténuse a et un côté b : on demande de calculer le côté c et les deux angles* B *et* C (*fig.* 47).

L'équation (201)

$$\cos a = \cos b \cos c$$

donne immédiatement

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

On a ensuite

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

d'où

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Enfin, de

$$\tan b = \tan a \cos C,$$

on déduit

$$\cos C = \frac{\tan b}{\tan a}.$$

L'angle B est donné par son sinus, mais on sait que l'angle B et le côté b doivent être de même espèce (203). Il n'y a donc aucune ambiguïté, et le triangle se trouve complètement déterminé.

Il est souvent préférable d'opérer comme nous allons l'indiquer, en déterminant tous les éléments inconnus par leurs tangentes

On sait (66) que

$$\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}}.$$

On a d'ailleurs

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Nous aurons, par conséquent (83),

$$\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}} = \sqrt{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}.$$

Cette valeur de $\operatorname{tang}\frac{c}{2}$ est nécessairement positive, puisque c est inférieur à 180°.

Si l'on donnait a et c au lieu de a et b, on trouverait de même

$$\operatorname{tang}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tang}\frac{a+c}{2}\operatorname{tang}\frac{a-c}{2}}.$$

On a aussi

$$\tang\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}.$$

Changeons dans cette égalité B en $90^\circ+B$, et rappelons-nous (32) que $\cos(90^\circ+B)=-\sin B$. Il viendra

$$\tang\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}.$$

Si l'on remplace $\sin B$ par sa valeur $\frac{\sin b}{\sin a}$, on trouve (83)

$$\tang\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}}=\sqrt{\frac{\tang\frac{a+b}{2}}{\tang\frac{a-b}{2}}}.$$

La formule

$$\sin c=\sin a\sin C$$

conduirait de même à

$$\tang\left(45^\circ+\frac{C}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tang\frac{a+c}{2}}{\tang\frac{a-c}{2}}}.$$

B ou C devant être de même espèce que b ou c, on saura d'avance si l'angle $45^\circ+\frac{B}{2}$ ou l'angle $45^\circ+\frac{C}{2}$ surpasse ou non 90°, c'est-à-dire on saura de quel signe affecter le radical correspondant. Enfin, puisqu'on a à la fois

$$\cos C=\frac{\tang b}{\tang a}\quad\text{et}\quad\tang\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

il en résulte

$$\tang\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\tang a-\tang b}{\tang a+\tang b}}.$$

Et si l'on remplace $\tang a$ par $\frac{\sin a}{\cos a}$ et $\tang b$ par $\frac{\sin b}{\cos b}$, on obtient (84)

$$\tang\frac{C}{2}=+\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

La formule

$$\tang c = \tang a \cos B$$

conduirait de même à

$$\tang \frac{B}{2} = + \sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}.$$

En résumé, les formules propres au calcul du premier cas seront (avec les données indiquées a et b)

$$\tang \frac{c}{2} = + \sqrt{\tang \frac{a+b}{2} \tang \frac{a-b}{2}},$$

$$\tang \left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\tang \frac{a+b}{2}}{\tang \frac{a-b}{2}}},$$

$$\tang \frac{C}{2} = + \sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

On n'aura que *quatre* logarithmes à chercher.

Pour que le problème soit possible, $\sin B$ doit être moindre que 1, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\sin b < \sin a$. Cette condition sera *toujours* remplie, si a tombe entre b et $180^\circ - b$. Dans ce cas, on aura nécessairement (*en valeur absolue*)

$$\cos b > \cos a \quad \text{et} \quad \tang b < \tang a,$$

c'est-à-dire que $\cos c$ et $\cos C$ resteront compris entre $+1$ et -1. Ainsi, pour que le triangle existe, *il faut et il suffit que l'hypoténuse tombe entre le côté donné et le supplément de ce côté* (*Géom.*, 563, 1°).

Deuxième cas.

208. *On donne l'hypoténuse a et un angle* B : *on demande de calculer l'angle* C *et les côtés b et c* (*fig.* 47).

On a

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\tang c = \tang a \cos B,$$
$$\cos a = \cot B \cot C,$$

d'où

$$\cot C = \frac{\cos a}{\cot B}.$$

Le côté b est déterminé par son sinus, mais il est de même espèce que l'angle B, et il n'y a qu'une solution. Si ce côté devait être mal déterminé par son sinus, on commencerait par chercher c ou C, et l'on aurait ensuite recours à la formule

$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C.$$

Ce deuxième cas est toujours possible.

Troisième cas.

209. *On donne les deux côtés b et c : on demande l'hypoténuse a et les deux angles* B *et* C (*fig.* 47).

On a

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c},$$

$$\operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Si le côté a devait être mal déterminé par son cosinus, on commencerait par chercher B ou C; puis l'on se servirait de la formule

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C.$$

Ce troisième cas n'admet qu'une solution, et est toujours possible.

Quatrième cas.

210. *On donne un côté b de l'angle droit et l'angle* B *qui lui est opposé : on demande l'hypoténuse a, le côté c et l'angle* C (*fig.* 47).

On peut se servir des formules

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B,$$
$$\cos B = \cos b \sin C,$$

qui donnent

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Mais il vaut mieux, comme dans le premier cas, recourir aux formules suivantes.

Les relations

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\sin c = \sin a \sin C,$$

nous ont conduit (207) aux égalités

$$\tang\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tang\frac{a+b}{2}}{\tang\frac{a-b}{2}}},$$

$$\tang\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tang\frac{a+c}{2}}{\tang\frac{a-c}{2}}}.$$

Remarquons que ces relations ne changent pas quand on permute dans la première les lettres a et B, dans la seconde les lettres a et C; les égalités qu'on en a déduites resteront donc vraies, lorsqu'on y opérera une permutation analogue. Il viendra alors

$$\tang\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tang\frac{B+b}{2}}{\tang\frac{B-b}{2}}},$$

$$\tang\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tang\frac{C+c}{2}}{\tang\frac{C-c}{2}}}.$$

En suivant une marche analogue à celle qui nous a fait connaître (207) la valeur de $\tang\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)$, on trouve

$$\tang\left(45^\circ + \frac{c}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}}.$$

On a d'ailleurs

$$\tang b = \sin c \tang B, \quad \text{d'où} \quad \sin c = \frac{\tang b}{\tang B}.$$

Substituant et remplaçant $\tang b$ par $\frac{\sin b}{\cos b}$, $\tang B$ par $\frac{\sin B}{\cos B}$, on arrive facilement à

$$\tang\left(45^\circ + \frac{c}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}}.$$

La formule $\tang c = \sin b \tang C$ conduit de même à

$$\tang\left(45^\circ + \frac{b}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(C+c)}{\sin(C-c)}}.$$

Enfin, nous savons qu'on a (207)

$$\tang\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin C}{1-\sin C}}.$$

La relation $\cos B = \cos b \sin C$ donne $\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$. Par suite (83),

$$\tang\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos b + \cos B}{\cos b - \cos B}} = \sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}}.$$

La relation $\cos C = \cos c \sin B$ conduirait de même à

$$\tang\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \sqrt{\cot\frac{C+c}{2}\cot\frac{C-c}{2}}.$$

Pour résoudre le quatrième cas, on emploiera donc de préférence les formules

$$\tang\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\tang\frac{B+b}{2}}{\tang\frac{B-b}{2}}},$$

$$\tang\left(45^\circ + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

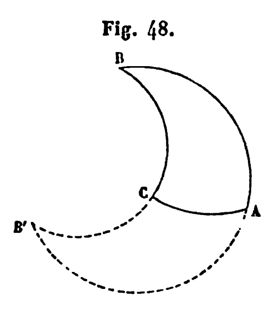
$$\tang\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}},$$

qui donnent les éléments inconnus en fonction de leurs tangentes et n'exigent que la recherche de *quatre* logarithmes.

Le cas qui nous occupe admet *deux solutions distinctes.*

Supposons, en effet, que le triangle ABC (*fig.* 48) satisfasse aux données. Si l'on prolonge les arcs BA et BC jusqu'à leur nouvelle rencontre en B', le triangle AB'C répondra aussi à la question : car il aura pour côté AC $= b$ et l'angle B' sera identique à l'angle B. Les côtés B'A et B'C sont d'ailleurs *les suppléments* des côtés BA et BC, et l'angle B'CA est *le supplément* de l'angle BCA. Les doubles signes placés devant les radicaux des formules précédentes correspondent donc aux deux solutions. Il faut voir maintenant de quelle manière les valeurs obtenues doivent être assemblées.

Fig. 48.



B ***doit être de même espèce que b.***

On a donc à la fois $b < 90°$ et $B < 90°$. Les équations

$$\sin b = \sin a \sin B \quad \text{et} \quad \cos a = \cos b \cos c$$

montrent alors que $\sin b$ est moindre que $\sin B$, d'où $b < B$, et que a et c sont de même espèce; l'équation

$$\cos C = \cos c \sin B$$

prouve que c et C sont aussi de même espèce. Par suite, lorsque b est moindre que 90°, les éléments de la première solution sont donnés par les signes *plus* des radicaux, les éléments de la seconde par les signes *moins* de ces radicaux.

Si b est $> 90°$, on a aussi $B > 90°$. La relation

$$\sin b = \sin a \sin B$$

montre que $\sin b$ est moindre que $\sin B$; par suite, il faut ici qu'on ait $b > B$ (*Géom.*, 563, 2°). L'équation

$$\cos a = \cos b \cos c$$

exige alors que a et c soient d'espèces différentes. La formule

$$\cos C = \cos c \sin B$$

montre que c et C sont toujours de même espèce. Par suite, si l'on prend le signe *plus* pour le premier radical, on prendra le signe *moins* pour les deux autres, et l'on aura les éléments de la première solution. Si l'on prend le signe *moins* pour le premier radical, on prendra le signe *plus* pour les deux autres, et l'on aura les éléments de la seconde solution.

Cinquième cas.

211. *On donne le côté b et l'angle adjacent* C *: on demande l'hypoténuse a, le côté c et l'angle* B (*fig.* 47).

On a

$$\cos B = \cos b \sin C,$$
$$\tang b = \tang a \cos C, \quad \text{d'où} \quad \tang a = \frac{\tang b}{\cos C},$$
$$\tang c = \sin b \tang C.$$

Si l'angle B devait être mal déterminé par son cosinus, on calculerait d'abord a ou c, et B serait ensuite donné par la formule $\cos a = \cot B \cot C$ ou $\tang b = \sin c \tang B$.

Le cinquième cas est toujours possible et n'admet qu'une solution.

Sixième cas.

212. *On donne les deux angles* B *et* C *: on demande l'hypoténuse a et les côtés b et c* (*fig.* 47).

On peut employer les formules

$$\cos a = \cot B \cot C,$$
$$\cos B = \cos b \sin C, \quad \text{d'où} \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C};$$
$$\cos C = \cos c \sin B, \quad \text{d'où} \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Mais il est préférable, comme pour le premier et le quatrième cas, d'employer les formules suivantes.

On a

$$\tang \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

Remplaçons $\cos a$ par sa valeur $\cot B \cot C$ ou

$$\frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Nous aurons évidemment

$$\tang \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos(B + C)}{\cos(B - C)}}.$$

De même,

$$\tang\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}}.$$

La formule $\cos B = \cos b \sin C$ donne d'ailleurs

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C} = \frac{\cos B}{\cos(90^\circ - C)}.$$

Par suite,

$$\tang\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos(90^\circ - C) - \cos B}{\cos(90^\circ - C) + \cos B}},$$

d'où résulte (83)

$$\tang\frac{b}{2} = \sqrt{\tang\left(\frac{B-C}{2} + 45^\circ\right)\tang\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)}.$$

La formule $\cos C = \cos c \sin B$ conduirait de même à

$$\tang\frac{c}{2} = \sqrt{\tang\left(\frac{C-B}{2} + 45^\circ\right)\tang\left(\frac{C+B}{2} - 45^\circ\right)}.$$

En résumé, les formules à employer pour le sixième cas seront

$$\tang\frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}},$$

$$\tang\frac{b}{2} = +\sqrt{\tang\left(\frac{B-C}{2} + 45^\circ\right)\tang\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)},$$

$$\tang\frac{c}{2} = +\sqrt{\tang\left(\frac{C-B}{2} + 45^\circ\right)\tang\left(\frac{C+B}{2} - 45^\circ\right)}.$$

Comme il est facile de le vérifier, les conditions de possibilité du problème sont que $\frac{B+C}{2}$ tombe entre 45° et 135°, que $\frac{B-C}{2}$ tombe entre -45° et $+45^\circ$; les valeurs des trois tangentes sont alors réelles. Le problème n'admet d'ailleurs qu'une solution.

213. Nous achèverons ce qui a rapport à la résolution des triangles sphériques rectangles, en donnant tous les éléments d'un pareil triangle ainsi que les logarithmes correspondants.

On aura soin de se rappeler qu'au point de vue numérique on ramène toujours les arcs considérés au premier quadrant (33). Ainsi, au lieu de chercher le logarithme de

$$\cos b = \cos 140^\circ 52' 40'',$$

on a cherché celui de

$$-\cos b = \cos 39^\circ 7' 20'',$$

en prenant négativement dans les formules le facteur $\cos b$ (206).

$$a = 71^\circ 24' 30'', \qquad b = 140^\circ 52' 40'', \qquad c = 114^\circ 15' 34''$$

$$\log \sin a = \bar{1},9767235, \qquad \log \sin b = \bar{1},8000134, \qquad \log \sin c = \bar{1},95933$$

$$\log \cos a = \bar{1},5035475, \qquad \log - \cos b = \bar{1},8897507, \qquad \log - \cos c = \bar{1},61379$$

$$\log \operatorname{tang} a = 0,4731759, \qquad \log - \operatorname{tang} b = \bar{1},9102626, \qquad \log - \operatorname{tang} c = 0,34603$$

$$A = 90^\circ, \qquad B = 138^\circ 15' 45'', \qquad C = 105^\circ 52' 39''.$$

$$\log \sin B = \bar{1},8232909, \qquad \log \sin C = \bar{1},9831068,$$

$$\log - \cos B = \bar{1},8728568, \qquad \log - \cos C = \bar{1},4370867,$$

$$\log - \operatorname{tang} B = \bar{1},9504341, \qquad \log - \operatorname{tang} C = 0,5460201.$$

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES QUELCONQUES.

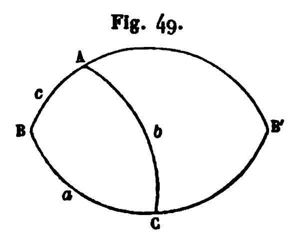
214. On peut quelquefois ramener la résolution du triangle proposé à l'un des cas examinés dans le Chapitre précédent.

1° *Si le triangle proposé a un côté égal à* 90° ou est rectilatère (204), son triangle supplémentaire a un angle droit, c'est-à-dire est rectangle. On résoudra donc ce triangle supplémentaire (où l'on connaîtra deux éléments) comme il a été indiqué, et l'on reviendra ensuite au triangle considéré.

2° *Si le triangle proposé est isocèle,* c'est-à-dire s'il a deux côtés ou deux angles égaux, on le partagera en deux triangles rectangles égaux, en joignant son sommet au milieu de sa base par un arc de grand cercle (*Géom.*, 538). Dans chacun de ces triangles rectangles, outre l'angle droit, on connaîtra nécessairement deux éléments. La question sera donc ramenée à résoudre l'un de ces triangles.

3° Enfin, *si, parmi les éléments donnés, se trouvent deux côtés* a *et* b *ou deux angles* A *et* B *qui soient supplémentaires,* on prolongera (*fig.* 49) les côtés a et c jusqu'à leur nouvelle rencontre en B'. Le triangle AB'C aura dès lors deux côtés égaux b et CB' (puisque CB' est le supplément de a) ou deux angles égaux B' et CAB' (puisque le supplément de l'angle A est l'angle CAB' et que B' = B). La résolution du triangle AB'C entraîne celle du triangle donné, et le triangle AB'C étant isocèle, sa résolution dépend de celle d'un triangle rectangle (2°).

Fig. 49.



215. La résolution des triangles sphériques quelconques présente *six cas* distincts; mais on peut les grouper deux à

deux, comme il suit, en s'appuyant sur la considération du triangle supplémentaire. Les côtés et les angles sont ici exprimés en degrés.

Premier et deuxième cas.

216. *On donne les trois côtés ou les trois angles : on demande de calculer les éléments inconnus.*

Si les trois côtés sont donnés, on a (195)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

d'où

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

On en déduit

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

c'est-à-dire (81)

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\sin\frac{(a+b-c)}{2}\sin\frac{(a+c-b)}{2}}{\sin b \sin c}.$$

On trouve de même

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

c'est-à-dire (81)

$$\frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\sin\frac{(b+c+a)}{2}\sin\frac{(b+c-a)}{2}}{\sin b \sin c}.$$

Posons, pour simplifier, $a + b + c = 2p$. Les valeurs trouvées se présenteront sous la forme

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}.$$

On a d'ailleurs (66)

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

Il vient donc

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

En répétant les mêmes calculs pour les angles B et C, on a

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}.$$

En divisant ces six formules deux à deux, on trouve enfin

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}.$$

Dans toutes ces formules, le radical doit évidemment être pris avec le signe *plus*. Leur complète analogie avec les relations déjà données en Trigonométrie rectiligne (169) les rend faciles à retenir. Il est préférable de déterminer les angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, par leurs tangentes, d'après les raisons précédemment exposées.

Supposons, au contraire, qu'on donne les trois angles du triangle ABC. Les formules qu'on vient d'établir sont applicables aux angles $180°-a$, $180°-b$, $180°-c$, de son triangle supplémentaire; les côtés de ce triangle sont d'ailleurs $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$, de sorte que leur somme $2P$

est égale à $360° - (A + B + C - 180°)$. Si nous désignons l'angle $(A + B + C - 180°)$ par 2Δ, nous aurons

$$2P = 360° - 2\Delta \quad \text{ou} \quad P = 180° - \Delta.$$

La formule

$$\tang\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}$$

devient alors, en remplaçant A par $180° - a$; a, b, c, par les suppléments de A, B, C; p par P,

$$\tang\frac{(180° - a)}{2} = \cot\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-\Delta)\sin(C-\Delta)}{\sin\Delta\sin(A-\Delta)}}$$

ou

$$\tang\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\Delta\sin(A-\Delta)}{\sin(B-\Delta)\sin(C-\Delta)}}.$$

Nous aurons donc, pour déterminer les trois côtés inconnus, les trois formules

$$\tang\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\Delta\sin(A-\Delta)}{\sin(B-\Delta)\sin(C-\Delta)}},$$

$$\tang\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\Delta\sin(B-\Delta)}{\sin(A-\Delta)\sin(C-\Delta)}},$$

$$\tang\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\Delta\sin(C-\Delta)}{\sin(A-\Delta)\sin(B-\Delta)}}.$$

En examinant les conditions de réalité des expressions trouvées, on est ramené aux conditions de possibilité du triangle. Ces conditions, comme nous l'avons déjà vu en Géométrie (*Géom.*, 564), sont les suivantes : si l'on donne les côtés, chacun d'eux doit être plus petit que la somme des deux autres, et leur somme totale doit être moindre que 360°. Si l'on donne les trois angles, leur somme doit tomber entre deux droits et six droits, c'est-à-dire que 2Δ doit tomber entre 0° et 360°; chaque angle augmenté de deux droits doit être supérieur à la somme des deux autres angles, c'est-à-dire que chaque angle doit être supérieur à Δ.

Troisième et quatrième cas.

217. *On donne deux côtés et l'angle compris ou un côté et les deux angles adjacents : on demande de calculer les éléments inconnus.*

Pour résoudre ces deux cas le plus simplement possible, nous chercherons les formules ou *analogies de Neper,* que nous déduirons des *formules de Delambre.*

FORMULES DE DELAMBRE ET DE NEPER.

On a

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Nous avons trouvé d'ailleurs (216) les valeurs de

$$\sin\frac{A}{2},\quad \sin\frac{B}{2},\quad \cos\frac{A}{2},\quad \cos\frac{B}{2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les égalités précédentes, il vient

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}},$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}} - \frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Mais

$$\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}} = \cos\frac{C}{2},$$

$$\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}} = \sin\frac{C}{2}.$$

On peut donc écrire

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{C}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{\sin p - \sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{C}{2}.$$

Or (81),

$$\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a}{\sin c} = \frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\sin p - \sin(p-c)}{\sin c} = \frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

On a donc

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

En partant des valeurs de $\sin\frac{A-B}{2}$ et de $\cos\frac{A-B}{2}$ et en opérant d'une manière analogue, on trouvera les deux autres formules de *Delambre*, qui sont :

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

Les six éléments du triangle entrent dans ces formules. Si on

les divise membre à membre dans l'ordre suivant : la première par la deuxième, la troisième par la quatrième, la quatrième par la deuxième, la troisième par la première, on obtient les formules de *Neper*, savoir :

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2},$$

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2}.$$

Si l'on donne a, b, C, on trouve A et B au moyen des deux premières *analogies*, puis c en faisant usage de la troisième ou de la quatrième. Si l'on donne, au contraire, c, A, B, les deux dernières analogies font connaître a et b, puis l'une des deux premières donne C.

218. Souvent, dans le *troisième cas*, on ne veut connaître que le côté c. On se sert alors de la formule

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

Il faut rendre cette valeur calculable par logarithmes. On met $\cos a$ en facteur commun dans le second membre, et il vient

$$\cos c=\cos a(\cos b+\sin b\operatorname{tang}a\cos C).$$

En désignant par φ un angle auxiliaire, posons

$$\operatorname{tang}\varphi=\operatorname{tang}a\cos C.$$

Nous aurons

$$\cos c=\cos a(\cos b+\sin b\operatorname{tang}\varphi),$$

ou, en remplaçant $\tang\varphi$ par $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$,

$$\cos c = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Si, dans le *quatrième cas*, on ne veut de même connaître que l'angle C, on prend la formule (197)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

d'où

$$\cos C = -\cos A (\cos B - \sin B \tang A \cos c).$$

En désignant par ψ un angle auxiliaire, posons

$$\cot\psi = \tang A \cos c.$$

Il viendra

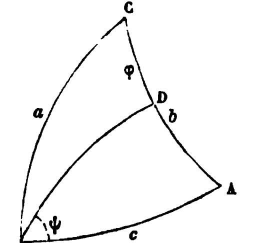
$$\cos C = -\cos A (\cos B - \sin B \cot\psi),$$

ou, en remplaçant $\cot\psi$ par $\frac{\cos\psi}{\sin\psi}$,

$$\cos C = \frac{-\cos A \sin(\psi - B)}{\sin\psi} = \frac{\cos A \sin(B-\psi)}{\sin\psi}.$$

219. Il est facile de vérifier que l'introduction des *angles auxiliaires* φ et ψ revient à une décomposition du triangle donné ABC (*fig.* 50) en deux triangles rectangles.

Fig. 50.



En considérant d'abord le *troisième cas*, abaissons sur le côté b l'arc de grand cercle perpendiculaire BD. Le triangle rectangle BDC donne (201)

$$\tang CD = \tang a \cos C;$$

et, d'après l'équation de condition (218)

$$\tang\varphi = \tang a \cos C,$$

on voit que l'angle auxiliaire φ répond à l'arc CD.

Si nous passons au *quatrième cas*, le triangle rectangle BDA donne (la formule $\cos a = \cot B \cot C$ du n° 201 revenant à $\tang C \cos a = \cot B$)

$$\tang A \cos c = \cot ABD;$$

et, d'après l'équation de condition (218)

$$\cot\psi = \operatorname{tang} A \cos c,$$

on voit que l'angle ψ est précisément l'angle ABD.

220. Comme les côtés et les angles du triangle sphérique considéré sont toujours supposés moindres que 180°, les quatre cas que nous venons d'examiner n'admettent jamais qu'une solution, et les deux derniers sont toujours possibles.

Cinquième et sixième cas.

221. *On donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux : on demande de calculer les éléments inconnus.*

Supposons qu'on donne a, b, A ou A, B, a. La relation (198)

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$$

permettra de trouver l'inconnue B ou l'inconnue b.

Les inconnues C et c (communes aux deux cas) seront ensuite déterminées à l'aide de deux des formules de Neper. On aura, par exemple, en transposant (217),

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cot\frac{A-B}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que l'inconnue $\sin B$ ou $\sin b$ tombe entre 0 et 1 (puisque B ou b est inférieur à 180°).

Admettons que cette condition soit remplie. Les Tables donneront pour B ou b deux valeurs supplémentaires l'une de l'autre. Cherchons quand ces valeurs sont toutes deux admissibles.

Remarquons que $\tang\frac{C}{2}$ et $\tang\frac{c}{2}$ doivent être positives. *Il faut donc que les différences* A — B *et* $a - b$ *soient de même signe,* ce qui correspond au théorème suivant démontré en Géométrie : *Dans tout triangle sphérique, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté, et réciproquement.*

Si la dernière condition indiquée n'est pas remplie, *le triangle est impossible.* Si elle est remplie par l'une des valeurs de B ou de b, à cette valeur correspond nécessairement *une solution.*

En effet, les analogies employées conduisent alors pour C et c à deux valeurs comprises entre 0° et 180°, et ces valeurs sont précisément celles que donneraient les deux autres formules de Neper. Car ces deux formules

$$\tang\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{A+B}{2},$$

$$\tang\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\tang\frac{a+b}{2},$$

se déduisent immédiatement des deux analogies restantes, jointes à la relation

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

C'est ce que nous allons prouver. La relation

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$$

revient à

$$\frac{\sin B + \sin A}{\sin B - \sin A} = \frac{\sin b + \sin a}{\sin b - \sin a}$$

ou à (83)

$$\frac{\tang\frac{A+B}{2}}{\tang\frac{A-B}{2}} = \frac{\tang\frac{a+b}{2}}{\tang\frac{a-b}{2}}.$$

On tire de cette dernière égalité

$$\cot\frac{A-B}{2} = \frac{\tang\frac{a+b}{2}}{\tang\frac{a-b}{2}}\cot\frac{A+B}{2},$$

$$\tang\frac{a-b}{2} = \frac{\tang\frac{A-B}{2}}{\tang\frac{A+B}{2}}\tang\frac{a+b}{2}.$$

Substituant ces valeurs dans les analogies

$$\tang\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{A-B}{2},$$

$$\tang\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\tang\frac{a-b}{2},$$

on retrouve évidemment les deux autres (217), savoir :

$$\tang\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{A+B}{2},$$

$$\tang\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\tang\frac{a+b}{2}.$$

La première et la troisième analogie, jointes à la relation des quatre sinus, forment donc un système *équivalent* à la deuxième et à la quatrième analogie, jointes à cette même relation.

Supposons qu'on donne a, b, A : on déterminera à l'aide du premier système les valeurs de B, C, c. Si l'on veut alors former un triangle avec les trois éléments a, b, C (ce qui est *toujours* possible (220), le second système fera connaître les valeurs correspondantes des éléments restants A, B, c, qui seront précisément les valeurs qui satisfont déjà au premier système.

Il résulte de cette discussion que chaque valeur de B ou de b qui satisfait aux deux conditions posées ($\sin B$ *ou* $\sin b$ *positif et moindre que* 1, *les différences* $A - B$ *et* $a - b$ *de même signe*) correspond nécessairement à un triangle et à un seul formé avec les éléments donnés. Le cinquième et le sixième cas admettront donc *une* ou *deux* solutions ou n'en admettront *aucune*. Ces cas portent le nom de *cas douteux*.

222. Pour ne rien laisser de côté relativement aux cas douteux, nous indiquerons encore une méthode de résolution plus simple, qui nous donnera d'ailleurs l'occasion d'appuyer sur la marche à suivre pour rendre calculables par logarithmes les formules de la Trigonométrie sphérique, et qui nous permettra d'interpréter géométriquement les transformations employées.

223. Cinquième cas. — *On donne* a, b, A, *on veut calculer* B, C, c.

On a d'abord

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}.$$

Le côté c et l'angle C sont ensuite donnés par les formules (195, 199)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Pour arriver à des valeurs de c et de C calculables par logarithmes, nous emploierons deux angles auxiliaires φ et ψ.

Posons

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} b \cos A;$$

il viendra

$$\cos a = \cos b (\cos c + \sin c \operatorname{tang} \varphi) = \frac{\cos b \cos(c - \varphi)}{\cos \varphi},$$

d'où

$$\cos(c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

Cette relation fera connaître $c - \varphi$ et, par suite, c.

Posons, de même,

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\cot A}{\cos b};$$

il viendra

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cos b \operatorname{tang} \psi,$$

d'où

$$\operatorname{tang} b \cot a = \cos C + \sin C \operatorname{tang}\psi = \frac{\cos(C-\psi)}{\cos\psi},$$

c'est-à-dire

$$\cos(C-\psi) = \operatorname{tang} b \cot a \cos\psi.$$

Cette relation fera connaître $C - \psi$ et, par suite, C.

Lorsque le problème sera possible, la valeur de $\sin B$ tombera entre o et 1, les valeurs de $\cos(c-\varphi)$ et de $\cos(C-\psi)$ tomberont entre $+1$ et -1.

On calculera d'abord les angles auxiliaires φ et ψ qu'on supposera compris entre $0°$ et $180°$.

Les Tables donneront alors pour B une valeur comprise entre $0°$ et $90°$; puis, pour $c-\varphi$ et $C-\psi$, des valeurs l et L comprises entre $0°$ et $180°$. Mais on satisfera aussi aux équations précédentes en remplaçant B par $180° - B$, et en prenant $-l$ et $-L$ à la place de l et de L. En effet, les sinus de deux arcs supplémentaires sont égaux et de même signe, les cosinus de deux arcs égaux et de signes contraires sont égaux et de même signe. Pour terminer, il faut montrer de quelle manière les doubles valeurs doivent être assemblées.

On a (199)

$$\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B,$$

d'où

$$\cot b \sin c = \cos A(\cos c + \operatorname{tang} A \cot B).$$

De $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} b \cos A$, on déduit

$$\cot b = \frac{\cos A}{\operatorname{tang}\varphi}$$

et, par suite,

$$\frac{\sin c}{\operatorname{tang}\varphi} = \cos c + \operatorname{tang} A \cot B;$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\operatorname{tang}\varphi$ par $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ et en faisant passer $\cos c$ dans le premier membre,

$$\frac{\sin(c-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B}.$$

On a de même (197)

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b.$$

De $\tang\psi = \frac{\cot A}{\cos b}$ on déduit

$$\cos b = \frac{\cot A}{\tang\psi},$$

d'où

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin C \cos A \cot\psi$$

ou

$$\cos B = -\cos A(\cos C - \sin C \cot\psi) = \frac{-\cos A \sin(\psi - C)}{\sin\psi},$$

c'est-à-dire

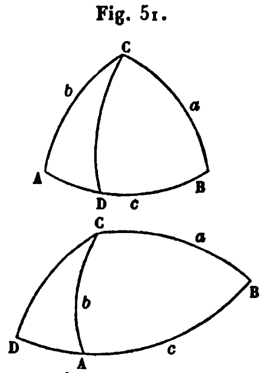
$$\frac{\sin(C-\psi)}{\sin\psi} = \frac{\cos B}{\cos A}.$$

Les signes des deux rapports $\frac{\tang A}{\tang B}$ et $\frac{\cos B}{\cos A}$ sont identiques, puisque A et B sont compris entre 0° et 180°. Les différences $c - \varphi$ et $C - \psi$ seront donc *ensemble* positives ou négatives. On prendra donc $+l$ avec $+L$ et $-l$ avec $-L$. On voit, de plus, que A et B sont de même espèce quand on prend les valeurs $+l$ et $+L$, et d'espèces différentes quand on prend les valeurs $-l$ et $-L$.

Il n'y a d'ailleurs de solution possible qu'autant que les valeurs trouvées pour c et C sont moindres que 180°.

224. Interprétons *géométriquement* les valeurs des angles auxiliaires φ et ψ. Soit ABC (*fig.* 51) le triangle considéré. Partageons-le en deux triangles rectangles par l'arc de grand cercle CD abaissé perpendiculairement du sommet C sur le côté opposé AB.

Fig. 51.



Il est évident que l'arc perpendiculaire CD tombe *en dedans* ou *en dehors* du triangle, suivant que les angles A et B sont *de même espèce* ou *d'espèces différentes;* car les deux triangles rectangles DCA, DCB, exigent que l'arc perpendiculaire CD soit *à la fois* de même espèce que les angles CAD et B qui lui sont opposés dans ces triangles (203).

Supposons le point D entre les points A et B. On a, dans le triangle rectangle DCA,

$$\tang AD = \tang b \cos A \quad \text{et} \quad \cos b = \cot ACD \cot A.$$

La dernière relation revenant à

$$\operatorname{tang} ACD = \frac{\cot A}{\cos b},$$

on voit que l'arc AD répond précisément à l'angle φ et que l'angle ACD représente l'angle auxiliaire ψ. L'arc BD est alors $c - \varphi$, et l'angle BCD est $C - \psi$.

Supposons le point D à gauche du point A, le triangle rectangle DCA donne

$$\operatorname{tang} AD = \operatorname{tang} b \cos(180^\circ - A),$$

ce qui revient à

$$\operatorname{tang}(-AD) = \operatorname{tang} b \cos A;$$

et

$$\cos b = \cot ACD . \cot(180^\circ - A),$$

ce qui revient à

$$\operatorname{tang}(-ACD) = \frac{\cot A}{\cos b}.$$

L'arc AD et l'angle ACD représentent alors l'arc φ et l'angle auxiliaire ψ changés de signe. L'arc $BD = c + AD$ est donc encore $c - \varphi$, et l'angle $BCD = C + ACD$ est $C - \psi$.

Cela posé, il est facile de ramener la résolution du triangle proposé à celle du triangle rectangle CDB. Si l'on désigne, en effet, l'arc perpendiculaire CD par χ, le triangle rectangle CDA donne

$$\operatorname{tang} \chi = \operatorname{tang} b \cos ACD.$$

On connaît donc dans le triangle CDB un côté CD et l'hypoténuse CB. On peut par suite, à l'aide des formules démontrées précédemment (207), calculer l'angle B, le côté $BD = c - \varphi$ et l'angle $BCD = C - \psi$. Ayant trouvé d'abord φ et ψ, les éléments B, C et c, du triangle ABC, seront complètement déterminés.

225. Sixième cas. — Le sixième cas est susceptible d'une discussion analogue. Nous ne nous y arrêterons pas, puisqu'on peut, en se servant du triangle supplémentaire, ramener ce cas au précédent.

226. Nous terminerons ce paragraphe en donnant tous les

éléments d'un triangle sphérique quelconque, ainsi que les logarithmes correspondants.

$$a = 76°35'36'',\quad b = 50°10'30'',\quad c = 40°0'10''.$$

$\log\sin a = \bar{1},9880008$,	$\log\sin b = \bar{1},8853636$,	$\log\sin c = \bar{1},8080926$,
$\log\cos a = \bar{1},3652279$,	$\log\cos b = \bar{1},8064817$,	$\log\cos c = \bar{1},8842363$,
$\log\operatorname{tang} a = 0,6227729$,	$\log\operatorname{tang} b = 0,0788819$,	$\log\operatorname{tang} c = \bar{1},9238563$.

$$A = 121°36'19'',81,\quad B = 42°15'13'',66,\quad C = 34°15'2'',76.$$

$\log\sin A = \bar{1},9302747$,	$\log\sin B = \bar{1},8276379$,	$\log\sin C = \bar{1},7503$[illegible]
$\log - \cos A = \bar{1},7193874$,	$\log\cos B = \bar{1},8693336$,	$\log\cos C = \bar{1},9172$[illegible]
$\log - \operatorname{tang} A = 0,2108873$,	$\log\operatorname{tang} B = \bar{1},9583043$,	$\log\operatorname{tang} C = \bar{1},833$[illegible]

Formules relatives à l'aire d'un triangle sphérique.

227. Nous avons démontré (*Géom.*, 580) que l'aire σ d'un triangle sphérique ABC faisant partie d'une sphère de rayon R a pour expression, en mètres carrés, les angles A, B, C, étant évalués en degrés,

$$\sigma = \frac{A + B + C - 180}{180}\pi R^2.$$

En désignant comme précédemment (216) par 2Δ l'angle $(A + B + C - 180°)$, nous pourrons écrire plus simplement

$$\sigma = \frac{2\Delta}{180}\pi R^2.$$

La détermination numérique de l'aire du triangle considéré dépend donc de celle de l'angle 2Δ.

Nous allons chercher Δ, d'abord en fonction de deux côtés et de l'angle compris, puis en fonction des trois côtés.

228. 1° *On donne a, b,* C.

Nous avons trouvé (216)

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\Delta\sin(A-\Delta)}{\sin(B-\Delta)\sin(C-\Delta)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\Delta\sin(B-\Delta)}{\sin(A-\Delta)\sin(C-\Delta)}}.$$

Si nous multiplions ces égalités membre à membre, il vient

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2} = \frac{\sin\Delta}{\sin(C-\Delta)}$$

$$= \frac{\sin\Delta}{\sin C\cos\Delta - \cos C\sin\Delta} = \frac{1}{\sin C\cot\Delta - \cos C}.$$

Par suite, en renversant, on a

$$\cot\Delta = \frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2} + \cos C}{\sin C}.$$

On peut remarquer que, si l'angle C reste constant et si l'on fait varier les côtés a et b de manière que le produit $\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}$ demeure fixe, Δ et, par conséquent, l'aire du triangle ne changent pas.

Si l'on veut rendre la formule obtenue calculable par logarithmes, on introduit un angle auxiliaire φ en posant

$$\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2} = \sin C\cot\varphi,$$

et il en résulte évidemment

$$\cot\Delta = \frac{\sin(C+\varphi)}{\sin C\sin\varphi}.$$

229. 2° *On donne les trois côtés a, b, c.*

On a, d'après les formules de Delambre (217),

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

D'ailleurs,

$$A + B + C - 180^\circ = 2\Delta;$$

on en déduit

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \left(\frac{C}{2} - \Delta\right).$$

Par suite,

$$\frac{\cos\left(\frac{C}{2}-\Delta\right)}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\sin\left(\frac{C}{2}-\Delta\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

La première relation revient à

$$\frac{\cos\left(\frac{C}{2}-\Delta\right)-\cos\frac{C}{2}}{\cos\left(\frac{C}{2}-\Delta\right)+\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}},$$

c'est-à-dire (81, 216) à

$$\frac{2\sin\frac{C-\Delta}{2}\sin\frac{\Delta}{2}}{2\cos\frac{C-\Delta}{2}\cos\frac{\Delta}{2}} = \frac{2\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-a}{2}}{2\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-a}{2}}$$

ou

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\frac{C-\Delta}{2}\operatorname{tang}\frac{\Delta}{2} = \operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}.$$

La seconde relation revient à

$$\frac{\sin\frac{C}{2}-\sin\left(\frac{C}{2}-\Delta\right)}{\sin\frac{C}{2}+\sin\left(\frac{C}{2}-\Delta\right)} = \frac{\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}},$$

c'est-à-dire (81) à

$$\frac{2\sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{C-\Delta}{2}}{2\sin\frac{C-\Delta}{2}\cos\frac{\Delta}{2}} = \frac{2\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{2\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-c}{2}}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{\Delta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{C-\Delta}{2}} = \operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités (1) et (2), et si l'on extrait la racine carrée du résultat, on arrive à cette formule remarquable, due à *Simon Lhuilier*, de Genève :

$$\tang \frac{\Delta}{2} = \sqrt{\tang \frac{p}{2} \tang \frac{p-a}{2} \tang \frac{p-b}{2} \tang \frac{p-c}{2}}.$$

230. Revenons à la formule (**227**) qui fait connaître l'aire σ du triangle sphérique proposé en mètres carrés, et qu'on peut écrire

$$\sigma = 2R^2\Delta \frac{\pi}{180}.$$

Si l'on exprime Δ *et* 180° *en secondes*, le rapport $\frac{\pi}{180}$ devient égal à la longueur de l'arc de 1″ dans le cercle de rayon 1. Or, dans ce cercle, on peut regarder l'arc de 1″ comme se confondant avec sin 1″ (**104**). On a ainsi

$$(1) \qquad \sigma = 2R^2\Delta \sin 1''.$$

231. De même, dans les développements précédents, on a supposé les côtés *a*, *b*, *c*, donnés en degrés, minutes et secondes. Si l'on veut en déduire leurs valeurs en mètres, il faut avoir recours à la formule connue (*Géom.*, 230)

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

dans laquelle *on convertira en secondes n et* 180°. Le rapport $\frac{\pi}{180}$ deviendra alors égal, comme on vient de le dire, à sin 1″. De plus, si a'' est le nombre de secondes du côté *a* dont la longueur en mètres est *l*, on devra remplacer *n* par a'', et l'on trouvera ainsi

$$(2) \qquad l = Ra'' \sin 1''.$$

Si, de *l*, on veut au contraire déduire a'', on a

$$a'' = \frac{l}{R \sin 1''}.$$

232. Si l'on considère la Terre comme une sphère où un grand cercle a pour circonférence 40 000 000^m, l'arc de 1″

sur cette circonférence est égal à $\frac{40000000^m}{1296000}$, c'est-à-dire à $\frac{10000^m}{324}$. On peut donc, dans ce cas, remplacer $R \sin 1''$ par le rapport $\frac{10000}{324}$.

Pour les *Applications géodésiques*, les formules (1) et (2) des nos 230 et 231 deviennent donc

$$(1\ bis) \qquad \sigma = 2R\Delta \frac{10000}{324} = \frac{2\Delta}{\sin 1''}\left(\frac{10000}{324}\right)^2,$$

$$(2\ bis) \qquad l = a'' \frac{10000}{324},$$

(en multipliant et en divisant le second membre de la première formule par $\sin 1''$).

On a d'ailleurs, puisque (108) $\sin 1'' = 0{,}00000\,48481\,3681$,

$$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855748668 \quad \text{et} \quad \log \frac{1}{\sin 1''} = 5{,}3144251332.$$

233. L'angle 2Δ est souvent confondu avec *l'excès sphérique* du triangle considéré. Mais, comme nous l'avons déjà rappelé (193), on doit réserver ce terme pour désigner l'expression $A' + B' + C' - \pi$, où A', B', C', représentent les angles du triangle sphérique évalués en parties du rayon de la sphère correspondante, pris pour unité. *L'excès sphérique du triangle mesure alors son aire dans le nouveau système d'unités adopté.*

Si l'on désigne cet excès sphérique par 2ε, on a (*Géom.*, 580, 581)

$$\frac{\sigma}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2\varepsilon}{\frac{\pi}{2}} \quad \text{ou} \quad \sigma = 2\varepsilon R^2.$$

Il en résulte, d'après la formule (1) du no 230,

$$2\varepsilon = 2\Delta \sin 1''.$$

CHAPITRE IV.

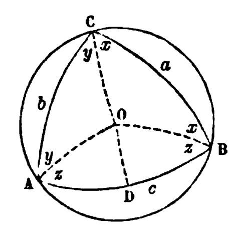
EXERCICES ET APPLICATIONS.

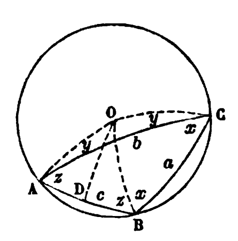
Rayons sphériques du cercle circonscrit et des cercles inscrit et ex-inscrits à un triangle sphérique.

234. 1° *Rayon sphérique du cercle circonscrit.*

Soient le triangle sphérique ABC (*fig.* 52) et le pôle O du cercle circonscrit à ce triangle. Si l'on joint le point O aux

Fig. 52.





sommets du triangle par des arcs de grand cercle, on le décompose en trois triangles isocèles ayant pour bases respectives les côtés a, b, c, et l'un de ces arcs OA représente le rayon sphérique R (*Géom.*, 516) du cercle circonscrit.

Supposons d'abord le pôle O *à l'intérieur* du triangle donné, et désignons par x, y, z, les angles à la base des trois triangles isocèles. On a évidemment $2(x+y+z) = A+B+C$, c'est-à-dire, d'après la notation (216) $A+B+C-180° = 2\Delta$,

$$x+y+z = \frac{A+B+C}{2} = 90° + \Delta.$$

Par conséquent, en se reportant à la figure,

$$x = 90^\circ - (A - \Delta),$$
$$y = 90^\circ - (B - \Delta),$$
$$z = 90^\circ - (C - \Delta).$$

Si le pôle O est *à l'extérieur* du triangle donné, on a

$$2(x + z - y) = A + B + C,$$

c'est-à-dire

$$x + z - y = 90^\circ + \Delta;$$

et l'on voit, en se reportant encore à la figure, que

$$x = 90^\circ - (A - \Delta),$$
$$-y = 90^\circ - (B - \Delta),$$
$$z = 90^\circ - (C - \Delta).$$

Les valeurs de x, y, z, restent donc les mêmes dans les deux hypothèses, à la seule condition d'affecter du signe *moins* celle de ces trois quantités qui se rapporte au triangle isocèle entièrement extérieur au triangle donné.

Cela posé, menons l'arc de grand cercle OD qui passe par le milieu du côté AB et qui lui est en même temps perpendiculaire (*Géom.*, 538). Le triangle rectangle ODA donne immédiatement (201)

$$\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \operatorname{tang} R \cos z = \operatorname{tang} R \sin(C - \Delta).$$

On en déduit

$$(1)\qquad \operatorname{tang} R = \frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\sin(C - \Delta)}.$$

Si l'on remplace $\operatorname{tang}\frac{c}{2}$ par sa valeur en fonction des angles A, B, C et Δ (216), on obtient

$$(2)\qquad \operatorname{tang} R = \sqrt{\frac{\sin\Delta}{\sin(A - \Delta)\sin(B - \Delta)\sin(C - \Delta)}}.$$

235. *Théorème de Lexell.*

La formule (1) permet de vérifier ou de démontrer le théorème de Lexell (*Géom.*, 599).

Il s'agit de *trouver le lieu géométrique des sommets des triangles sphériques qui, situés sur un même hémisphère, ont même base* AB *et une aire constante* σ.

Soit (*fig.* 53) ABC l'un de ces triangles. Il est situé sur l'hémisphère limité par la base AB prolongée.

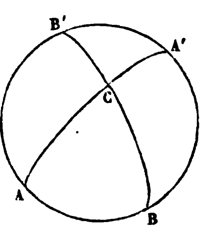


Fig. 53.

Si l'on prolonge de même les côtés AC et BC jusqu'à leurs rencontres A' et B' avec la circonférence de grand cercle AB, les points A et A', B et B' sont *diamétralement* opposés (*Géom.*, 511) et, par suite, la somme des aires σ et σ' des deux triangles ACB, A'CB', équivaut à l'aire du fuseau dont l'angle est C (*Géom.*, 579).

Or, en posant (216)

$$A + B + C - 180° = 2\Delta$$

et

$$A' + B' + C - 180° = 2\Delta',$$

on a (231 et *Géom.*, 578)

$$\sigma = 2R^2\Delta\frac{\pi}{180}, \quad \sigma' = 2R^2\Delta'\frac{\pi}{180}, \quad \text{Fus. C} = 2R^2C\frac{\pi}{180}.$$

L'équivalence indiquée conduit donc à l'égalité

$$\Delta + \Delta' = C \quad \text{ou} \quad C - \Delta' = \Delta.$$

Mais le rayon sphérique R' du cercle circonscrit au triangle A'CB' satisfait à la relation (234)

$$\tang R' = \frac{\tang\frac{A'B'}{2}}{\sin(C - \Delta')} = \frac{\tang\frac{A'B'}{2}}{\sin\Delta}.$$

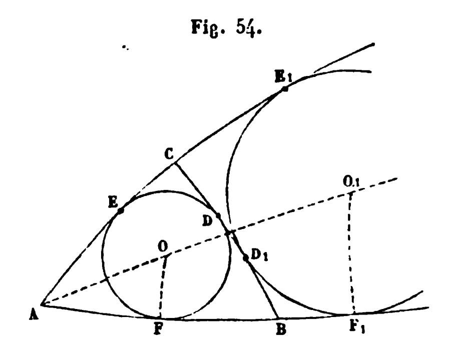
A'B' et Δ étant constants par hypothèse, il en est de même de R'. Le sommet C appartient donc à une circonférence de cercle passant par les points A' et B', diamétralement opposés aux points A et B, et dont le rayon est R'. Cette circonférence, facile à tracer (*Géom.*, 564), est le lieu géométrique qu'on voulait découvrir.

236. II. *Rayon sphérique du cercle inscrit.*

Soient le triangle sphérique ABC (*fig.* 54) et le pôle O du

cercle inscrit dans ce triangle, dont il touche les côtés aux points D, E, F. Menons l'arc de grand cercle OA, et abaissons

Fig. 54.



sur AB l'arc de grand cercle perpendiculaire OF qui représente le rayon sphérique r du cercle inscrit (*Géom.*, 555). Le triangle rectangle OFA donne immédiatement (201)

$$\operatorname{tang} r = \sin \mathrm{AF} \operatorname{tang} \mathrm{OAF}.$$

L'angle OAF est évidemment égal à l'angle $\frac{\mathrm{A}}{2}$. Quant à AF, on a (*Géom.*, 565)

$$\mathrm{AF} = c - \mathrm{BF} = c - \mathrm{BD},$$
$$\mathrm{AF} = \mathrm{AE} = b - \mathrm{CE} = b - \mathrm{CD},$$

c'est-à-dire, en ajoutant,

$$2\mathrm{AF} = b + c - a = 2(p-a) \quad \text{ou} \quad \mathrm{AF} = p - a.$$

Par suite, il vient finalement

$$(1) \qquad \operatorname{tang} r = \sin(p-a) \operatorname{tang} \frac{\mathrm{A}}{2}.$$

En remplaçant $\operatorname{tang} \frac{\mathrm{A}}{2}$ par sa valeur en fonction des côtés (216), on obtient cette seconde expression

$$(1\,bis) \qquad \operatorname{tang} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

237. III. *Rayons sphériques des cercles ex-inscrits.*

Les cercles ex-inscrits à un triangle sphérique ABC sont

ceux qui s'appuient respectivement sur chacun des côtés a, b, c, en touchant les prolongements des deux autres côtés.

Prenons, par exemple (*fig.* 54), celui dont le pôle O_1 tombe dans l'intérieur de l'angle A, qui s'appuie en D_1 sur le côté a, et qui touche les prolongements des côtés b et c en E_1 et en F_1. Le triangle rectangle O_1F_1A, où l'arc perpendiculaire O_1F_1 représente le rayon sphérique r_a du cercle ex-inscrit considéré, donne

$$\tang r_a = \sin AF_1 \tang O_1AF_1.$$

L'angle O_1AF_1 est égal à $\frac{A}{2}$. Quant à AF_1, on a

$$AF_1 = c + BF_1 = c + BD_1,$$

$$AF_1 = AE_1 = b + CE_1 = b + CD_1,$$

c'est-à-dire, en ajoutant,

$$2AF_1 = a + b + c = 2p \quad \text{ou} \quad AF_1 = p.$$

Par suite, il vient finalement

$$(2) \qquad \tang r_a = \sin p \tang \frac{A}{2}.$$

On trouverait de même, pour les rayons sphériques des cercles ex-inscrits qui s'appuient sur les côtés b et c,

$$(3) \qquad \tang r_b = \sin p \tang \frac{B}{2},$$

$$(4) \qquad \tang r_c = \sin p \tang \frac{C}{2}.$$

Si l'on remplace alors $\tang \frac{A}{2}$, $\tang \frac{B}{2}$, $\tang \frac{C}{2}$, par leurs valeurs en fonction des côtés (216), on obtient ces autres expressions

$$(2\ bis) \qquad \tang r_a = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin(p-a)}},$$

$$(3\ bis) \qquad \tang r_b = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin(p-b)}},$$

$$(4\ bis) \qquad \tang r_c = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin(p-c)}}.$$

L'analogie des formules précédentes avec les formules correspondantes de la Trigonométrie rectiligne doit être remarquée.

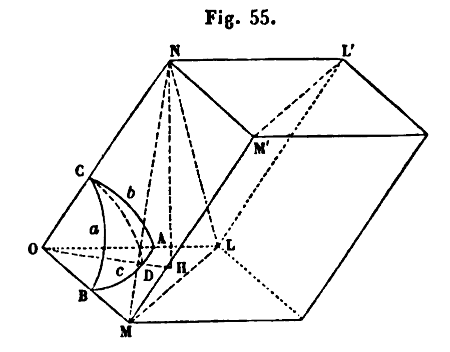
Volume d'un parallélipipède oblique en fonction de ses arêtes et des angles qu'elles font entre elles.

238. Posons (*fig.* 55)

$$OL = \lambda, \quad OM = \mu, \quad ON = \nu.$$

Admettons que le sommet O soit le centre d'une sphère ayant pour rayon l'unité. Les arêtes OL, OM, ON, détermineront par leurs intersections avec cette sphère un triangle sphérique ABC dont les côtés *a*, *b*, *c*, mesureront précisément les angles formés par les arêtes OL, OM, ON, considérées deux à deux.

Fig. 55.



L'aire du parallélogramme qui a pour côtés λ et μ est égale à

$$\lambda\mu \sin AOB = \lambda\mu \sin c.$$

Si l'on abaisse du sommet N sur la base la perpendiculaire NH, le triangle rectangle NHO donne

$$NH = \nu \sin NOH.$$

Mais dans le triangle sphérique rectangle correspondant CDA, le côté de l'angle droit CD mesure l'angle NOH, et l'on a (201)

$$\sin NOH = \sin CD = \sin b \sin A.$$

Par suite, le volume du parallélipipède étant égal au produit

de sa base par sa hauteur, on peut écrire, en désignant par V le volume cherché,

$$V = \lambda\mu\nu \sin b \sin c \sin A = 2\lambda\mu\nu \sin b \sin c \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

On a d'ailleurs (216)

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Il vient donc

$$V = 2\lambda\mu\nu\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}.$$

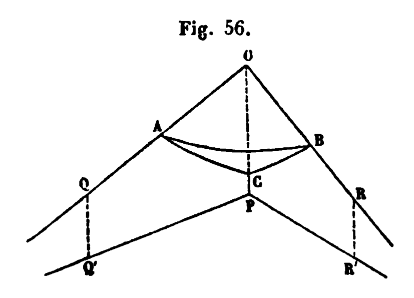
239. Le plan diagonal LML′M′ partage le parallélipipède en deux prismes triangulaires équivalents. Or, le tétraèdre OLMN formé sur les trois arêtes λ, μ, ν, peut être regardé comme ayant pour sommet N et pour base OLM : il est donc le tiers du prisme $\frac{V}{2}$ ou le sixième du parallélipipède V, de sorte que son volume v a pour expression

$$v = \frac{\lambda\mu\nu}{3}\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}.$$

Réduction d'un angle à l'horizon.

240. Supposons (*fig.* 56) que, d'un point O de l'espace, on ait dirigé vers deux points Q et R les rayons visuels OQ, OR,

Fig. 56.



et qu'on ait mesuré l'angle QOR. Il s'agit de calculer l'angle Q′PR′, *projection* de l'angle QOR sur *le plan horizontal*.

On a en O un angle trièdre, dont les faces sont l'angle QOR et les angles QOP, ROP, formés par les rayons visuels OQ, OR, avec *la verticale* OP. Admettons que le sommet O soit le centre d'une sphère ayant pour rayon l'unité. L'angle trièdre O déterminera sur cette sphère un triangle sphérique ABC, dont les côtés mesureront les faces de l'angle trièdre, et dont les angles seront égaux aux angles dièdres du trièdre. L'angle dièdre OP ou l'angle C du triangle sphérique étant mesuré par l'angle Q′PR′, la question est ramenée à résoudre le triangle ABC *dans lequel on connaît les trois côtés.*

On dirigera le calcul, comme il a été indiqué (216), de manière à obtenir immédiatement l'angle C, seul élément qu'on veuille déterminer, c'est-à-dire qu'on emploiera la formule

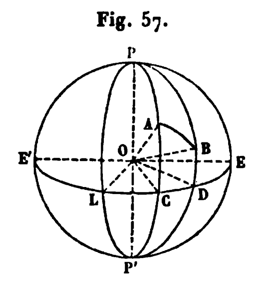
$$\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}.$$

Plus courte distance de deux points sur la sphère terrestre.

241. *Trouver la distance sphérique de deux points de la surface terrestre, connaissant leurs longitudes et leurs latitudes.*

Soient (*fig.* 57) PP′ l'axe *polaire* et EE′ *l'équateur;* soient A et B les deux points dont on veut mesurer la distance sur la surface de la Terre. Supposons que PLP′ soit le grand cercle ou le *méridien* à partir duquel on est convenu de compter les *longitudes*. La longitude du point A sera l'angle dièdre du méridien qui lui correspond, avec le méridien PLP′. Cet angle sera évidemment mesuré par l'arc LC intercepté sur l'équateur par les deux méridiens. De même, la longitude du point B sera mesurée par l'arc LD. La longitude est *orientale* ou *occidentale*, c'est-à-dire *positive* on *négative,* suivant que le point considéré est à *l'est* ou à *l'ouest* du méridien choisi pour origine.

Fig. 57.



Quant à *la latitude* du point A, c'est l'angle AOC formé par le rayon OA (*verticale* du point A) avec l'équateur : cet angle

est mesuré sur le méridien PAP′ par l'arc AC, qui va du point A à l'équateur. De même, la latitude du point B sera mesurée par l'arc BD. La latitude est *boréale* ou *australe*, c'est-à-dire *positive* ou *négative*, suivant que le point considéré est situé dans l'hémisphère boréal ou austral.

Cela posé, dans le triangle sphérique APB, on connaît l'angle P mesuré par l'arc CD, *différence* des deux longitudes données, et les deux côtés PA et PB qui comprennent cet angle, puisque ces deux côtés sont *les compléments* des latitudes données. On rentre donc ainsi dans le *troisième cas* de la résolution des triangles sphériques quelconques.

D'une manière générale, l'angle P est la différence ou la somme *arithmétique* des longitudes données, suivant qu'elles sont ou non *de même espèce* ou *de même signe*. De même, chacun des côtés PA et PB est égal à 90° *diminués* ou *augmentés* de la latitude du point correspondant, suivant que ce point est situé sur l'hémisphère *boréal* ou sur l'hémisphère *austral.*

Proposons-nous, comme exercice, de *calculer la distance sphérique de Paris à Rome.*

La longitude de Paris est...	0°
Celle de Rome............	$10^\circ\ 6'47'',2 = L'$,
La latitude de Paris est.....	$48^\circ 50' 49'' \quad = \lambda$,
Celle de Rome............	$41^\circ 53' 52'' \quad = \lambda'$.

Nous ne cherchons que le troisième côté $AB = p$ du triangle APB. En nous reportant à la *fig.* 57 et au n° 217, les formules à employer sont :

$$\tang\varphi = \tang a \cos P,$$

$$\cos p = \frac{\cos a \cos(b - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Calcul de φ.

$$\log \tang a = \log \tang(90^\circ - \lambda') = 0,0471210$$
$$\log \cos P = \log \cos L' = \bar{1},9931994$$
$$\log \tang\varphi = 0,0403204$$
$$\varphi = 47^\circ 39' 21'',2$$

Calcul de p.

$$\log\cos a = \log\cos(90^\circ - \lambda') = \bar{1},8246488$$
$$\log\cos(b - \varphi) = \log\cos(90^\circ - \lambda - \varphi) = \bar{1},9971969$$
$$\overline{\mathrm{L}}\cos\varphi = 0,1716097$$
$$\log\cos p = \bar{1},9934554$$
$$p = 9^\circ 55' 18'',9$$

Si l'on veut avoir en mètres la longueur de p, on a recours à la formule du n° **232** :

$$l^{m} = p'' \frac{10000}{324}.$$

Si l'on veut avoir cette longueur en kilomètres, la formule devient

$$l^{Km} = p'' \frac{10}{324}.$$

Calcul de l.

$$\log p'' = \log 35718,9 = 4,5528981$$
$$\log 10 = 1,0000000$$
$$\overline{\mathrm{L}}.324 = \bar{3},4894550$$
$$\log l = 3,0423531$$
$$l = 1102,435$$

Ainsi, la distance sphérique de Paris à Rome est d'environ $1102^{Km},5$ ou d'environ 275,5 lieues métriques.

On pourrait encore évaluer p en degrés et fraction décimale de degré. On aurait alors, puisque la demi-circonférence d'un grand cercle est égale à 20000^{Km},

$$\frac{l^{Km}}{20000^{Km}} = \frac{p}{180} \quad \text{ou} \quad l^{Km} = \frac{1000}{9} p,$$

c'est-à-dire, dans l'exemple choisi,

$$l^{Km} = \frac{1000}{9} 9,921917 = 1102^{Km},435.$$

242. Nous terminons ici la *Trigonométrie* proprement dite. Les questions qu'on développe habituellement, dans les Traités relatifs à cette partie des Mathématiques, sous le titre de *Complément de la théorie des fonctions circulaires*, appartiennent en réalité à l'*Algèbre supérieure*, et se trouvent exposées dans le Tome III de cet Ouvrage.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LA

OMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, PLANE ET DANS L'ESPACE,

ET LA

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR

LA GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

1. Le périmètre d'un triangle est compris entre la somme des droites qui joignent un point *intérieur* quelconque aux trois sommets et le double de cette somme.

2. Une médiane d'un triangle est comprise entre la demi-somme des deux côtés qui sont issus du même sommet et la moitié de l'excès de leur somme sur le troisième côté.

Il en résulte que le périmètre d'un triangle est compris entre la somme de ses trois médianes et le double de cette somme.

3. ABC étant un triangle quelconque, on prend sur AB, prolongé s'il le faut, $AC' = AC$; puis, sur AC, $AB' = AB$. On mène alors la droite B'C' qui coupe BC en un point I. Démontrer que la droite AI est la bissectrice de l'angle BAC.

4. Deux points sont dits *symétriques* par rapport à une droite ou axe indéfini XY, lorsque cet axe est perpendiculaire sur le milieu de AA'. On peut donc déterminer facilement le symétrique d'un point donné par rapport à un axe donné.

Démontrer que : 1° les droites AB, A'B', dont les extrémités sont des points symétriques par rapport au même axe, sont égales entre elles; 2° les angles CAB, C'A'B', des droites CA, CB, et de leurs symétriques C'A', C'B', par rapport au même axe, sont égaux entre eux.

5. Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène à la bissectrice de l'angle A la perpendiculaire indéfinie XY. Démontrer que, si M est un

point quelconque de XY, le périmètre du triangle MBC est plus grand que celui du triangle donné ABC.

6. Trouver le lieu des milieux des portions de droites qui vont d'un point donné à une droite donnée.

7. Étant donné un point à l'intérieur *ou* à l'extérieur d'un angle, mener entre les côtés de l'angle une droite qui soit divisée par ce point *ou* par l'un des côtés de l'angle en deux parties égales.

8. En s'appuyant sur ce que les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point (81), mener par un point donné une droite qui aille passer par le point de concours, *supposé inaccessible*, de deux droites données.

9. Dans un triangle, le point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés (80), le point de concours des trois médianes (84) et celui des trois hauteurs (81), sont en ligne droite; la distance du premier point au deuxième est moitié de la distance du deuxième point au troisième.

10. Dans un triangle, au plus grand côté correspond la plus petite médiane. — Conséquence.

11. Si, par le point d'intersection I des bissectrices des angles B et C d'un triangle ABC, on mène entre les côtés de l'angle A la parallèle DE à BC, la droite DE sera égale à la somme de BD et de CE. Si, par le point d'intersection I' de la bissectrice de l'angle B et de celle du supplément de l'angle C, on mène entre les côtés de l'angle A ou de son opposé par le sommet la parallalèle D'I'E' à BC, la droite D'E' sera égale à la différence de BD' et de CE'. — Conséquences.

12. La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante. — Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est pris sur le prolongement de la base?

13. Trouver le lieu géométrique des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constamment égale à une longueur donnée.

14. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral à ses trois côtés est constante. — Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est extérieur au triangle?

15. Démontrer que : 1° si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles, leurs bissectrices sont parallèles ou perpendiculaires entre elles; 2° si deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires ou parallèles entre elles.

16. Déterminer sur l'un des côtés d'un triangle un point tel, que les longueurs interceptées par les deux autres côtés, sur les parallèles menées de ce point à ces mêmes côtés, soient égales entre elles.

17. Étant donnés deux points A et B et une droite XY, trouver sur cette droite un point M tel que la somme AM + BM soit un minimum.

18. Étant donnés deux points A et B et une droite XY, trouver sur cette droite un point M tel que la différence BM — AM soit un maximum.

19. Étant donnés un triangle ABC et un point O pris dans son intérieur, démontrer que l'angle BOC est toujours plus grand que l'angle BAC du triangle.

20. Un angle d'un triangle est droit, aigu ou obtus, suivant que la médiane issue du sommet de cet angle est égale, supérieure ou inférieure à la moitié du côté opposé. — Réciproques.

21. Si, d'un point A pris hors d'une droite XY, on mène sur cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE, de manière que ces obliques soient situées d'un même côté de AB et que les angles BAC, CAD, DAE, soient égaux, on a $BC < CD < DE$.

22. Soient un triangle ABC, et AO, BO, CO, les bissectrices de ses angles; AO prolongée coupant le côté BC en D, et OI étant la perpendiculaire menée du point O sur BC, démontrer que l'angle BOD est égal à l'angle COI.

23. L'angle formé par la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC et par la perpendiculaire menée du sommet A sur le côté BC est égal à la demi-différence des angles B et C.

24. La différence entre les deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à l'angle formé par la hauteur et la médiane issues du sommet de l'angle droit. — Si l'on rapproche ce résultat du précédent, quelle conclusion peut-on en déduire?

25. Si l'on mène les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC, les trois triangles partiels et le triangle total qu'elles déterminent autour du triangle donné sont équiangles. Chaque angle du triangle ABC a pour supplément le double de l'angle qui lui est opposé dans le triangle total.

26. Dans un triangle rectangle, si l'un des angles aigus est double de l'autre, l'hypoténuse est double du plus petit côté. — Réciproque.

27. L'angle des bissectrices de deux angles consécutifs d'un quadrilatère convexe est égal à la demi-somme des deux autres angles du quadrilatère. L'angle des bissectrices de deux angles opposés est égal à la demi-différence des deux autres angles.

28. Les bissectrices des angles formés en prolongeant jusqu'à leur rencontre les côtés opposés d'un quadrilatère convexe se coupent sous un angle égal à la demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère.

29. Tout quadrilatère est la moitié du parallélogramme que l'on obtient en menant par les extrémités de chaque diagonale des parallèles à l'autre

diagonale. — Déduire de ce théorème que deux quadrilatères ont même surface lorsque leurs diagonales sont respectivement égales et se coupent sous le même angle.

30. Les droites qui joignent successivement les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme, moitié de la figure primitive. — Conséquence relative aux droites qui joignent les milieux des côtés du quadrilatère.

31. Étant donné un parallélogramme ABCD, on prend en sens inverse, sur les côtés opposés AB, CD, deux longueurs AE et CF, arbitraires, mais égales; de même, sur les côtés opposés AD, BC, on prend en sens inverse les longueurs arbitraires AH = CG. Démontrer : 1° que la figure EGFH est un parallélogramme inscrit dans le parallélogramme proposé; 2° que le *centre* du parallélogramme proposé est en même temps celui de tous les parallélogrammes qu'on peut y inscrire.

32. Le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque est le milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère.

33. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe forment un second quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. Lorsque le premier quadrilatère est un parallélogramme, le second est un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme et égales à la différence de ses côtés adjacents. Lorsque le premier quadrilatère est un rectangle, le second est un carré.

34. ABC étant un triangle rectangle et ABDM, ACEN, étant les carrés construits sur les côtés AB et AC de l'angle droit, des sommets D et E, opposés au sommet A, on abaisse des perpendiculaires DF, EG, sur l'hypoténuse BC prolongée. Démontrer : 1° que l'hypoténuse BC est égale à la somme des perpendiculaires DF et EG; 2° que le triangle proposé ABC est la somme des triangles DFB, CEG.

35. ABCD étant un parallélogramme, E et F étant les milieux des côtés opposés AB et CD, les droites BF et DE divisent la diagonale AC en trois parties égales.

36. D, E, F, étant respectivement les milieux des côtés AB, BC, CA, d'un triangle ABC, on mène DG parallèle à la médiane BF jusqu'à la rencontre de EF prolongée. Démontrer que les trois côtés du triangle DGC sont respectivement égaux aux trois médianes du triangle ABC.

37. Étant données deux parallèles XY, X'Y', et deux points A et B situés hors de ces parallèles et de côtés différents, trouver le plus court chemin de A en B par une ligne brisée AMNB telle, que la portion MN comprise entre les parallèles ait une direction donnée.

38. On peut inscrire dans un rectangle des parallélogrammes dont les côtés soient parallèles aux diagonales du rectangle.

Cela posé, dans quelle direction faut-il lancer la bille, sur un billard rectangulaire, pour qu'elle revienne au point de départ après avoir frappé successivement les quatre côtés? — Quelle est la longueur du chemin parcouru alors par la bille? — Comment généraliserait-on la question? (On suppose que, la bande étant parfaitement élastique, la bille se relève toujours de manière que l'angle de *réflexion* soit égal à l'angle d'*incidence*.)

39. Étant données la base d'un triangle et la différence des deux autres côtés, trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités de la base sur la bissectrice de l'angle au sommet. — Même question en remplaçant la différence des deux côtés par leur somme, et la bissectrice de l'angle au sommet par celle de son supplément.

40. Si l'on divise la corde d'un arc de cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division partagent l'arc en trois parties, dont les deux extrêmes sont égales entre elles et moindres que la partie intermédiaire.

41. Un cercle étant donné, combien faut-il de cercles de même rayon pour l'entourer?

42. AB étant un diamètre fixe d'un cercle, et CD une corde parallèle à ce diamètre, on mène CB et DA qui se coupent en M, puis CA et DB qui se coupent en N. Trouver le lieu des points M et N quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même.

43. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui partagent une circonférence donnée en deux parties égales?

44. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui coupent sous un angle donné une circonférence donnée?

45. A, B, C, A', B', C', étant six points pris sur une circonférence, de telle manière que AB soit parallèle à A'B' et AC à A'C', démontrer que BC' et CB' sont parallèles.

46. Les hauteurs AA', BB', CC', d'un triangle quelconque ABC, sont les bissectrices des angles du triangle A'B'C'.

47. Si, par le point A, commun à deux circonférences qui se coupent, on mène à volonté deux sécantes ABC, ADE, les cordes BD et CE qui joignent leurs extrémités se rencontrent sous un angle constant. — Dans le cas où les deux sécantes se confondent, comment faut-il énoncer le théorème?

48. Si, par le point d'intersection O des diagonales d'un quadrilatère inscrit ABCD, on mène la corde EOF qui a son milieu en O, la partie de cette corde interceptée entre les côtés opposés du quadrilatère sera aussi divisée par le point O en deux parties égales.

49. Si, dans un quadrilatère ABCD, on prolonge les côtés opposés AB

et CD jusqu'à leur rencontre E, puis les côtés opposés AD et BC jusqu'à leur rencontre F, on forme une figure qu'on nomme *quadrilatère complet,* et qui renferme quatre triangles ABF, ADE, BCE, DCF. Démontrer : 1° que les cercles circonscrits à ces quatre triangles passent par un même point ; 2° que ce point et les centres des quatre cercles sont sur une même circonférence.

50. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement à ce triangle les triangles équilatéraux ABC', ACB', BCA'. Démontrer : 1° que les trois droites AA', BB', CC', sont égales ; 2° qu'elles concourent en un même point O ; 3° que, du point O, on voit sous le même angle les trois côtés du triangle ABC.

51. Par un point fixe pris dans le plan d'un cercle, on lui mène des cordes : trouver le lieu des milieux de ces cordes.

52. Par l'une des extrémités d'un diamètre AB d'un cercle, on mène une corde quelconque AC que l'on prolonge d'une quantité CM égale à CB : quel est le lieu des points M ?

53. On donne un cercle et un point fixe A situé dans son plan. ABC étant une corde quelconque issue du point A, on élève sur le milieu de cette corde une perpendiculaire IM égale à IA. Quel est le lieu des points M ?

54. ABC étant un triangle équilatéral, quel est le lieu des points M, tels que $MA = MB + MC$?

55. Une circonférence roule dans l'intérieur d'un cercle de rayon double : quel est le lieu décrit par un point de cette circonférence ?

56. Deux circonférences O et O' étant tangentes intérieurement au point A, et BC étant une corde de la grande circonférence tangente en D à la petite circonférence, la droite AD est la bissectrice de l'angle BAC.

57. Construire un triangle, connaissant :

1° Deux côtés et une médiane (deux cas) ;

2° Un côté et deux médianes (deux cas) ;

3° Les trois médianes ;

4° La base, un angle à la base, et la somme ou la différence des deux autres côtés ;

5° La base, l'angle au sommet, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

58. Diviser un angle droit en trois parties égales.

59. Soient ABC un triangle, et ABDE, ACFG, BCHK, les carrés construits sur les trois côtés ; connaissant les longueurs des trois droites EG, FH, KD, construire le triangle ABC.

60. Décrire un cercle :

1° Touchant deux droites données, et l'une d'elles en un point donné :

2° Touchant une droite et une circonférence données, et cette circonférence en un point donné.

61. Construire un triangle, connaissant :

1° Les pieds des trois hauteurs;

2° Un angle, une hauteur et le périmètre (deux cas);

3° Un côté, l'un des angles adjacents et la longueur de la bissectrice de cet angle;

4° Le périmètre et les angles.

62. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

63. Construire un pentagone, connaissant les milieux des cinq côtés.

64. Par l'un des points d'intersection de deux cercles, mener une sécante commune qui ait son milieu en ce point.

65. Par un point extérieur à un cercle, mener une sécante dont la longueur totale soit double de sa partie extérieure.

66. Mener à un cercle une tangente qui fasse un angle donné avec une droite donnée.

67. Des sommets d'un triangle comme centres, décrire trois cercles qui se touchent deux à deux.

68. Si, du milieu A d'un arc BAC, on mène dans la circonférence correspondante deux cordes quelconques AD et AE qui coupent la corde BC aux points F et G, les quatre points D, F, G, E, appartiennent à une même circonférence.

69. Dans tout triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

70. Étant donnés un triangle, le cercle inscrit et les trois cercles exinscrits, démontrer : 1° que les quatre points de contact qui se trouvent sur un même côté (deux intérieurs et deux extérieurs) sont deux à deux équidistants du milieu de ce côté; 2° que la distance d'un point de contact extérieur au plus éloigné des deux sommets situés sur le même côté est égale au demi-périmètre du triangle; 3° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des sommets situés sur le même côté est égale au demi-périmètre diminué du côté opposé à ce sommet; 4° que la distance des deux points de contact intérieurs situés sur le côté considéré est égale à la différence des deux autres côtés du triangle; 5° que la distance des deux points de contact extérieurs est égale à la somme des deux autres côtés du triangle; 6° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des points de contact extérieurs est égale à celui des deux autres côtés du triangle qui aboutit au sommet situé entre ces deux points de contact.

71. Étant donnés la base et l'angle au sommet d'un triangle, trouver les lieux des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.

72. Le trapèze isocèle est le seul trapèze inscriptible.

73. ABC étant un triangle quelconque, on construit sur les côtés les carrés ABDE, ACFG, BCHK; on mène EG, DK, HF, DC, BF, et l'on abaisse la hauteur AI; démontrer : 1° que les trois droites DC, BF, AI, concourent en un même point; 2° que les perpendiculaires abaissées respectivement de A sur EG, de B sur DK, et de C sur FH, concourent en un même point.

74. On donne un cercle de centre O et un diamètre fixe AOB. Du point B, on mène une corde BC, que l'on prolonge d'une quantité CD égale à BC. On tire les droites CA et DO, qui se coupent en M. Quel est le lieu du point M, lorsque la corde BC tourne autour du point B?

75. On donne un cercle O et deux diamètres rectangulaires AA', BB'. Du point A, on mène une sécante ACI qui coupe le cercle en C et le diamètre BB' prolongé en I. La tangente en C au cercle O et la perpendiculaire en I au diamètre BB' se rencontrent en un point M dont on demande le lieu.

76. Construire un triangle équilatéral, sachant qu'il doit s'appuyer par ses trois sommets sur trois circonférences concentriques données.

77. Construire un triangle dont on connaît les angles, et qui ait ses trois sommets sur trois droites parallèles données.

78. Décrire un cercle qui touche une droite donnée en un point donné, et qui coupe un cercle donné sous un angle donné.

79. On donne un triangle ABC, rectangle en A; une perpendiculaire quelconque DE à l'hypoténuse coupe le côté BA en D, le côté CA en F; on mène les droites DC et BF qui se rencontrent en M; trouver le lieu du point M.

80. Démontrer que, si l'on mène entre les deux côtés d'un triangle une suite de parallèles à la base, la médiane qui correspond à cette base est le lieu des points d'intersection des diagonales des trapèzes ainsi obtenus.

81. Trouver le lieu géométrique des points d'un plan également éclairés par deux foyers lumineux placés dans ce plan, et dont les intensités à l'unité de distance sont représentées par les nombres a et b.

82. Trouver, dans le plan déterminé par trois foyers lumineux, le point également éclairé par chacun d'eux.

83. Trouver le lieu des points qui partagent dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ toutes les droites comprises entre un point donné A et un cercle donné O.

84. Trouver le lieu des points d'où l'on voit sous un même angle donné deux cercles donnés.

85. Trouver le point d'où l'on voit sous un même angle donné trois cercles donnés.

86. Soient deux droites quelconques AB et XY. Si AB est divisée au point C dans le rapport $\frac{m}{n}$, et si des points A, B, C, on mène jusqu'à XY les parallèles AA′, BB′, CC′, à une direction quelconque, on a toujours

$$CC'(m+n) = n.AA' + m.BB'.$$

87. Étant donnés un point A et un cercle O, on mène à ce cercle par le point A une sécante ABC sur laquelle on prend un point M tel, qu'on ait $AM.AC = k^2$; trouver le lieu décrit par le point M, quand la sécante ABC tourne autour du point A.

88. AB est un diamètre d'un cercle, CD une corde perpendiculaire à AB; par un point P pris sur CD, on mène une corde APQ : démontrer que le produit AP.AQ est constant.

89. Étant donnés un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle, on mène la bissectrice AD de l'angle A qui coupe BC en D et le cercle circonscrit en E, et la bissectrice AD′ du supplément de l'angle A qui coupe BC prolongé en D′ et le cercle circonscrit en E′ : démontrer que BE est la moyenne proportionnelle de EA et de ED, et que BE′ est la moyenne proportionnelle de E′A et de E′D′.

90. Deux droites se coupent à angle droit dans un cercle ou hors d'un cercle : démontrer que la somme des carrés des deux droites opposées déterminées par leurs points d'intersection avec la circonférence est égale au carré du diamètre, ainsi que la somme des carrés des quatre segments des deux droites données.

91. Si, dans le problème précédent, AB et CD sont les cordes interceptées par la circonférence O sur les deux droites données qui se coupent perpendiculairement en E, on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 4\overline{OE}^2 = 8\overline{OA}^2.$$

92. Si ABCD est un parallélogramme, et si l'on décrit un cercle passant par A et coupant respectivement en F, H, G, les côtés AB et AD et la diagonale AC, démontrer la relation

$$AB.AF + AD.AH = AC.AG.$$

93. Un cercle et un quadrilatère inscrit étant donnés, démontrer que, si l'on *complète* le quadrilatère :

1° Le carré de la troisième diagonale est égal à la somme des carrés des tangentes issues de ses extrémités;

2° Cette diagonale est égale à la somme des deux tangentes issues de son milieu;

3° Le cercle décrit sur cette diagonale comme diamètre coupe orthogonalement le cercle donné.

94. Si, du sommet d'un angle A d'un triangle quelconque ABC, on mène une droite AB′ anti-parallèle à AC par rapport à l'angle C, puis une droite AC′ anti-parallèle à AC par rapport à l'angle B, on obtient sur le troisième côté BC trois segments B′C′, BC′, CB′, dont les deux extrêmes BC′ et CB′ sont, l'un BC′ adjacent au côté AB, l'autre CB′ adjacent au côté AC: démontrer que :

1° Chaque côté de l'angle A est moyen proportionnel entre le troisième côté et le segment qui lui est adjacent;

2° Les deux droites AC′ et AB′ sont égales entre elles, et chacune d'elles est moyenne proportionnelle entre les deux segments extrêmes BC′ et CB′.

Déduire de là une démonstration directe des théorèmes des nos 167 et 168.

95. Dans tout triangle, la somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les trois côtés est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.

96. Par deux points donnés, faire passer un cercle qui coupe en deux parties égales une circonférence donnée.

97. Si les bissectrices des angles à la base d'un triangle sont égales, ce triangle est isocèle.

98. Quatre points étant sur une même circonférence, dans chacun des triangles formés par ces quatre points, pris trois à trois, existe un point de rencontre des hauteurs : démontrer que ces quatre points de rencontre sont sur une même circonférence égale à la première.

99. Si les trois côtés d'un triangle font respectivement avec les trois côtés d'un autre triangle des angles égaux, ces deux triangles sont semblables.

100. Étant donné un triangle ABC, y inscrire un triangle semblable à un triangle donné, et qui ait l'un de ses sommets en un point donné sur l'un des côtés du triangle ABC.

101. Un billard circulaire étant donné, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ, après avoir frappé deux fois la bande?

102. On donne une droite XY et un angle BAC dont le sommet est en un point fixe A hors de cette droite. Le point B étant le point commun à la droite XY et au côté BA, on prend sur l'autre côté de l'angle BAC un point C tel, qu'on ait

$$AB.AC = k^2.$$

Déterminer le lieu décrit par le point C, lorsque l'angle BAC tourne autour de son sommet.

103. Mener à un cercle donné, par deux points donnés extérieurement, deux sécantes qui se coupent sur le cercle, et dont les deux autres points d'intersection avec la circonférence déterminent une corde parallèle à une direction donnée.

104. Inscrire dans un triangle donné un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit minimum.

105. Circonscrire au système de trois cercles donnés un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit maximum.

106. Inscrire dans un triangle donné trois cercles dont les rayons et les distances des centres soient dans un rapport donné, et qui forment un système minimum.

107. Trouver le lieu du troisième sommet d'un triangle semblable à un triangle donné, et dont un sommet reste fixe, tandis que l'autre décrit une droite ou une circonférence donnée.

108. On donne un triangle ABC rectangle en A; une perpendiculaire DE à l'hypoténuse coupe le côté BA en D, le côté CA en F; on mène les droites CD, BF, qui se coupent : lieu des points M d'intersection.

109. Dans tout quadrilatère inscriptible : 1° le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés; 2° le rapport des diagonales est égal au rapport des sommes formées par les produits des côtés qui aboutissent respectivement aux extrémités de chaque diagonale. — Réciproques.

110. Quand un losange ABCD est circonscrit à un cercle, toute tangente MM' à ce cercle détermine sur les côtés AB et AD deux segments BM et DM' dont le produit est constant.

111. Deux cercles tangents extérieurement étant donnés, la distance des deux points de contact d'une tangente commune *extérieure* à ces deux cercles est la moyenne proportionnelle de leurs diamètres.

112. Lorsque deux triangles ont deux angles égaux et deux angles supplémentaires chacun à chacun, les côtés de ces triangles respectivement opposés à ces angles sont proportionnels.

113. On donne deux cercles, dont l'un a pour centre un point O de la circonférence de l'autre; si l'on mène au cercle O une tangente quelconque, qui rencontre l'autre cercle en M et en M', le produit OM.OM' est constant.

114. Inscrire un carré dans un triangle. — Discussion.

115. Inscrire dans un rectangle donné un rectangle semblable à un autre rectangle donné. — Discussion.

116. a, b, c, désignant les longueurs des trois côtés d'un triangle; p, q, r, celles des trois hauteurs; x, y, z, les côtés des trois carrés inscrits; x', y', z', les côtés des trois carrés ex-inscrits : démontrer les relations

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{a},\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{q}+\frac{1}{b},\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{r}+\frac{1}{c},$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a},\quad \frac{1}{y'}=\frac{1}{q}-\frac{1}{b},\quad \frac{1}{z'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{c}.$$

117. Sur la base BC d'un triangle ABC, on décrit extérieurement au triangle un carré BCDE; on mène les droites AD et AE qui coupent BC en P et Q : démontrer que PQ est égal au côté du carré inscrit dans le triangle ABC et reposant sur BC.

118. Dans tout triangle ABC, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A est égal au produit de la bissectrice de l'angle extérieur supplémentaire par la distance du milieu de BC à la première bissectrice; de même, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle extérieur A est égal au produit de la bissectrice de l'angle intérieur supplémentaire par la distance du milieu de BC à la première bissectrice.

119. Le produit des distances d'un point quelconque d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans cette circonférence est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés.

120. Si, des trois sommets d'un triangle et du point de rencontre de ses médianes, on mène des parallèles dans une direction donnée jusqu'à un axe quelconque, la dernière parallèle est la moyenne arithmétique des trois premières.

121. Étant donnés deux triangles et un point, mener par ce point une droite telle, que les sommes respectives des distances des sommets des deux triangles à cette droite soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

122. Si, du milieu d'un des côtés d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, la différence des carrés des segments déterminés sur l'hypoténuse est égale au carré de l'autre côté du triangle.

123. Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est le double de la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

124. Soit G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC; démontrer la relation

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=3\left(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2\right).$$

— En déduire le rapport de la somme des carrés des côtés d'un triangle à la somme des carrés de ses médianes.

125. Soient G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC, et M un point quelconque pris dans son plan : démontrer la relation

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3\overline{MG}^2.$$

126. Étant donné un triangle ABC, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux trois sommets du triangle est constante et égale à un carré donné k^2.

127. La somme des carrés de deux côtés d'un quadrilatère, plus la somme des carrés des diagonales, est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint les milieux de ces côtés.

128. La somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le produit des bases.

129. Si l'on prend deux points à égale distance du centre sur le diamètre d'un cercle, la somme des carrés des distances d'un point de la circonférence à ces deux points est constante.

130. Dans tout triangle ABC, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A est égal au carré de la moitié de BC, diminué du carré de la demi-différence des côtés AB et AC ; de même, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle extérieur A est égal au carré de la demi-somme des côtés AB et AC, diminué du carré de la moitié de BC.

131. Le sommet A d'un rectangle ABCD est fixe, les sommets B et D se meuvent sur un même cercle ; quel est le lieu du sommet C opposé au sommet A ?

132. Trouver le lieu des points qui partagent les diverses cordes d'un cercle donné en deux segments (additifs ou soustractifs) dont le produit soit constant.

133. Étant donnés un cercle O et un point P, trouver le lieu des points M tels, que la distance MP soit égale à la tangente menée du point M au cercle O.

134. b et c étant les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, et h la hauteur qui correspond à l'hypoténuse, démontrer la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

135. a, b, c, étant les côtés d'un triangle rectangle en A, et h la hau-

teur qui correspond à l'hypoténuse a, le triangle qui a pour côtés $b+c$, h et $a+h$, est aussi rectangle.

136. Si un triangle équilatéral a ses sommets respectivement situés sur trois droites parallèles, et si b et c sont les distances de la parallèle intermédiaire aux deux autres, le côté du triangle a pour expression

$$2\sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{3}}.$$

137. Dans tout trapèze, la différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des côtés non parallèles comme la somme des côtés parallèles est à leur différence.

138. Calculer les diagonales d'un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

139. ABCD est un quadrilatère, E le milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales; si du point E comme centre on décrit un cercle, montrer que la somme des carrés des distances d'un point P de ce cercle aux quatre sommets A, B, C, D, est constante et égale à la somme des carrés des distances du centre E aux mêmes sommets, plus quatre fois $\overline{EP}^2$.

140. Si l'on mène une tangente à un cercle, la partie de cette tangente interceptée par les tangentes menées aux extrémités d'un même diamètre est divisée au point de contact en deux segments dont le produit est égal au carré du rayon.

141. Soit un triangle ABC rectangle en A, et partagé en deux autres triangles rectangles par la perpendiculaire AD abaissée du sommet A sur l'hypoténuse; si l'on désigne par R, r, r', les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, ABD, ACD, on a

$$R^2 = r^2 + r'^2.$$

142. Deux cercles dont les rayons sont dans le rapport de 2 à 3 se touchent intérieurement, et par le centre du plus petit cercle on mène une droite perpendiculaire à la ligne des centres; démontrer que les tangentes menées au plus petit cercle par les points où cette perpendiculaire rencontre le plus grand sont à angle droit l'une sur l'autre.

143. AOB est un quadrant; si l'on tire la corde Qq parallèle à la corde AB, en la prolongeant jusqu'à ses points de rencontre R et r avec les rayons OA et OB, on a

$$\overline{QR}^2 + \overline{Qr}^2 = \overline{AB}^2.$$

144. Mener par un point donné entre deux droites données une droite telle, que le point donné la partage dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

145. Étant donnés deux points sur une circonférence, déterminer sur cette circonférence un troisième point tel, que le rapport de ses distances aux deux premiers soit égal à un rapport donné $\frac{m}{n}$.

146. Inscrire dans un triangle un rectangle dont le rapport des côtés soit donné.

147. Déterminer le point dont les distances à trois points donnés sont dans les rapports donnés.

148. Inscrire dans un triangle un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

149. Décrire un cercle qui coupe en deux parties égales trois circonférences données.

150. Étant données trois circonférences concentriques, construire un triangle semblable à un triangle donné et qui ait ses sommets respectivement situés sur les trois circonférences données.

151. Construire un carré, connaissant la somme ou la différence de sa diagonale et de son côté.

152. Étant données deux droites qu'on ne peut prolonger, mener par un point donné une droite qui aille passer par le point de concours inconnu des deux premières.

153. Mener par le point d'intersection de deux circonférences une sécante telle, que les cordes interceptées sur elle par les deux circonférences soient dans un rapport donné.

154. Par un point donné, faire passer : 1° une circonférence qui touche deux droites données; 2° une circonférence tangente à deux circonférences données; 3° une circonférence tangente à une droite et à une circonférence données.

155. Construire une circonférence tangente à deux droites données et à une circonférence donnée.

156. Construire une circonférence tangente à une droite donnée et à deux circonférences données.

157. En joignant de deux en deux les sommets d'un pentagone régulier *ou* en prolongeant ses côtés de deux en deux, les points d'intersection obtenus forment intérieurement *ou* extérieurement un autre pentagone régulier.

158. Si l'on prolonge deux côtés AB et CD d'un polygone régulier de centre O, séparés par un seul côté BC, jusqu'à leur rencontre en E, le quadrilatère AECO est inscriptible.

159. Prouver qu'on peut exécuter un pavage, soit avec des triangles équilatéraux, soit avec des carrés, soit avec des hexagones réguliers. — On

ne peut le faire en employant des pentagones réguliers ou des polygones réguliers de plus de six côtés.

160. On peut exécuter un pavage, soit en assemblant à la fois des carrés et des octogones réguliers de même côté, soit en assemblant des triangles équilatéraux et des dodécagones réguliers de même côté, soit en assemblant des décagones et des pentagones réguliers de même côté.

161. Un polygone équilatéral inscrit dans un cercle est régulier. — Un polygone équilatéral circonscrit à un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair.

162. Un polygone équiangle inscrit dans un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair. — Un polygone équiangle circonscrit à un cercle est régulier.

163. Si l'on rapporte un polygone régulier à deux axes coordonnés, les coordonnées de son centre sont respectivement les moyennes arithmétiques des coordonnées de ses différents sommets par rapport aux axes considérés. — Application au triangle équilatéral.

164. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un polygone régulier aux m côtés de ce polygone est égal à m fois l'apothème. — Considérer le cas où le point choisi est extérieur.

165. Si, d'un point P du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC, on mène des droites à ses sommets, la somme $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ est constante. — Si ABCP, A'B'C'P', sont deux cercles concentriques dans lesquels soient inscrits les triangles équilatéraux ABC, A'B'C', on a

$$\overline{AP'}^2 + \overline{BP'}^2 + \overline{CP'}^2 = \overline{A'P}^2 + \overline{B'P}^2 + \overline{C'P}^2.$$

166. AB et AC étant les côtés du pentagone et du décagone régulier inscrits daus un cercle dont le centre est O, on mène la bissectrice de l'angle AOC qui coupe en D le côté AB : démontrer la similitude des triangles ACB et ACD, ainsi que celle des triangles AOB et DOB, et en déduire la relation connue

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OA}^2.$$

167. Deux diagonales d'un pentagone régulier qui n'aboutissent pas au même sommet se coupent en moyenne et extrême raison.

168. Dans un polygone inscrit d'un nombre de côté pair, la somme des angles de rang impair est toujours égale à la somme des angles de rang pair.

169. Sur une droite donnée comme côté, décrire un octogone régulier.

170. Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés deux

ois moindre. — Appliquer la formule trouvée à la recherche du côté du pentagone régulier, connaissant le côté du décagone régulier.

171. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux sommets d'un polygone régulier est constante et égale à un carré donné.

172. m étant le rapport des périmètres de deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés, et m' le rapport des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, démontrer la relation

$$m' = \sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

173. Inscrire dans un triangle équilatéral donné trois cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du côté du triangle.

174. Inscrire dans un cercle donné m cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du rayon du cercle donné et de la corde qui sous-tend la $m^{\text{ième}}$ partie de sa circonférence.

175. Dans deux circonférences de rayons différents, le rapport des angles au centre qui interceptent des arcs de même longueur est égal au rapport inverse des rayons.

176. Si deux circonférences sont tangentes intérieurement à une troisième circonférence, et si la somme de leurs rayons est égale à celui de cette troisième circonférence, l'arc compris entre leurs points de contact sur la grande circonférence est égal à la somme des arcs respectivement compris sur les circonférences intérieures entre leur point de rencontre le plus rapproché de la grande circonférence et les mêmes points de contact.

177. Démontrer que π est compris entre 3 et 4, par la considération des périmètres de l'hexagone régulier inscrit et du carré circonscrit.

178. Quelle erreur commet-on en remplaçant la demi-circonférence d'un cercle par la somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrit dans ce cercle?

179. Connaissant les longueurs a, b, c, des cordes de trois arcs formant ensemble la demi-circonférence, chercher de quelle équation dépend le diamètre x du cercle considéré.

180. Évaluer le périmètre du polygone régulier de vingt côtés formé par les intersections successives des côtés du décagone régulier étoilé.

181. Inscrire dans un cercle donné un triangle isocèle dont la somme de la base et de la hauteur soit égale à une droite donnée.

182. Trouver le lieu décrit par le sommet de l'angle droit d'un triangle

rectangle, dont les deux autres sommets glissent respectivement sur deux axes rectangulaires donnés.

183. La courbe plane dont toutes les normales concourent en un même point est une circonférence.

184. Étant donnés sur une droite trois segments $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, déterminer le point P d'où ces trois segments sont vus sous le même angle : discussion. — Applications aux valeurs $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

185. On partage une droite donnée en moyenne et extrême raison; puis, le plus grand segment trouvé en moyenne et extrême raison, et ainsi de suite indéfiniment. Trouver la limite vers laquelle tend la somme des plus grands segments obtenus de cette manière.

186. Inscrire dans un cercle le polygone régulier de dix-sept côtés. Montrer que le côté de ce polygone est sensiblement égal à la moitié de l'excès du côté du triangle équilatéral inscrit sur le côté de l'hexagone régulier inscrit, et trouver une limite de l'erreur qui répond à cette valeur approchée.

LIVRE DEUXIÈME.

LES SURFACES.

---

187. L'aire d'un trapèze est égale au produit d'un de ses côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée du milieu de l'autre côté sur le premier.

188. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle, mener une droite telle, que la partie interceptée par les côtés de l'angle soit un minimum *ou* qu'il en soit de même de l'aire du triangle déterminé.

189. Mener, dans un angle donné, la droite de longueur minimum qui intercepte un triangle d'aire donnée.

190. On donne un rectangle ABCD; on prend un point quelconque E sur BC, un point quelconque F sur CD. Démontrer que le rectangle ABCD équivaut au double du triangle AEF, augmenté du rectangle ayant pour dimensions les segments BE et DF.

191. Tout rectangle est moitié du rectangle qui a pour dimensions les diagonales des carrés construits sur ses côtés adjacents.

192. Si, par le milieu E de la diagonale BD d'un quadrilatère ABCD, on mène la parallèle FEG à la seconde diagonale AC, démontrer que la droite AG divise le quadrilatère en deux parties équivalentes.

193. P étant un point quelconque pris dans le plan d'un parallélogramme ABCD, démontrer que le triangle PBD est équivalent à la somme des triangles PAB, PBC.

194. ABCD étant un quadrilatère inscrit, démontrer par les propriétés des aires la relation connue

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BA.AD + BC.CD}{AB.BC + AD.DC}.$$

195. Démontrer que l'aire d'un triangle en fonction de ses médianes α β, γ, est exprimée par la formule

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}.$$

196. L'aire d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit, multiplié par le demi-périmètre du triangle formé en joignant les pieds des hauteurs.

197. Deux triangles ont un sommet commun : quel est le lieu décrit par ce sommet lorsque, les deux bases restant fixes, la somme ou la différence des aires des deux triangles demeure constante? — Discussion. — Déduire du résultat obtenu que les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

198. Les côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque étant représentés par a, b, c, d, et ses diagonales par m et n, l'aire de ce quadrilatère est exprimée par la formule

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

Si le quadrilatère est inscriptible et si p désigne son demi-périmètre, cette formule devient

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Si le quadrilatère est un trapèze ayant a et c pour bases, on a

$$S = \frac{1}{4}\,\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(b+d+a-c)(b+d+c-a)(a-c+b-d)(a-c+d-b)}.$$

199. Trouver l'aire d'un quadrilatère quelconque en fonction des deux diagonales et des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

200. Démontrer que l'aire d'un quadrilatère, à la fois inscriptible et circonscriptible, est égale à la racine carrée du produit de ses quatre côtés.

201. On donne un triangle rectangle sur les côtés duquel on construit trois carrés; on joint les sommets consécutifs de ces carrés, et l'on demande l'expression de la figure totale ainsi formée.

202. Un triangle étant donné, partager sa surface en moyenne et extrême raison par une parallèle à sa base.

203. Sur les côtés AB, AC, d'un triangle ABC, on construit des parallélogrammes quelconques ABDE, ACFG, dont on prolonge les côtés DE et FG jusqu'à leur rencontre au point H; démontrer que la somme des aires de ces deux parallélogrammes équivaut à l'aire du parallélogramme qui a pour côtés adjacents BC et une droite égale et parallèle à AH. — Déduire de ce théorème celui du carré de l'hypoténuse.

204. On donne un quadrant AOB et un point P quelconque sur l'arc AB; par ce point P, on mène à cet arc la tangente STP : S est son point d'intersection avec le rayon OA, T avec le rayon OB. On mène PM perpen-

diculaire sur OA, et l'on demande de prouver que le triangle AOB est la moyenne proportionnelle des triangles SOT et OMP.

205. Par le milieu de chacune des deux diagonales d'un quadrilatère, on mène une parallèle à l'autre, et l'on joint le point d'intersection de ces deux parallèles aux milieux des quatre côtés; démontrer que le quadrilatère est ainsi partagé en quatre parties équivalentes.

206. Démontrer que l'aire du triangle formé avec les médianes d'un triangle donné est les trois quarts de l'aire de ce triangle. — En déduire : 1° qu'entre tous les triangles qui ont la somme de leurs médianes constante, le triangle équilatéral est maximum; 2° que de tous les triangles équivalents, le triangle équilatéral est celui dans lequel la somme des médianes est minimum.

207. L'aire de l'octogone régulier inscrit dans un cercle équivaut à celle du rectangle qui a pour côtés adjacents les côtés des carrés inscrit et circonscrit.

208. L'aire de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est les trois quarts de celle de l'hexagone régulier circonscrit.

209. L'aire de l'hexagone régulier inscrit est la moyenne proportionnelle de celles des triangles équilatéraux inscrit et circonscrit.

210. Étant donné un polygone régulier, on mène les diagonales qui sous-tendent successivement deux côtés; ces diagonales déterminent par leurs intersections un autre polygone dont on demande la nature, et l'aire en fonction de celle du premier polygone.

211. Si l'on prend un point C sur le diamètre AB d'un cercle, l'aire comprise entre ce cercle et les cercles décrits sur les segments AC et CB comme diamètres équivaut au cercle qui a pour diamètre la moyenne proportionnelle des segments AC et CB.

212. Dans des cercles différents, les secteurs dont les angles sont en raison inverse des carrés des rayons sont équivalents.

213. La différence de deux secteurs semblables a pour mesure de son aire le produit de la différence des rayons par l'arc concentrique mené à égale distance des arcs considérés.

214. On donne deux droites qui se coupent en A, et l'on décrit une série de cercles tous tangents à ces deux droites et successivement tangents entre eux; OA étant la distance du centre du cercle le plus éloigné au point A, et OB son rayon, la somme des aires de tous les cercles est à l'aire du plus éloigné dans un rapport exprimé par $\frac{(OA+OB)^2}{4OA.OB}$.

215. Si le diamètre d'un cercle est divisé en n parties égales aux points P_1, P_2, ..., et si l'on décrit des demi-cercles au-dessus de AB sur les diamètres AP_1, AP_2, ..., et au-dessous de AB sur les diamètres BP_1,

BP_2, ..., le contour de chaque figure telle que $AP_{m-1}BP_m$ est égal à la circonférence du cercle donné, et l'aire de la même figure à la $n^{ième}$ partie de celle du cercle donné.

216. A étant l'aire d'un polygone régulier inscrit et B l'aire du polygone circonscrit semblable, démontrer que la différence B — A équivaut à l'aire du polygone régulier semblable inscrit dans la circonférence qui a pour diamètre le côté du polygone B, ou encore à l'aire du polygone régulier semblable circonscrit à la circonférence qui a pour diamètre le côté du polygone A.

217. A et B désignant les surfaces de deux polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit à un cercle, et A′ et B′ celles des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double. démontrer les formules

$$\frac{1}{A'} = \sqrt{\frac{1}{A}\frac{1}{B}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A'}\right);$$

prouver en outre que $B' - A'$ est $< \frac{B-A}{4}$. — Déduire des formules obtenues une nouvelle démonstration du théorème de Schwab (234).

218. r et a désignant le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, r' et a' le rayon et l'apothème du polygone régulier de même aire et d'un nombre de côtés double, démontrer les formules

$$r' = \sqrt{r.a}, \quad a' = \sqrt{a\frac{r+a}{2}}.$$

— Déduire de ces formules, en partant du carré dont l'aire est égale à 2, un théorème analogue à celui de Schwab, c'est-à-dire le moyen d'obtenir une série de nombres tendant vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

219. Partager un triangle en trois triangles équivalents par trois droites menées d'un même point intérieur à ses trois sommets.

220. Partager un quadrilatère quelconque en deux parties qui soient dans le rapport de deux droites données, par une parallèle *ou* une perpendiculaire à l'un de ses côtés.

221. Inscrire dans un triangle donné un parallélogramme ayant une aire donnée. — Discussion.

222. Inscrire dans un cercle donné un rectangle d'aire donnée.

223. Après avoir inscrit un carré dans un carré donné, on en inscrit un troisième dans le second obtenu, et ainsi de suite indéfiniment, en adoptant toujours la même loi d'inscription.

On demande : 1° la limite vers laquelle tend la somme des carrés in-

scrits; 2° combien il faut construire de carrés inscrits pour que leur somme soit équivalente à une surface donnée.

224. Étant donné un triangle, on en forme un second en joignant les milieux de ses trois côtés, un troisième en joignant les milieux des trois côtés du second, et ainsi de suite indéfiniment. On demande la limite de la somme de tous les triangles inscrits de cette manière.

225. Partager un cercle en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des rayons.

226. Partager un cercle en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des circonférences concentriques.

227. Partager un triangle quelconque en quatre parties équivalentes, par deux droites perpendiculaires entre elles.

228. Construire un triangle isocèle équivalent à un triangle donné.

229. Diviser un cercle en moyenne et extrême raison par une circonférence concentrique.

230. Partager une longueur donnée en trois parties telles, que l'aire du triangle correspondant soit un maximum.

LIVRE TROISIÈME.

LE PLAN.

231. Mener par un point donné une droite qui rencontre deux droites données non situées dans un même plan.

232. Mener à une droite donnée une parallèle qui s'appuie sur deux droites données non situées dans un même plan.

233. Mener par un point donné une droite qui rencontre une droite et un cercle non situés dans un même plan.

234. Dans tout quadrilatère gauche, c'est-à-dire dont les côtés ne sont pas situés dans un plan unique, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

235. Plusieurs droites étant données en grandeur, direction et sens, si on les transporte parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte que l'extrémité de chacune d'elles se confonde avec l'origine de la suivante, la droite qui part de l'origine de la première et aboutit à l'extrémité de la dernière prend le nom de *résultante* des droites proposées; celles-ci sont dites à leur tour les *composantes* de la résultante. *Composer* des droites, c'est trouver leur résultante; *décomposer* une droite, c'est trouver des droites qui aient pour résultante la droite donnée. Ces définitions posées, démontrer les propositions suivantes :

1° La résultante de plusieurs droites reste la même, quel que soit l'ordre dans lequel on compose ces droites.

2° La résultante de plusieurs droites n'est pas changée quand on remplace un certain nombre d'entre elles par leur résultante.

3° Si, sans changer la direction ni le sens des composantes, on altère leur grandeur dans un certain rapport, la résultante conserve sa direction et son sens, mais sa grandeur est altérée dans le même rapport.

4° Si, sans altérer la grandeur ni la direction des composantes, on change leur sens, la résultante conserve sa grandeur et sa direction, et change de sens.

5° Pour décomposer une droite D en deux autres dont l'une soit une droite donnée d, il suffit de composer D avec d prise en sens contraire.

236. Une droite se déplace en restant parallèle à un plan donné et en

s'appuyant sur deux droites non situées dans un même plan : quel est le lieu des points qui divisent la droite mobile dans un rapport donné?

237. Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit également inclinée sur trois droites passant par son pied dans ce plan.

238. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés d'un même côté de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la somme de ses distances aux points A et B soit minimum.

239. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés de part et d'autre de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la différence de ses distances aux points A et B soit maximum.

240. Trouver le lieu des points d'un plan dont la différence des carrés des distances à deux points donnés hors de ce plan est constante.

241. Si par l'une des diagonales d'un parallélogramme on mène un plan quelconque, les perpendiculaires abaissées sur ce plan des extrémités de l'autre diagonale sont égales.

242. Le plan mené parallèlement à deux droites non situées dans un même plan, par le milieu de leur plus courte distance, passe par les milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première droite à un point de la seconde.

243. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, la plus courte distance de cette droite à toutes les droites du plan qui ne lui sont pas parallèles est constante.

244. Trouver le lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires et non situées dans un même plan.

245. Si la somme des perpendiculaires abaissées d'un point A sur deux plans donnés est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un autre point B sur les mêmes plans, cette somme reste la même pour tout autre point C de la droite AB. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

246. Soient trois points A, B, C, et deux plans P et Q. Si la somme des deux perpendiculaires abaissées de chacun de ces points sur les deux plans est la même pour les trois points, cette somme restera encore la même pour tout autre point du plan ABC. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

247. Si l'on projette un même point de l'espace sur deux plans qui se coupent, les perpendiculaires abaissées des deux projections sur l'intersection des deux plans la rencontrent au même point. — Réciproquement, si cette condition est remplie pour deux points des deux plans, ces points sont les projections d'un même point de l'espace.

248. Deux droites égales, parallèles et de même sens, ont leurs projections sur un même plan égales, parallèles et de même sens. — Réciproque de cette proposition.

249. Toute ligne qui se projette, sur deux plans qui se coupent, suivant une ligne droite, est elle-même une ligne droite.

250. La projection, sur un plan ou sur un axe, de la résultante de plusieurs droites, est la résultante des projections de ces droites. (*Voir* la Question 235.)

251. Si une droite est également inclinée sur les deux faces d'un angle dièdre, ses traces sur les deux faces sont également distantes de l'arête de l'angle dièdre. — Réciproque.

252. Deux angles dièdres qui ont leurs arêtes parallèles et leurs faces perpendiculaires chacune à chacune sont égaux ou supplémentaires.

253. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux plans donnés soit égale à une droite donnée?

254. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à trois plans donnés soit égale à une droite donnée? — Étendre ce problème au cas d'un nombre quelconque de plans.

255. Montrer que, si par un même point de l'arête d'un angle dièdre on mène dans chaque face une droite faisant un angle donné α avec cette arête, l'angle rectiligne ainsi obtenu ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

256. Couper un angle polyèdre à quatre faces, de manière que la section soit un parallélogramme.

257. Si, dans le plan de chaque face d'un angle trièdre et par son sommet, on mène une perpendiculaire à l'arête opposée, les trois perpendiculaires obtenues sont dans un même plan.

258. Tout plan perpendiculaire à l'une des arêtes d'un angle trièdre rectangle coupe cet angle trièdre suivant un triangle rectangle.

259. La somme des angles formés par les arêtes d'un angle trièdre avec les faces opposées est comprise entre la somme des faces et la moitié de cette somme.

260. Si, par un point pris dans l'intérieur d'un angle polyèdre, on abaisse des perpendiculaires sur toutes ses faces, le nouvel angle polyèdre ainsi formé est *supplémentaire* du premier. (*Voir* les nos 376, 377.)

261. Dans tout angle polyèdre convexe de n faces, la somme des angles dièdres est comprise entre $2n$ et $2n - 4$ angles droits.

262. A, B, C, étant trois points pris à volonté sur les arêtes d'un angle trièdre trirectangle et O la projection du sommet S de cet angle trièdre

sur le plan ABC, démontrer que le triangle ASB est moyen proportionnel entre les triangles ABC et OAB.

263. Étant donné le triangle suivant lequel la feuille de dessin est rencontrée par un angle trièdre trirectangle, trouver, par des constructions graphiques exécutées sur le plan de cette feuille, les inclinaisons des trois arêtes de l'angle trièdre sur ce plan.

264. Couper un angle trièdre trirectangle par un plan tel, que la section soit un triangle égal à un triangle donné.

LIVRE QUATRIÈME.

LES AIRES ET LES VOLUMES DES CORPS.

265. 1° Le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure la moitié du produit de l'aire d'une face latérale par la distance de cette face à l'arête opposée.

2° Si, sur trois droites parallèles et non situées dans un même plan, on prend d'une manière quelconque des longueurs égales à une droite donnée, le volume du prisme triangulaire ainsi formé est constant.

266. Couper un cube par un plan de manière que la section soit un hexagone régulier.

267. Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont une base et deux faces adjacentes égales chacune à chacune et semblablement disposées.

268. Deux prismes triangulaires sont égaux lorsqu'ils ont leurs faces latérales égales chacune à chacune et semblablement disposées.

269. Vérifier par la Géométrie la formule qui donne le cube d'une somme ou d'une différence de deux parties.

270. On donne trois droites deux à deux non situées dans un même plan, et l'on demande de construire un parallélipipède dont trois arêtes soient sur ces trois droites.

271. Mener par une droite donnée un plan qui partage un parallélipipède en deux parties équivalentes.

272. Démontrer que deux tétraèdres sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 3° lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; 4° lorsqu'ils ont une arête égale et cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

273. Les plans menés perpendiculairement sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

274. Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

275. Les perpendiculaires élevées sur chaque face d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à la face considérée se rencontrent en un même point.

276. Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points d'intersection des médianes des faces opposées se rencontrent en un même point, situé au quart de chacune de ces droites à partir de la face correspondante.

277. Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent mutuellement en parties égales.

278. Trouver dans l'intérieur d'un tétraèdre un point tel, qu'en le joignant aux quatre sommets on décompose ce tétraèdre en quatre tétraèdres équivalents.

279. Si l'on coupe un prisme ou une pyramide par un plan non parallèle à la base, et si l'on prolonge les côtés de la section jusqu'à la rencontre des côtés correspondants de la base, les points d'intersection obtenus sont en ligne droite.

280. Le plan bissecteur de l'angle dièdre d'un tétraèdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces qui comprennent l'angle dièdre. — Considérer le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur.

281. Le plan déterminé par une arête d'un tétraèdre et le milieu de l'arête opposée partage ce tétraèdre en deux tétraèdres équivalents.

282. Tout plan conduit par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le partage en deux volumes équivalents.

283. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide à bases parallèles et d'un prisme de même hauteur ayant pour base la demi-somme des bases du tronc de pyramide?

284. Trouver l'expression du volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, en le décomposant en troncs de pyramide triangulaires.

285. Les arêtes latérales d'une pyramide triangulaire SABC ont pour longueurs L, M, N; on coupe cette pyramide par un plan abc non parallèle à la base, qui rencontre les arêtes latérales à des distances du sommet égales à l, m, n : trouver le volume du tronc de pyramide ainsi déterminé.

286. La hauteur d'un tétraèdre régulier est égale à la somme des per-

pendiculaires abaissées d'un point pris dans l'intérieur du polyèdre sur ses quatre faces. — Examiner le cas où le point est choisi extérieurement.

287. Si, par un point quelconque pris dans l'espace, on fait passer plusieurs droites parallèles et égales aux différents côtés d'un polygone ou plusieurs polygones parallèles et égaux aux différentes faces d'un polyèdre quelconque, la somme *algébrique* des produits obtenus en multipliant la longueur ou l'aire de chacun des éléments ainsi transportés par la perpendiculaire abaissée sur lui d'un autre point constant de l'espace est égale à zéro. — Les produits considérés sont *positifs* ou *négatifs*, suivant que les faces transportées laissent ou non d'un même côté le centre commun des perpendiculaires.

288. Soit le tétraèdre SABC; menons une section quelconque DEF parallèle à la base ABC, et joignons les milieux des côtés de cette section aux sommets opposés de la base : les trois droites obtenues se croisent en un même point dont on demande le lieu.

289. Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces SAB, SBC, SAC, trois prismes triangulaires quelconques dont les bases supérieures se rencontrent en O; sur la base ABC du tétraèdre, on construit alors un quatrième prisme triangulaire en prenant ses arêtes latérales égales et parallèles à la droite SO : démontrer que le volume de ce dernier prisme est équivalent à la somme des volumes des trois premiers prismes.

290. Mener un plan parallèle à la base d'un tétraèdre donné, de manière que ce plan détermine un autre tétraèdre dont l'aire totale soit la moitié de celle du tétraèdre donné.

291. Soit une pyramide triangulaire SABC. Par le milieu E de l'arête SB, on mène le plan DEF parallèle à la base ABC, le plan EGH parallèle à la face ASC, et le plan EDH; la pyramide SABC se trouve ainsi décomposée en deux prismes triangulaires équivalents et en deux pyramides triangulaires équivalentes. On peut faire subir la même décomposition à la pyramide SDEF, et continuer ainsi indéfiniment : en déduire le volume de la pyramide SABC.

292. Étant donnée une pyramide triangulaire SABC, à quelle distance de la base ABC doit-on mener un plan parallèle abc, pour que le rapport des volumes de la pyramide Sabc et du tronc de pyramide ABCabc soit égal à m?

293. Étant données trois droites parallèles non situées dans un même plan, on porte sur l'une d'elles une longueur AB donnée, et l'on prend arbitrairement un point C sur la seconde droite, un point D sur la troisième; démontrer :

1° Que le volume de la pyramide triangulaire ABCD est constant, quelles que soient les positions des points C et D et la parallèle sur

laquelle on porte la longueur AB; 2° que ce volume est proportionnel à AB.

294. On donne l'arête A d'un prisme triangulaire quelconque; sur l'une des arêtes, on prend à partir de la base une longueur x; sur la seconde arête, on prend de même une longueur a, et sur la troisième une longueur b. Par les trois points ainsi déterminés, on fait passer un plan qui divise le prisme en deux parties. Pour quelle valeur de x ces parties sont-elles équivalentes?

295. Couper un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées, de manière que la section soit maximum.

296. Par la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, on peut faire passer une infinité de plans : quel est celui qui détermine la section minimum?

297. Étant donné un prisme triangulaire, le couper par un plan tel, que la section soit semblable à un triangle donné.

298. Sur une première droite AA′, on donne deux points fixes a et b; sur une seconde droite quelconque BB′, deux points mobiles c et d restent à une distance constante : chercher pour quelle position du segment cd l'aire de la pyramide $abcd$ est minimum.

299. Les volumes engendrés par un rectangle tournant successivement autour de ses côtés adjacents sont de a mètres cubes et de b mètres cubes : trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

300. Calculer l'aire convexe, l'aire totale et le volume d'un cône équilatéral en fonction de son côté. — Pour quelle valeur de ce côté l'aire totale du cône est-elle 1 mètre carré ou son volume 1 mètre cube?

301. Partager l'aire latérale d'un cône de révolution en n parties équivalentes par des plans parallèles à sa base.

302. Quel est le rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de ses deux côtés adjacents?

303. Soit ABCDEF un hexagone régulier circonscrit à un cercle de centre O et de rayon R. On mène la diagonale FC et les droites AC et BF qui se coupent en I sur le rayon OH perpendiculaire à FC, et l'on demande de calculer, en fonction de R, les volumes et les aires des cônes engendrés par les triangles IHA, IOF, en tournant autour de OH pris pour axe.

304. Trouver le lieu des points qui sont à la distance a d'un point A et à la distance b d'un point B.

305. Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère donnée.

306. Par une droite donnée, mener à une sphère donnée un plan sécant qui détermine une section de rayon donné.

307. Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan déterminé par les centres des trois sphères.

308. Trouver le lieu des centres des sections faites dans une sphère donnée par tous les plans sécants qui passent par une droite donnée ou par un point donné.

309. Connaissant les rayons de deux sections parallèles faites dans une sphère et la distance de ces sections, trouver le rayon de la sphère.

310. Trouver la plus courte et la plus grande distance d'un point donné à une surface sphérique. — Trouver le lieu des points qui sont à une distance donnée d'une sphère donnée.

311. Trouver la plus courte distance d'une droite donnée ou d'un plan donné à une surface sphérique.

312. Si d'un point de la surface sphérique comme pôle on trace un cercle avec un rayon sphérique égal au cinquième ou au tiers d'un quadrant, le rayon du cercle obtenu est la moitié du rayon de la sphère ou le plus grand segment de ce rayon divisé en moyenne et extrême raison.

313. La somme des carrés des cordes interceptées par une sphère donnée sur trois droites rectangulaires partant d'un point donné est constante, ainsi que la somme des carrés des six segments déterminés sur ces trois cordes par le point donné.

314. Si, d'un point de l'espace, on mène des sécantes à une sphère donnée, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la sphère est constant.

315. Étant données deux sphères solides, trouver la distance de leurs centres par une construction plane.

316. Trouver le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. — Trouver le lieu des points de l'espace également éclairés par deux lumières données.

317. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points donnés est constante. — Trois points étant donnés, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances est à la fois constante par rapport au premier et au deuxième point, par rapport au premier et au troisième.

318. Trouver le lieu des points d'où l'on voit une sphère donnée, deux sphères données ou trois sphères données, sous un angle donné.

319. Indiquer le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle donné, ou deux droites données issues d'un même point, sous des angles respectivement donnés.

320. Trouver le lieu des centres des sphères qui coupent deux sphères données ou trois sphères données suivant des grands cercles.

321. Construire une sphère :

1° De rayon donné, qui passe par trois points donnés;

2° De rayon donné, passant par deux points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à deux plans ou à deux sphères données;

4° De rayon donné, tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à un plan et à une sphère donnés.

322. Connaissant les latitudes et les longitudes de deux lieux de la surface terrestre supposée parfaitement sphérique, trouver, à l'aide d'opérations exécutées sur un globe, la distance de ces deux lieux en degrés.

323. Inscrire un cercle dans un triangle sphérique.

324. Transformer un polygone sphérique en un triangle sphérique équivalent.

325. Dans un losange sphérique, les diagonales se coupent à angle droit.

326. Deux triangles sphériques sont équivalents lorsque leurs triangles polaires ont même périmètre, et réciproquement.

327. Si, de chaque sommet d'un parallélipipède comme centre, on décrit des sphères égales, toutes ces sphères réunies interceptent une portion du volume du parallélipipède égale à l'une d'elles.

328. Calculer en myriamètres carrés l'aire de l'une des deux zones glaciales, sachant que le petit cercle qui lui sert de base est à 23°30′ du pôle.

329. La calotte interceptée par une sphère fixe sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par son centre, a une aire constante. — La zone interceptée par deux sphères fixes concentriques sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par leur centre commun, a une aire constante.

330. Ayant mené la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on le fait tourner autour de son troisième côté pris pour axe : quel est le rapport des volumes engendrés par les deux parties du triangle?

331. On prolonge un des côtés a d'un triangle équilatéral d'une longueur égale à a et, par l'extrémité obtenue, on élève une perpendiculaire à ce côté : calculer le volume engendré par le triangle équilatéral en tournant autour de cette perpendiculaire.

332. Étant donnée une série de cercles concentriques, on mène dans ces cercles des cordes toutes égales entre elles et parallèles à un diamètre

commun : les volumes engendrés par les segments correspondants en tournant autour de ce diamètre, sont équivalents.

333. Étant donné un triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, trouver le rapport du volume ou de l'aire qu'il engendre, lorsque la figure tourne autour du diamètre du demi-cercle, au volume ou à l'aire de la sphère engendrée par ce demi-cercle. — Cas où le triangle rectangle donné est isocèle.

334. Construire un triangle, connaissant deux côtés et sachant que le volume engendré par ce triangle en tournant autour du troisième côté est égal à la somme des volumes qu'il engendre en tournant successivement autour des deux côtés donnés.

335. D'un point B extérieur à une circonférence O, on lui mène deux tangentes BA, BC, et l'on projette le point de contact C sur le rayon OA en D : démontrer que, si l'on fait tourner la figure autour de l'axe AOD, le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est équivalent au cône engendré par le triangle rectangle BAD, et le segment sphérique engendré par le triangle mixtiligne DAC équivalent au volume engendré par le triangle BCD.

336. On donne un cône de révolution et deux sphères inscrites dans ce cône et tangentes extérieurement l'une à l'autre ; le volume compris entre le cône et les deux sphères proposées est la moitié du volume compris entre ce même cône et la sphère qui passe par ses deux cercles de contact avec les sphères données.

337. Indiquer le lieu des points qui sont : 1° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'une droite B ; 2° à la distance a d'une droite A et à la distance p d'un plan P ; 3° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'un point B.

338. Étant donnés dans l'espace un point et une surface conique ou cylindrique de révolution, trouver la plus courte distance du point à la surface.

339. Chercher le rapport des volumes de deux tétraèdres, dont l'un a été formé en menant par les sommets de l'autre des plans parallèles aux faces opposées.

340. Deux tétraèdres sont semblables : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées ; 2° lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés ; 3° lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées ; 4° lorsqu'ils ont cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

341. Les carrés des volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de deux faces homologues.

342. Une droite comprise entre deux faces d'un polyèdre donné est divisée en plusieurs segments; sur chaque segment, considéré comme l'homologue de la droite donnée, on construit un polyèdre semblable au polyèdre donné : démontrer que l'aire de ce polyèdre est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des polyèdres segmentaires, et que son volume est égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ces mêmes polyèdres.

343. Construire deux droites qui soient dans le même rapport que deux cubes donnés.

344. Démontrer que le tétraèdre formé en joignant les points de rencontre des médianes des faces d'un tétraèdre donné est semblable au symétrique de ce tétraèdre; chercher le rapport des volumes de ces deux tétraèdres.

345. Le volume d'un cube est égal à six fois le volume de l'octaèdre régulier qui a ses sommets aux centres des faces du cube.

346. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier.

347. Trouver l'aire et le volume d'un polyèdre régulier.

348. Connaissant le rayon d'une sphère, trouver l'aire et le volume des polyèdres réguliers inscrits.

349. Mener par un point donné un plan tangent à deux sphères données.

350. Mener un plan tangent à trois sphères données.

LIVRE CINQUIÈME.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE QUELQUES COURBES USUELLES.

351. Quelles sont la plus courte et la plus grande distance du centre de l'ellipse à un point de la courbe?

352. Quel est le lieu du centre d'une ellipse qui glisse entre deux axes rectangulaires?

353. Deux ellipses dont les grands axes sont égaux et qui ont un foyer commun ne peuvent se couper qu'en deux points.

354. Quel est le lieu des points également distants de deux circonférences intérieures ou extérieures l'une à l'autre?

355. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés? — On examinera les différents cas possibles.

356. Sur les deux tangentes PM, PM', à une ellipse ou à une hyperbole dont les foyers sont F et F', on prend des longueurs PQ, PQ', respectivement égales à PF et à PF' : démontrer que la droite QQ' est égale au grand axe de l'ellipse ou à l'axe transverse de l'hyperbole.

357. Le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole et une tangente quelconque interceptent, sur les deux tangentes menées aux extrémités de l'axe de la courbe, des longueurs dont le produit est constant.

358. Des cercles touchent une droite AB en un point fixe C, et des points fixes A et B on mène des tangentes à ces cercles : trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes. — Le point C peut être entre A et B ou sur AB prolongée.

359. Soient les deux tangentes menées à l'ellipse ou à l'hyperbole par un point extérieur et une troisième tangente quelconque : démontrer que la longueur interceptée sur cette troisième tangente par les deux premières est vue de chaque foyer sous un angle constant.

360. Démontrer directement que, si l'on mène à une hyperbole deux tangentes PM, PM', par un même point extérieur P, les angles PFM, PFM',

sont égaux aux supplémentaires, suivant que les points de contact M et M′ appartiennent ou non à la même moitié de la courbe.

361. Trouver le lieu des centres des ellipses dont le grand axe a la même longueur, qui ont un foyer commun et qui touchent une droite donnée.

362. Quels sont les lieux géométriques : 1° des sommets ; 2° des points de rencontre des côtés non parallèles ; 3° des points d'intersection des diagonales, des trapèzes construits sur une base fixe, et dans lesquels la longueur de l'autre base est donnée, ainsi que la somme ou la différence des côtés non parallèles ?

363. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses foyers et un point ; 2° ses foyers et une tangente ; 3° un foyer, deux points et une tangente ; 4° un foyer, un sommet et une tangente ; 5° un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles ; 6° un foyer et trois tangentes ; 7° le centre, deux tangentes et la longueur du grand axe ou de l'axe transverse.

364. La perpendiculaire abaissée du foyer de la parabole sur une tangente à la courbe, est moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur du point de contact et la moitié du paramètre $2p$.

365. Si PM et PM′ sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, les triangles FPM, FPM′, sont semblables, et FP est la moyenne proportionnelle des rayons vecteurs FM, FM′, des deux points de contact.

366. MN étant une tangente commune à la parabole et au cercle décrit sur la corde menée perpendiculairement à l'axe par le foyer comme diamètre, démontrer que les droites FM et FN sont également inclinées sur cette corde.

367. La tangente en un point de la parabole rencontre la directrice et la corde menée par le foyer, perpendiculairement à l'axe, en des points équidistants du foyer.

368. Si le diamètre de la parabole menée par le point M rencontre la directrice en K et la corde menée par le foyer parallèlement à la tangente MT en H, on a

$$MK = MH.$$

369. Quel est le lieu du point d'intersection du diamètre mené en un point de la parabole avec la corde tracée par le foyer parallèlement à la tangente au même point ?

370. AB et AC étant deux droites rectangulaires, on mène la droite quelconque AR et la parallèle fixe CR à AB ; puis, on prend sur AR un point M tel que son ordonnée MQ par rapport à AB soit égale à CR : quel est le lieu du point M ?

371. On considère dans un cercle un diamètre fixe AOB et un rayon quelconque OC; D étant le milieu de la corde CE menée parallèlement au diamètre fixe, on demande le lieu du point d'intersection des droites OC et AD.

372. Si deux tangentes égales à la parabole sont coupées par une troisième, les segments déterminés sur ces tangentes sont égaux, mais les segments égaux ne sont pas placés de même sur les deux tangentes.

373. Le cercle déterminé par les points d'intersection de trois tangentes à la parabole passe par le foyer.

374. Du sommet S, on mène deux droites rectangulaires qui viennent rencontrer la parabole aux points M et M'; le paramètre $2p$ est la moyenne proportionnelle des abscisses des points M et M'.

375. Quel est le lieu du centre du cercle inscrit dans le secteur circulaire AOB, dont l'un des rayons OA est fixe et dont l'autre OB est mobile?

376. Si l'on tire par le sommet de la parabole des cordes à angle droit l'une sur l'autre, et qu'on construise sur ces cordes un rectangle, quel est le lieu de son quatrième sommet?

377. Si une parabole roule sur une autre parabole égale, les sommets étant d'abord confondus, le foyer de chaque courbe trace la directrice de l'autre.

378. Quel est le lieu des points également distants d'une droite et d'une circonférence données?

379. Quel est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante?

380. Construire une parabole connaissant : 1° le foyer ou la directrice et deux points; 2° le foyer ou la directrice, un point et une tangente; 3° le foyer ou la directrice, une tangente et son point de contact; 4° le foyer ou la directrice et deux tangentes; 5° trois tangentes, parmi lesquelles la tangente au sommet; 6° quatre tangentes.

381. Étant donnée une tangente à l'ellipse ou l'hyperbole, la droite qui joint au foyer correspondant son point de rencontre avec une directrice est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact. — Les tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupent sur la directrice correspondante.

382. Quel est le lieu des milieux des cordes focales d'une ellipse?

383. M étant un point quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole, quels sont les lieux décrits par les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle FMF'?

384. M étant un point de l'ellipse de grand axe AA', quel est le lieu

des points d'intersection des perpendiculaires élevées en A et en A' aux droites AM et A'M ?

385. Si deux cordes menées par les extrémités d'un diamètre de l'ellipse aboutissent à un même point de la courbe, les diamètres parallèles à ces cordes sont conjugués.

386. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses directrices et un point ; 2° ses directrices et une tangente ; 3° une directrice, deux points et une tangente ; 4° une directrice, un sommet et une tangente ; 5° une directrice, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles ; 6° une directrice et trois tangentes ; 7° un foyer, la directrice correspondante et une tangente ; 8° un foyer ou une directrice et trois points.

387. Soient MP l'ordonnée d'un point de l'hyperbole dont le centre est C et PQ une tangente au cercle principal ; si l'on trace jusqu'à l'axe transverse MN parallèle à CQ, on a

$$PN = b.$$

388. Si l'on mène deux tangentes quelconques à l'hyperbole, les droites déterminées par leurs points d'intersection avec les asymptotes sont parallèles.

389. Le rayon du cercle qui touche une hyperbole et ses asymptotes est égal à la portion de la corde focale principale prolongée comprise entre la courbe et l'une de ses asymptotes.

390. Soient un cercle de diamètre AA' et une corde PQ perpendiculaire à AA' : trouver le lieu des points d'intersection des droites AP et A'Q.

391. Si deux tangentes partant d'un même point P coupent l'une des asymptotes de l'hyperbole en R et en S, l'autre asymptote en r et en s, on a

$$PR.PS = Pr.Ps.$$

392. MM' étant la double ordonnée d'une ellipse de grand axe AA', quel est le lieu des points de rencontre des droites AM et A'M' ?

393. Quel est le lieu décrit par le milieu d'une droite qui se meut en formant avec deux axes rectangulaires un triangle d'aire constante ?

394. On fait passer un cercle par un point quelconque M d'une hyperbole et les extrémités A et A' de son axe transverse : trouver le lieu du point Q où l'ordonnée MP prolongée rencontre ce cercle.

395. Trouver l'angle des asymptotes de l'hyperbole obtenue en coupant un cône de révolution par un plan. — Cas où le plan sécant est parallèle à l'axe du cône.

396. Deux cônes de révolution qui ont même sommet, même généra-

trice et leurs axes rectangulaires, sont coupés par deux plans menés parallèlement à leurs axes d'un même point de la génératrice commune, suivant des hyperboles conjuguées.

397. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections paraboliques d'un cône de révolution donné?

398. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections elliptiques de même excentricité dans un cône de révolution donné?

399. Quel est le lieu des extrémités des petits axes de toutes les sections elliptiques parallèles d'un cône de révolution donné?

400. Dans quel cas un plan peut-il couper un cône de révolution donné suivant une hyperbole équilatère?

401. Construire une hyperbole, connaissant : 1° un foyer ou une directrice, la longueur de l'axe transverse et une asymptote; 2° un foyer ou une directrice, une tangente et une asymptote; 3° deux asymptotes et un point; 4° trois points et une asymptote.

402. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par une ellipse ou une hyperbole donnée de position et de grandeur.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR

LA TRIGONOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

INTRODUCTION DES ANGLES DANS LE CALCUL.

1. Le sinus d'un certain angle étant $\frac{3}{5}$, trouver ses autres rapports trigonométriques.

2. Le cosinus d'un certain angle étant $\sqrt{\frac{2}{3}}$, trouver ses autres rapports trigonométriques.

3. La tangente d'un certain angle étant $\frac{4}{3}$, trouver ses autres rapports trigonométriques.

4. Démontrer la formule

$$(\sin^2 x - \sin^2\alpha \sin^2\beta)(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha \cos^2\beta)$$
$$= (\sin^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta)(\cos^2\beta - \cos^2\alpha \cos^2\beta).$$

5. Démontrer la formule

$$\sin^2 x \operatorname{tang}\alpha + \cos^2 x \cot\alpha + 2 \sin\alpha \cos x = \operatorname{tang}\alpha + \cot\alpha.$$

6. Existe-t-il un angle x satisfaisant à la relation

$$\text{séc}^2 x = \frac{4ab}{(a+b)^2}\ ?$$

7. Si l'on représente par S_1, S_2, S_3, ..., S_m, les sommes des pro-

duits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., m à m, des tangentes de m arcs a, b, c, d, ..., l, on a

$$\operatorname{tang}(a+b+c+d+\ldots+l)=\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots}{1-S_2+S_4-S_6+\ldots}.$$

[On vérifiera d'abord cette formule dans le cas de deux et de trois arcs; puis, suivant un mode de raisonnement connu, on prouvera que, si elle est vraie pour $(m-1)$ arcs, elle subsiste pour m.]

Déduire de là $\operatorname{tang} ma$ en fonction de $\operatorname{tang} a$.

8. Étudier les variations de la fonction

$$\cos x - \sin x,$$

lorsque x varie de 0° à 360°.

9. Étudier les variations de la fonction

$$\cot x - \operatorname{tang} x,$$

lorsque x varie de 0° à 180°.

10. Étudier les variations de la fonction

$$\operatorname{coséc} x - \operatorname{séc} x,$$

lorsque x varie de 0° à 360°.

11. En désignant par la notation $C.a$ la corde de l'arc a, démontrer la formule

$$C.a.C.(\pi-a)=\left[C\cdot\frac{\pi}{2}+C\cdot\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]\left[C\cdot\frac{\pi}{2}-C\cdot\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right].$$

12. Vérifier les égalités

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{3}{5}+\operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{7}+2\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arc\,cot}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,cot}\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

13. On donne les côtés d'un contour polygonal ABCDE, ainsi que les angles formés par le premier côté avec un axe Ox et par chacun des autres côtés avec le prolongement de celui qui le précède : trouver l'expression générale de la projection du contour sur l'axe Ox.

14. Vérifier les formules

$$\operatorname{tang}^2 a-\operatorname{tang}^2 b=\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b},$$

$$\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x}{x+a}}=\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x\cos a}{1-x\sin a}-\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\sin a}{\cos a}=a.$$

15. Démontrer la formule

$$\operatorname{tang} ma = \frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \ldots + \sin(2m-1)a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2m-1)a}.$$

(Suivre la marche indiquée pour l'exemple 7.)

16. Démontrer par la Géométrie la formule

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p-q}{2}}.$$

17. Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\frac{a \sin A}{1 + a \cos A}.$$

18. Rendre calculables par logarithmes les expressions

$$\operatorname{séc} a + \operatorname{séc} b \quad \text{et} \quad \operatorname{séc} a - \operatorname{séc} b.$$

19. Rendre calculables par logarithmes les expressions

$$1 + \sin a \quad \text{et} \quad 1 - \sin a.$$

20. Démontrer la formule

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}.$$

21. Démontrer la relation

$$1 \pm \operatorname{tang} a = \sqrt{2}\,\frac{\sin(45° \pm a)}{\cos a}.$$

22. Vérifier l'égalité

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

23. Étant donnée la relation

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta - e}{1 - e\cos\beta},$$

trouver $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$.

24. Démontrer la formule de vérification d'Euler (construction des Tables trigonométriques) :

$$\sin x = \sin(36° + x) - \sin(36° - x) + \sin(72° - x) - \sin(72° + x).$$

25. Démontrer la formule de vérification de Legendre :

$$\cos x = \sin(54° + x) + \sin(54° - x) - \sin(18° + x) - \sin(18° - x).$$

26. Trouver deux arcs, connaissant leur somme ou leur différence, ainsi que la somme ou la différence : 1° de leurs sinus ou de leurs cosinus ; 2° de leurs tangentes ou de leurs cotangentes ; 3° de leurs sécantes ou de leurs cosécantes.

27. Trouver deux arcs, connaissant leur somme ou leur différence, ainsi que le produit ou le rapport : 1° de leurs sinus ou de leurs cosinus ; 2° de leurs tangentes ou de leurs cotangentes ; 3° de leurs sécantes ou de leurs cosécantes.

28. Résoudre l'équation

$$a \operatorname{tang} x + b \cot x = c,$$

où a, b, c, sont des nombres donnés, positifs ou négatifs (*voir* le n° 137).

29. La somme des trois angles a, b, c, étant égale à 180°, démontrer les relations suivantes :

1° $\cos a + \cos b + \cos c = 4 \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} + 1,$

2° $\sin a + \sin b - \sin c = 4 \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$

3° $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2\cos a \cos b \cos c = 2,$

4° $\sin^2 2a + \sin^2 2b + \sin^2 2c + 2\cos 2a \cos 2b \cos 2c = 2,$

5° $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 4\cos a \cos b \cos c = -1,$

6° $\cos 4a + \cos 4b + \cos 4c - 4\cos 2a \cos 2b \cos 2c = -1,$

7° $\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cot b \cot c + \operatorname{cos\acute{e}c} a \operatorname{cos\acute{e}c} b \operatorname{cos\acute{e}c} c,$

8° $\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2} + \cos\frac{c}{2} = 4\cos\frac{\pi - a}{4}\cos\frac{\pi - b}{4}\cos\frac{\pi - c}{4},$

9° $\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2} - \cos\frac{c}{2} = 4\cos\frac{\pi + a}{4}\cos\frac{\pi + b}{4}\cos\frac{\pi - c}{4},$

10° $\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2} - 4\sin\frac{\pi - a}{4}\sin\frac{\pi - b}{4}\sin\frac{\pi - c}{4} = 1,$

11° $\operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2} + \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2} = 1,$

12° $\cot\frac{a}{2} + \cot\frac{b}{2} + \cot\frac{c}{2} = \cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2},$

13° $\dfrac{\sin a + \sin b - \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c} = \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2},$

14° $\sin^2\frac{c}{2} = \dfrac{(\sin b + \sin c - \sin a)(\sin a + \sin c - \sin b)}{4\sin a \sin b},$

15° $\dfrac{\tang a + \tang b + \tang c}{(\sin a + \sin b + \sin c)^2} = \dfrac{\tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2}\tang\frac{c}{2}}{2\cos a\cos b\cos c}$,

16° $\dfrac{\tang a}{\tang b} + \dfrac{\tang b}{\tang a} + \dfrac{\tang a}{\tang c} + \dfrac{\tang c}{\tang a} + \dfrac{\tang b}{\tang c} + \dfrac{\tang c}{\tang b}$
$= \text{séc}\, a\, \text{séc}\, b\, \text{séc}\, c - 2.$

30. A quelles conditions doivent satisfaire les trois angles a, b, c, pour que la relation

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c = 1$$

puisse exister?

31. Démontrer l'égalité

$$\sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) = 4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\sin\frac{b-c}{2}.$$

32. Démontrer l'égalité

$$\cos(a+b+c) + \cos(b+c-a) + \cos(a+c-b) + \cos(a+b-c)$$
$$= 4\cos a\cos b\cos c.$$

33. Lorsque la somme de quatre angles est égale à deux angles droits, la somme des tangentes de ces angles équivaut à la somme des produits 3 à 3 de ces mêmes tangentes.

34. Lorsque les sinus des angles d'un triangle forment une progression arithmétique, il en est de même des cotangentes des demi-angles.

35. Démontrer que, pour exprimer approximativement en parties du rayon un arc évalué en degrés, minutes et secondes, il faut diviser le nombre de secondes de cet arc par 206 265. — Réciproque.

36. Lorsqu'une longueur l est vue sous un angle de $1''$, quelle distance la sépare de l'observateur?

37. Quelle est la hauteur d'un objet qui, à la distance de 1^{km}, est vu sous un angle de $5°$?

38. Résoudre l'équation

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0.$$

39. Résoudre l'équation

$$2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0.$$

40. Résoudre l'équation

$$(\sin x - \cos x)\sin x = a.$$

41. Résoudre l'équation

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{\pi}.$$

42. Résoudre l'équation

$$\sin x + 0{,}438 \cos 2x - \frac{2}{\pi} = 0.$$

(Ces deux dernières équations se présentent en Mécanique.)

43. Résoudre l'équation

$$\sin^2 x - 2 \cos x + \frac{1}{4} = 0.$$

44. Résoudre l'équation

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 4 = 0.$$

45. Résoudre l'équation

$$\sin x + \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

46. Résoudre l'équation

$$3 \,\text{séc}^4 x - 10 \,\text{séc}^2 x + 8 = 0.$$

47. Résoudre l'équation

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0.$$

48. Résoudre l'équation

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0.$$

49. Calculer x et y d'après les deux équations

$$\sin(x - y) = \frac{1}{2}, \quad \cos(x + y) = \frac{1}{2}.$$

50. Étant donnée l'équation

$$\frac{\cos\beta(\cos x - \cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x - \cos\beta)} = \frac{\text{tang}^2 \alpha}{\text{tang}^2 \beta},$$

exprimer $\text{tang}\frac{x}{2}$ en fonction de $\text{tang}\frac{\alpha}{2}$ et de $\text{tang}\frac{\beta}{2}$.

51. Démontrer par la Géométrie la formule

$$\text{tang}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

52. Si l'on donne $\sin 3x$, quel est le nombre de valeurs de $\text{tang}\, x$?

53. Résoudre l'équation

$$\cos x - \operatorname{tang} x = 0.$$

54. Résoudre l'équation

$$p \sin(a - x) = q \sin(b - x).$$

55. Résoudre l'équation

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = \cos 2x + \cos x + 1.$$

56. Sachant que la somme des angles a, b, c, est égale à $180°$, résoudre l'équation

$$\sin^3 x - \sin(a - x)\sin(b - x)\sin(c - x) = 0.$$

57. Résoudre l'équation

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}(x + \alpha),$$

et chercher les conditions de réalité de $\operatorname{tang} x$.

58. Résoudre le système

$$\sin x \operatorname{tang} y = \operatorname{tang} a,$$
$$\cot x \cos y = \cot b.$$

59. La somme de deux angles étant donnée, dans quels cas la somme de leurs sinus est-elle maximum, et la somme de leurs tangentes minimum?

60. Prouver, par la Trigonométrie, que la relation

$$x + y + z = xyz$$

entraine la suivante :

$$\frac{2x}{1 - x^2} + \frac{2y}{1 - y^2} + \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{2x}{1 - x^2}\,\frac{2y}{1 - y^2}\,\frac{2z}{1 - z^2}.$$

61. Deux cercles, de rayons R et r, étant tangents extérieurement, déterminer le sinus de l'angle formé par leurs deux tangentes communes extérieures.

62. La corde AB d'un cercle O partage ce cercle en segments tels, que le plus grand est moyen proportionnel entre le plus petit et le cercle entier; en d'autres termes, la corde AB partage l'aire du cercle en moyenne et extrême raison.

On demande de calculer, à un dixième de seconde près, le plus petit des deux arcs sous-tendus alors par la corde AB.

LIVRE DEUXIÈME.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

63. On suppose un remblai de chemin de fer ayant une hauteur de h^m, une largeur de l^m au sommet, et des talus gazonnés dont l'angle avec le plan horizontal a p pour tangente. Ce remblai étant établi sur une longueur de d^{Km}, on demande combien il a exigé de mètres cubes de terre et de mètres carrés de gazon.

64. On donne les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC et la projection BP de l'hypoténuse sur un axe OX passant par le sommet B : on demande de calculer l'angle ABX $= x$.

Conclure de la marche suivie un moyen de résoudre l'équation

$$m\cos x + n\sin x = p,$$

où m, n, p, sont des nombres donnés (137).

65. Quelle est la hauteur d'une tour dont l'ombre a d^m, lorsque le Soleil est à $\alpha°$ au-dessus de l'horizon?

66. Calculer les tangentes des angles aigus d'un triangle rectangle, en fonction des médianes correspondantes aux côtés de l'angle droit.

67. On divise en trois parties égales l'hypoténuse d'un triangle rectangle, et l'on joint les points de division au sommet de l'angle droit : calculer la somme des carrés des côtés du triangle intermédiaire.

68. Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la somme ou la différence des côtés de l'angle droit.

69. Résoudre un triangle rectangle, connaissant un angle aigu et la somme ou la différence des côtés de l'angle droit.

70. Résoudre un triangle rectangle, connaissant son périmètre et la hauteur relative à l'hypoténuse.

71. Démontrer que toute transversale détermine sur les côtés d'un triangle six segments tels, que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres segments.

72. Démontrer que, lorsqu'un faisceau de quatre droites concourantes

OA, OB, OC, OD, est coupé par une sécante XY en quatre points a, b, c, d, le rapport $\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}$ est constant, c'est-à-dire indépendant de la direction de la sécante.

73. Démontrer que, lorsqu'un faisceau de quatre plans A, B, C, D, passant par une même droite PQ, est coupé par une transversale XY en quatre points a, b, c, d, le rapport $\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}$ est constant.

74. Lorsque trois longueurs a, b, c, et trois angles A, B, C, chacun moindre que 180°, satisfont aux relations qui forment le groupe (2) des formules fondamentales relatives à la résolution des triangles quelconques (151), ces quantités sont nécessairement les six éléments d'un triangle.

75. Résoudre un triangle quelconque, connaissant son périmètre et ses angles.

76. Résoudre un triangle quelconque, connaissant son aire et ses angles.

77. Résoudre un triangle quelconque, connaissant un côté, l'angle opposé, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

78. Résoudre un triangle quelconque, connaissant un côté, l'un des angles adjacents, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

79. Résoudre un triangle quelconque, connaissant ses trois hauteurs.

80. Résoudre un triangle quelconque, connaissant ses trois médianes.

81. Résoudre un triangle quelconque, connaissant ses angles et le rayon du cercle inscrit ou circonscrit.

82. Résoudre un triangle quelconque, connaissant les rayons des cercles ex-inscrits.

83. Démontrer que, si les bissectrices de deux angles d'un triangle sont égales, ces deux angles sont eux-mêmes égaux.

84. En employant les notations des nos 172 et 173, démontrer les relations suivantes entre les rayons des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits à un triangle :

$$R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{4}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

85. Calculer l'aire d'un trapèze, connaissant ses bases et ses diagonales.

86. Calculer l'aire d'un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

87. Étant donnés deux côtés adjacents d'un parallélogramme et l'angle

formé par l'un d'eux avec l'une des diagonales, calculer les angles et les diagonales de ce parallélogramme.

88. Calculer les trois bissectrices d'un triangle, dans lequel on connaît un côté et deux angles.

89. Résoudre un triangle, connaissant son aire et deux côtés.

90. Par un point A pris dans le plan d'un cercle O, on lui mène une sécante quelconque qui le rencontre aux points B et C : prouver que le produit $\text{tang}\,\frac{\text{AOB}}{2}\,\text{tang}\,\frac{\text{AOC}}{2}$ est constant.

91. Dans quel cas l'aire du triangle formé par deux rayons d'une circonférence et la corde de l'arc qu'ils interceptent, est-elle maximum?

92. On donne la distance des centres et les rayons de deux cercles qui se coupent : calculer l'aire de la partie commune à ces deux cercles.

93. Déterminer les éléments d'un triangle, sachant que ses côtés sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que son plus grand angle est double du plus petit.

94. Partager un arc en deux parties telles, que la somme ou le produit des cordes des deux arcs obtenus soit un maximum.

95. Connaissant la distance des centres et les rayons de deux circonférences, calculer les longueurs de leurs tangentes communes et les angles qu'elles forment avec la ligne des centres.

96. Trois points inaccessibles étant indiqués, reconnaître s'ils sont en ligne droite.

97. Quatre points inaccessibles étant indiqués, reconnaître s'ils sont dans un même plan; puis, si cette condition est remplie, reconnaître s'ils appartiennent à une même circonférence.

98. Vérifier, en considérant le groupe (3) des formules fondamentales relatives à la résolution d'un triangle quelconque (151), que la connaissance des angles d'un triangle est insuffisante pour déterminer ses côtés.

99. Démontrer que, dans tout triangle ABC, on a les relations

$$a \sin \text{A} - b \sin \text{B} = c \sin(\text{A} - \text{B}),$$

$$\frac{a}{2}(\cos \text{B} - \cos \text{C}) = (c - b)\cos^2 \frac{\text{A}}{2}.$$

100. Démontrer que l'aire de tout triangle ABC est égale à

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\,\text{tang}\,\frac{\text{A} + \text{B} - \text{C}}{2}}.$$

101. R et r étant les rayons des cercles circonscrit et inscrit à un triangle ABC, l'aire de ce triangle a pour expression

$$Rr(\sin A + \sin B + \sin C).$$

102. On donne un triangle quelconque ABC, et l'on forme un second triangle en joignant les pieds des hauteurs du premier : démontrer que le rapport de l'aire du second triangle à celle du premier est égal à $2\cos A\cos B\cos C$.

103. L'aire de tout quadrilatère ABCD circonscrit à une circonférence de rayon R a pour expression

$$R^2\left(\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C+D}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}\right).$$

104. Si l'on a $\cos B = \frac{\sin A}{2\sin C}$, le triangle ABC est isocèle.

105. Résoudre un triangle quelconque, connaissant un côté, la hauteur correspondante et la différence des angles adjacents à ce même côté.

106. Résoudre un triangle quelconque, connaissant un angle et les sommes respectives du côté opposé à cet angle avec chacun des deux autres côtés.

107. Si les angles d'un triangle sont en progression par quotient de raison $\frac{1}{2}$, le rapport du plus grand côté du triangle à son périmètre est exprimé par $2\sin\frac{\pi}{14}$.

108. Si la base d'un triangle est divisée en trois parties égales, et si θ_1, θ_2, θ_3, sont les angles sous lesquels ces parties sont vues du sommet, on a

$$\left(\frac{1}{\tan\theta_1}+\frac{1}{\tan\theta_2}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta_2}+\frac{1}{\tan\theta_3}\right)=4\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta_2}\right).$$

109. Si A et C sont le plus grand et le plus petit angle d'un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, on a

$$4(1-\cos A)(1-\cos C)=\cos A+\cos C.$$

110. La somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle ABC est égale à

$$a\cot A + b\cot B + c\cot C.$$

111. Dans tout triangle ABC, on a les relations suivantes

1° $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$;

2° $a(\cos B\cos C + \cos A) = b(\cos A\cos C + \cos B)$
$= c(\cos A\cos B + \cos C)$;

3° $(b+c-a)\operatorname{tang}\frac{A}{2} = (c+a-b)\operatorname{tang}\frac{B}{2} = (a+b-c)\operatorname{tang}\frac{C}{2}$;

4° $b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$;

5° $(a+b)\cos C + (c+a)\cos B + (b+c)\cos A = a+b+c$;

6° $(a^2-b^2)\cot C + (c^2-a^2)\cot B + (b^2-c^2)\cot A = 0$;

7° $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} = 0$;

8° $1 - \operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2} = \frac{2c}{a+b+c}$;

9° $\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\cos A\cos B}{ab} + \frac{\cos A\cos C}{ac} + \frac{\cos B\cos C}{bc}$;

10° $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$;

11° $a+b+c = 2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{séc}\frac{A+B}{2}$.

112. Résoudre un quadrilatère, connaissant deux de ses côtés adjacents ou opposés, ses deux diagonales et leur angle.

113. Résoudre un quadrilatère, connaissant trois de ses côtés et les angles que l'un d'eux fait avec les deux autres.

114. Par le point d'intersection de deux circonférences données, on mène une sécante quelconque qui détermine une corde dans chacune d'elles : quelle direction doit avoir cette sécante pour que la somme ou le produit de ces deux cordes soit maximum?

115. On mène, par un point extérieur, deux tangentes à un cercle donné, et l'on fait tourner la figure obtenue autour de l'un des diamètres qui correspondent aux points de contact des deux tangentes : quelle doit être leur angle, pour que le volume engendré par une révolution complète de l'aire mixtiligne limitée par ces tangentes et l'arc qu'elles embrassent ait un rapport connu avec la sphère déterminée par la rotation du cercle donné?

116. Trouver la condition pour que l'aire du rectangle inscrit dans un secteur donné soit maximum.

117. On donne un axe XY et, d'un même côté de cet axe, deux points A et B : trouver sur XY le point d'où l'on aperçoit la droite AB sous un angle maximum.

118. Par un point X extérieur à un cercle donné, on lui mène une tangente AX et une sécante XBC : quel doit être l'angle de la tangente et de la sécante, pour que le triangle ABC, déterminé par le point de contact de la tangente et par les points d'intersection de la sécante, ait une aire maximum?

119. Une portion de plan horizontal infiniment petite étant donnée, un point lumineux se trouve placé sur une verticale extérieure : quelle doit être sa position, pour que la portion de plan reçoive l'éclairage maximum?

120. Si r est le rayon du cercle inscrit dans un triangle ABC, et r_a, r_b, r_c, les rayons des cercles ex-inscrits au même triangle, on a

$$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} = r.$$

121. R étant le rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC, on a

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4 R \sin A \sin B \sin C.$$

122. R étant le rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC, si l'on forme le triangle A'B'C' en joignant les pieds des hauteurs du triangle ABC, on a

$$B'C' = R \sin 2A.$$

123. Démontrer que les distances du centre du cercle inscrit à un triangle ABC aux centres des cercles ex-inscrits au même triangle, sont respectivement proportionnelles aux sinus des demi-angles du triangle donné.

124. Le rapport de l'aire du cercle inscrit dans un triangle ABC à l'aire de ce triangle est égal à

$$\frac{\pi}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}.$$

125. r étant le rayon du cercle inscrit dans un triangle ABC, l'aire du triangle formé en joignant les centres des cercles ex-inscrits au triangle donné, a pour expression

$$\frac{abc}{2r}.$$

126. Si r est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC et r' le rayon du cercle inscrit dans le triangle formé en joignant les centres des cercles ex-inscrits au triangle ABC, on a

$$r' = r\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}.$$

127. Dans quel cas le triangle formé en prenant pour côtés les hauteurs d'un triangle donné est-il semblable à ce triangle?

128. Quatre points A, B, C, D, étant en ligne droite sur un terrain horizontal, on a vu, d'un point X de ce terrain, les segments AB, BC, CD, sous un même angle : calculer cet angle et retrouver la position du point X.

129. A quelle distance faut-il se placer d'une colonne et de son piédestal, pour apercevoir sous un même angle les deux parties du monument? La hauteur de l'œil de l'observateur au-dessus du sol est connue.

130. De trois points A, B, C, donnés dans le plan de sa base, on a vu une tour sous des angles α, β, γ : trouver sa hauteur.

131. D'un vaisseau se dirigeant vers le nord, on aperçoit deux phares placés exactement à l'ouest. Après une heure de marche, l'observateur aperçoit l'un de ces phares au sud-ouest, et l'autre au sud-sud-ouest (voir *la Cosmographie*). Sachant que la distance des deux phares est d^{km}, trouver la vitesse de marche du vaisseau en la supposant uniforme.

132. Un voyageur gravit une montagne par un sentier dont l'inclinaison sur l'horizon est d'abord α, puis devient ensuite $\beta > \alpha$. Au point de départ, ce voyageur a mesuré avec le graphomètre l'angle γ sous lequel il a vu la hauteur de la montagne; au point d'arrivée, il a mesuré effectivement cette hauteur h à l'aide du baromètre. On demande de calculer la longueur totale du trajet qu'il a parcouru.

133. On considère un triangle et le cercle inscrit dans ce triangle : trouver les rayons des trois cercles qu'on peut inscrire dans les espaces compris entre le triangle donné et son cercle inscrit.

134. Déterminer trois cercles tels, que chacun d'eux touche les deux autres et soit en même temps tangent à deux côtés d'un triangle donné.

LIVRE TROISIÈME.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

135. Résoudre un triangle sphérique, connaissant

$$a = 20^\circ 35' 22'',7,$$
$$b = 65^\circ 49' 35'',3,$$
$$A = 22^\circ 40' 15'',5.$$

On déterminera l'erreur de l'angle B, en supposant que les données soient approchées à un dixième de seconde près.

136. Dans un triangle sphérique équilatéral, on a

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang}\frac{a}{2}}{\operatorname{tang} a}.$$

Déduire de cette formule la valeur de l'angle dièdre du tétraèdre régulier.

137. Chercher la valeur de l'angle dièdre : 1° de l'octaèdre régulier; 2° de l'icosaèdre régulier; 3° du dodécaèdre régulier.

138. Dans tout triangle sphérique isocèle, on a les relations suivantes :

$$\sin\frac{a}{2} = \sin b \sin\frac{A}{2},$$
$$\cos b = \cot B \cot\frac{A}{2},$$
$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \operatorname{tang} B \cos B,$$
$$\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{a}{2} \sin B.$$

(Les deux côtés égaux du triangle sont supposés b et c.)

139. Résoudre un triangle sphérique rectangle, connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

140. Dans tout triangle sphérique rectangle ABC, on a les relations suivantes :

1° $\sin(a+b) = \cos b \sin c \cot\frac{C}{2} = \cos a \operatorname{tang} c \cot\frac{C}{2}$,

2° $\sin(a-b) = \cos b \sin c \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \cos a \operatorname{tang} c \operatorname{tang}\frac{C}{2}$,

3° $\cos(a+b) = \cos c - \sin b \sin c \cot\frac{C}{2}$,

4° $\cos(a-b) = \cos c + \sin b \sin c \operatorname{tang}\frac{C}{2}$,

5° $\sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} + \cos^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}$,

6° $\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}\operatorname{tang}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tang}^2\frac{c}{2}$,

7° $\sin(b-c) = \sin b \operatorname{tang}\frac{B}{2} - \sin c \operatorname{tang}\frac{C}{2}$.

141. Si l'on désigne par δ la valeur de l'arc abaissé perpendiculairement du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC sur son hypoténuse, on a

$$\cot\delta = \sqrt{\cot^2 b + \cot^2 c}.$$

142. Si l'on a, dans un triangle sphérique rectangle ABC, $B = \frac{\pi}{5}$ et $C = \frac{\pi}{3}$, on a aussi $a + b + c = \frac{\pi}{2}$.

143. Si l'on désigne par r et R les rayons sphériques des cercles inscrit et circonscrit à un triangle équilatéral, on a

$$\operatorname{tang} R = 2 \operatorname{tang} r.$$

144. Résoudre un triangle sphérique, connaissant un côté, l'angle opposé ou l'un des angles adjacents à ce côté, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

145. Résoudre un triangle sphérique, connaissant un côté, l'angle qui lui est opposé, et la hauteur qui lui correspond.

146. Résoudre un triangle sphérique, connaissant les sommes obtenues en ajoutant chacun de ses angles au côté opposé.

147. Démontrer géométriquement les analogies de Neper (217).

148. Des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique, déduire celles de la Trigonométrie rectiligne.

149. Calculer la distance sphérique de Paris à Moscou, sachant que la

longitude de Moscou, rapportée au méridien de Paris, a pour valeur $35° 17' 30''$, et que les latitudes de Paris et de Moscou sont égales à $48° 50' 2''$ et à $55° 45' 13''$.

150. Dans quel cas l'aire d'un triangle sphérique dont deux côtés ont des valeurs données est-elle maximum?

151. Deux triangles appartenant à la même sphère sont équivalents, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés dont les moitiés ont des cotangentes inversement proportionnelles.

152. Sur une sphère de rayon R, on trace un petit cercle de rayon sphérique r, et l'on divise la circonférence de ce cercle, aux points A, B, C, en parties proportionnelles aux nombres 1, 2, 3. On demande de calculer les côtés du triangle sphérique ABC en mètres, ses angles en degrés, son aire en mètres carrés, en prenant

$$R = 6366198^{m} \quad \text{et} \quad r = R\cos 48° 50' 13''.$$

153. Calculer les distances du pôle du cercle inscrit dans un triangle sphérique à ses trois sommets, et les distances du pôle du cercle circonscrit aux trois côtés du triangle.

154. Si trois arcs de cercle a, b, c, de même rayon R, et trois angles dièdres A, B, C, chacun moindre que 180°, satisfont aux relations qui forment le groupe (1) des formules fondamentales relatives à la résolution des triangles quelconques (195), ces quantités sont les six éléments d'un triangle sphérique.

155. Dans tout triangle sphérique, les sinus des hauteurs sont inversement proportionnels aux sinus des côtés correspondants.

156. Si, dans un triangle sphérique ABC, on désigne par θ, φ et ψ, les arcs bissecteurs des angles A, B, C, respectivement terminés aux côtés opposés, on a

$$\cot\theta\cos\frac{A}{2} + \cot\varphi\cos\frac{B}{2} + \cot\psi\cos\frac{C}{2} = \cot a + \cot b + \cot c.$$

157. Si l'on désigne par δ, dans un triangle sphérique ABC, la valeur de l'arc abaissé perpendiculairement du sommet A sur le côté opposé a, on a

$$\cot\delta = \sqrt{\operatorname{coséc} a(\cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a\cos b\cos c)}.$$

158. Si un côté d'un triangle sphérique est divisé en quatre parties égales, et si l'on appelle θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, les angles obtenus en joignant par des arcs de grand cercle les points de division successifs du côté considéré au sommet opposé du triangle, on a

$$\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin\theta_2\sin\theta_4 = \sin(\theta_3 + \theta_4)\sin\theta_1\sin\theta_3.$$

159. Étant donné un triangle sphérique ABC, on forme la pyramide OABC en joignant ses sommets entre eux et au centre de la sphère.

R étant le rayon de la sphère, et r, r_a, r_b, r_c, étant les rayons sphériques des cercles inscrit et ex-inscrits au triangle ABC, le volume de la pyramide OABC a pour expression

$$\frac{R^3}{3}\sqrt{\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r_a \operatorname{tang} r_b \operatorname{tang} r_c}.$$

160. On abaisse, des sommets d'un triangle sphérique, des arcs perpendiculaires sur les côtés opposés, c'est-à-dire on mène les hauteurs du triangle. Les pieds de ces hauteurs déterminent six segments sur les côtés du triangle. Démontrer que le produit des tangentes de trois segments non consécutifs est égal au produit des tangentes des trois autres segments.

161. Si l'on joint un point quelconque d'une sphère aux sommets d'un triangle sphérique tracé sur cette sphère, en prolongeant les arcs obtenus jusqu'à la rencontre des côtés opposés, on détermine sur ces côtés six segments. Démontrer que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal au produit des sinus des trois autres segments.

Conséquences de la réciproque de cette proposition, relativement aux hauteurs, aux bissectrices, aux médianes, etc., d'un triangle sphérique.

162. Dans tout triangle sphérique ABC, on a les relations suivantes :

1° $$\sin(a+b) = \frac{\sin c(\cos B + \cos A)}{2\sin^2\frac{C}{2}},$$

2° $$\sin(a-b) = \frac{\sin c(\cos B - \cos A)}{2\cos^2\frac{C}{2}},$$

3° $$\cos\frac{A+B+C}{2} = -\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{c}{2}},$$

4° $$\cos\frac{A+B-C}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{c}{2}},$$

5° $$\cos\frac{A-B-C}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C}{\sin\frac{c}{2}},$$

6° $$\operatorname{tang}\frac{A+B-C}{2} = \frac{1-\cos a-\cos b+\cos c}{\sin a\sin b\sin C},$$

7° $$\frac{\cot A}{\cot a} = \frac{\cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B}{\cos A\sin C + \sin A\cos C\cos b}.$$

163. La médiane d'un triangle sphérique ABC, qui correspond au côté a, divisant ce côté en deux segments l et l', on a

$$\frac{\sin l}{\sin l'} = 2 \cos \frac{a}{2}.$$

164. On mène les hauteurs AD, BE, CF, du triangle sphérique ABC, qui se rencontrent en un point O et dont les pieds sur les côtés opposés sont les points D, E, F. Démontrer les relations

1° $$\frac{\text{tang AD}}{\text{tang OD}} = 1 + \frac{\cos A}{\cos B \cos C}, \quad \frac{\text{tang BE}}{\text{tang OE}} = 1 + \frac{\cos B}{\cos A \cos C},$$
$$\frac{\text{tang CF}}{\text{tang OF}} = 1 + \frac{\cos C}{\cos A \cos B};$$

2° $$\text{tang AO tang OD} = \text{tang BO tang OE} = \text{tang CO tang OF};$$

3° $$\frac{\cos AD}{\cos AO \cos OD} = \frac{\cos BE}{\cos BO \cos OE} = \frac{\cos CF}{\cos CO \cos OF}.$$

165. Exprimer la longueur d'une diagonale d'un parallélipipède quelconque, en fonction des arêtes qui aboutissent à cette diagonale et des angles qu'elles forment entre elles.

166. Si l'on désigne par λ, μ, ν, les longueurs des arêtes contigües d'un parallélipipède quelconque et par a, b, c, les angles qu'elles forment entre elles, son volume peut être encore (238) représenté par l'expression

$$\lambda\mu\nu\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}.$$

167. Calculer le volume d'un tétraèdre en fonction de ses six arêtes.

168. On considère sur une sphère O deux triangles supplémentaires ABC, A'B'C', et l'on forme deux parallélipipèdes ayant respectivement pour arêtes contiguës, le premier, OA, OB, OC, le second, OA', OB', OC'. Si l'on représente par v et V les volumes de ces deux parallélipipèdes, et par α, β, γ, les angles AOA', BOB', COC', on a les relations suivantes :

$$v = \sin a \cos\alpha = \sin b \cos\beta = \sin c \cos\gamma,$$
$$V = \sin A \cos\alpha = \sin B \cos\beta = \sin C \cos\gamma,$$
$$vV = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \sin a \sin b \sin c \sin A \sin B \sin C,$$
$$\frac{v^2}{V} = \sin a \sin b \sin c, \quad \frac{V^2}{v} = \sin A \sin B \sin C.$$

169. Par un point donné sur un côté d'un triangle sphérique, mener un arc de grand cercle qui divise l'aire du triangle dans un rapport donné.

170. Si la somme des angles d'un triangle sphérique ABC est égale à quatre angles droits, on a

$$\cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} = 1.$$

171. Trouver les distances sphériques du pôle du cercle circonscrit à un triangle sphérique aux pôles des cercles inscrit et ex-inscrits à ce triangle.

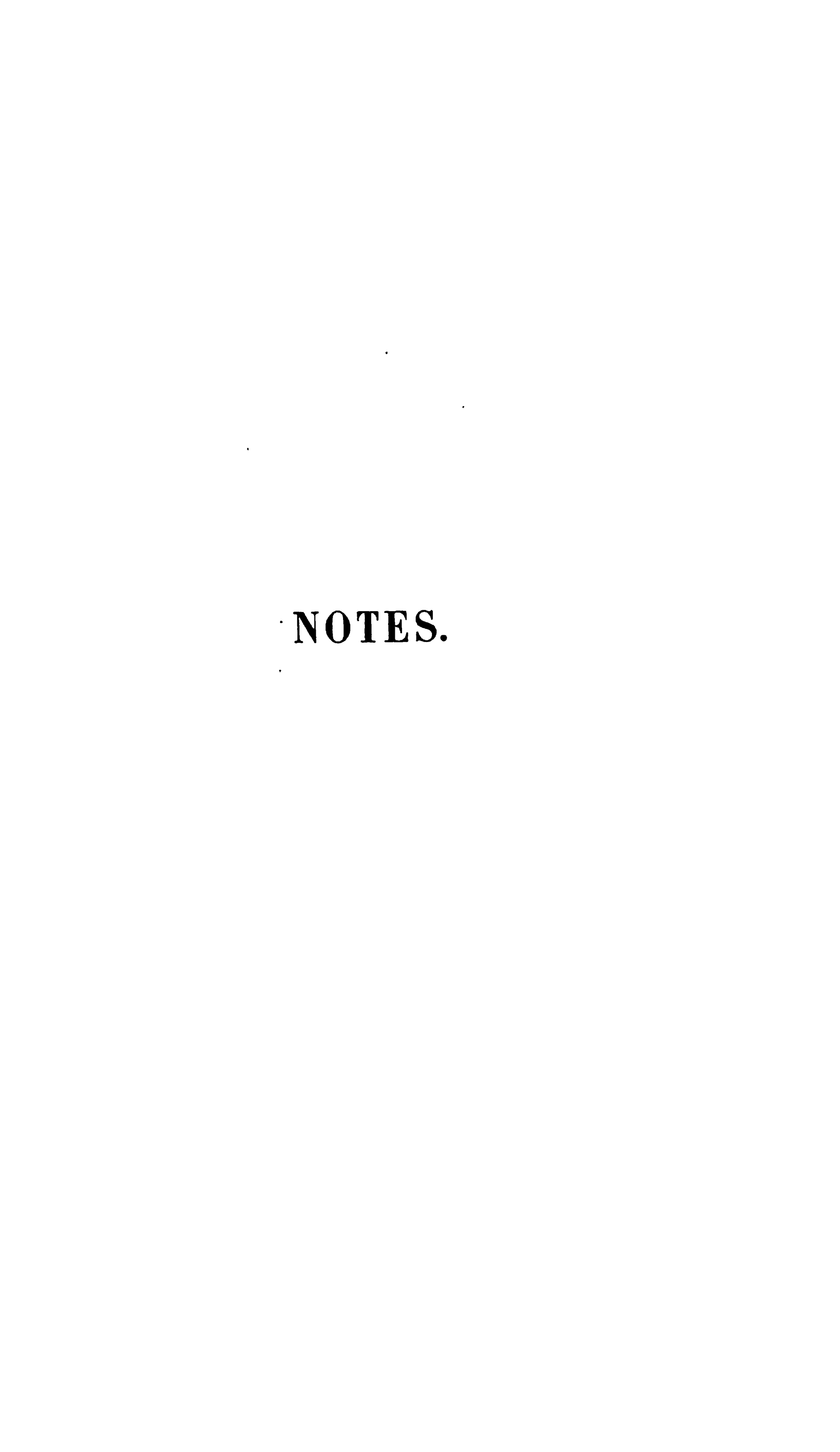
172. Soit un triangle sphérique dont deux côtés varient, tandis que le troisième est donné. L'arc de grand cercle qui passe par les milieux des côtés variables vient couper le côté constant prolongé en un point fixe dont la distance au milieu de ce côté est égale à un quadrant.

173. On donne, sur une sphère O de rayon R, un triangle sphérique ABC dont les milieux des côtés BC, AC, AB, sont A', B', C'. Si l'on désigne par 2Δ l'angle $A+B+C-180^\circ$, et par V le volume du parallélipipède construit sur les rayons OA', OB', OC', comme arêtes contiguës, on a

$$V = R^3 \sin\Delta.$$

174. Si l'on représente par a et b les longueurs de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, par δ leur plus courte distance, par α leur angle, par v le volume du tétraèdre, on a

$$v = \frac{1}{6} ab\delta \sin\alpha.$$



NOTES.

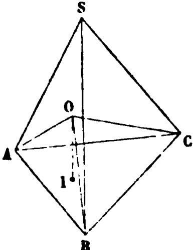
NOTES.

NOTE I.

PROBLÈME DE LA SPHÈRE TANGENTE A QUATRE PLANS.

Nous avons démontré (*Géom.*, 525) que, par quatre points non situés dans un même plan, on peut toujours faire passer une sphère et une seule. Il en résulte que tout tétraèdre SABC est *inscriptible* à la sphère (*fig.* 1).

Fig. 1.



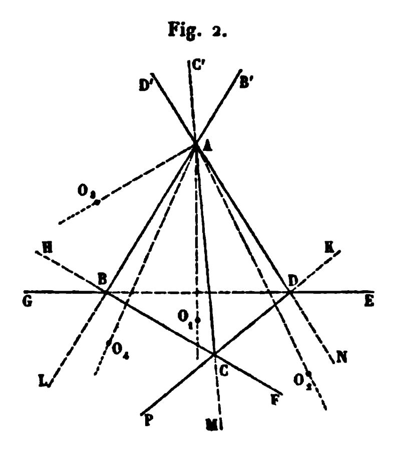
Les six arêtes du tétraèdre sont des cordes de la sphère *circonscrite*. Par conséquent, si sur ces arêtes et par leurs milieux on élève des plans perpendiculaires, ces six plans se coupent en un même point, qui est le centre de la sphère déterminée par les quatre sommets du tétraèdre.

Tout tétraèdre est aussi *circonscriptible* à la sphère. Menons, en effet, les trois plans bissecteurs des angles dièdres déterminés par la base ABC et les trois faces latérales du tétraèdre SABC. Ces plans constituent un nouveau tétraèdre OABC, dont le sommet O est le centre d'une *sphère tangente aux quatre faces du tétraèdre donné;* car, d'après les propriétés connues des plans bissecteurs (*Géom.*, 385), ce point O est à égale distance de ces quatre faces : il est d'ailleurs unique.

A un tétraèdre donné, on ne peut donc *inscrire* qu'une seule sphère qui a pour rayon la perpendiculaire OI abaissée du point O sur la base ABC. Comme on peut prendre pour base du tétraèdre telle face qu'on veut, on voit que les six plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre concourent en un même point, qui est le centre de la sphère *inscrite*.

Cela posé, *on donne quatre plans formant un tétraèdre* ABCD (*fig.* 2), *et l'on demande combien il peut exister de sphères tangentes aux quatre faces de ce tétraèdre indéfiniment prolongées, c'est-à-dire de points également distants de ces quatre faces.*

Fig. 2.



Le lieu des points à égale distance des deux faces ABC, ABD, prolongées, est l'ensemble des deux plans bissecteurs α et α' des angles dièdres DABC, DABH, formés par ces faces. De même, le lieu des points à égale distance des deux faces ABC, ACD, est l'ensemble des deux plans bissecteurs β et β' des dièdres qu'elles forment. Les deux plans β et β' coupent les deux plans α et α' suivant quatre droites partant du point A. L'une d'elles AO_1, intersection des plans α et β, tombe dans l'intérieur du tétraèdre ABCD; les trois autres tombent en dehors. L'intersection OA_2 des plans α et β' perce le plan BCD dans la partie EDCF; l'intersection AO_3 des plans α' et β perce le plan BCD dans la partie HBDK; enfin, l'intersection AO_4 des plans α' et β' perce le plan BCD dans sa partie GBCP.

Les quatre droites AO_1, AO_2, AO_3, AO_4, ainsi obtenues, étant le lieu des points de l'espace à égale distance des trois faces ABC, ABD, ACD, les plans bissecteurs des dièdres formés par les faces ABD, ACD, passeront par ces droites. Les centres des sphères tangentes aux quatre plans donnés ne peuvent donc se trouver que sur les quatre droites déterminées. Mais ces centres doivent aussi appartenir aux deux plans bissecteurs γ et γ' des dièdres formés par les faces ABC, BCD, prolongées; et comme un plan et une droite ne peuvent avoir qu'un point commun, il

ne peut y avoir plus de huit points d'intersection entre les quatre droites considérées et les deux plans γ et γ'. En outre, les points ainsi trouvés, étant à égale distance des quatre faces du tétraèdre ABCD, sont contenus dans les plans bissecteurs des autres dièdres à la base. Il ne peut donc exister plus de *huit* sphères tangentes aux quatre plans donnés. Voyons comment elles sont placées.

La sphère tangente intérieurement ou *inscrite* dans le tétraèdre existe toujours; car le plan γ faisant un angle aigu avec le plan BCD, dans le sens CD, rencontre nécessairement la droite AO_1 dans l'intérieur du tétraèdre.

Les quatre sphères tangentes extérieurement à l'une des faces du tétraèdre et au prolongement des trois autres, ou sphères *ex-inscrites,* existent également toujours. Car le plan γ' coupe nécessairement la droite OA_1 au-dessous du plan BCD, à l'intérieur de l'espèce de tronc de pyramide ouvert formé par ce plan et les prolongements des trois autres faces du tétraèdre. De même, si δ et δ' sont les plans bissecteurs des dièdres suivant l'arête CD, le plan extérieur δ coupe AO_2 en un point situé entre A et O_2, centre de la sphère ex-inscrite qui repose sur la face ACD. Si ε et ε' sont les plans bissecteurs des dièdres suivant BD, le plan ε' coupe AO_3 au centre de la sphère ex-inscrite qui repose sur la face ABD. Enfin, le plan γ' coupe AO_4 au centre de la sphère ex-inscrite qui s'appuie sur la face ABC.

Il reste à considérer les sphères tangentes aux seuls prolongements des faces. Ces sphères ne peuvent être contenues que dans les espèces de *combles* prismatiques ayant pour faîtes les arêtes du tétraèdre. Considérons les deux combles MCFNDE, GBHD'AC', qui se terminent aux deux arêtes opposées CD et AB. Le plan bissecteur δ coupera AO_2, soit au-dessous du plan BCD, soit au delà de A et au-dessous de D'AC'. Donc, s'il existe une sphère tangente dans l'un des deux combles répondant à deux arêtes opposées du tétraèdre, elle ne pourra pas exister dans l'autre. Par suite, les six combles prismatiques ayant pour faîtes les six arêtes du tétraèdre ne pourront renfermer que trois sphères tangentes; ce qui conduit bien au nombre total de huit sphères tangentes indiqué plus haut.

Les trois dernières n'existeront pas toujours, car il peut arriver que le plan δ, par exemple, soit parallèle à la droite AO_2 : le centre de la sphère correspondante se transportant alors à l'infini, elle cessera d'exister.

Soient a, b, c, d, les aires des faces du tétraèdre ABCD opposées aux sommets A, B, C, D, et V son volume; soient r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, le rayon de la sphère inscrite et ceux des sphères ex-inscrites tangentes aux faces b, c, d, a. Joignons le centre de chacune d'elles aux sommets du tétraèdre, et exprimons le volume de ce tétraèdre en fonction des volumes des quatre tétraèdres obtenus. Ces tétraèdres sont tous additifs pour la sphère inscrite; et, pour chaque sphère ex-inscrite, celui qui repose sur la face à laquelle elle est tangente devient soustractif, tandis que les autres restent

additifs. On a donc successivement

$$V = \frac{1}{3} r_1 (a + b + c + d), \quad V = \frac{1}{3} r_2 (a + c + d - b), \quad \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$r_1 = \frac{3V}{a + b + c + d}, \quad r_2 = \frac{3V}{a + c + d - b}, \quad r_3 = \frac{3V}{a + b + d - c},$$

$$r_4 = \frac{3V}{a + b + c - d}, \quad r_5 = \frac{3V}{b + c + d - a}.$$

Toutes ces valeurs positives et finies, puisque chaque face d'un tétraèdre est plus petite que la somme des trois autres, prouvent de nouveau l'existence certaine des cinq premières sphères tangentes. On passe de la valeur de r_1 à l'une quelconque des autres, en changeant le signe de la face sur laquelle s'appuie la sphère ex-inscrite dont on cherche le rayon, parce que les centres de cette sphère et de la sphère inscrite sont de côtés différents par rapport à cette face, et du même côté par rapport aux trois autres.

Soient maintenant ρ_1, ρ_2, ρ_3, les rayons des trois dernières sphères. Le centre de l'une d'elles, comparé à celui de la sphère inscrite, se trouve d'un même côté par rapport à deux des faces du tétraèdre et de côtés différents par rapport aux deux autres faces. Si la sphère considérée est dans le comble MCFNDE, on aura

$$V = \frac{1}{3} \rho_1 [(c + d) - (a + b)];$$

si elle est dans le comble opposé GBHD'AC', on aura

$$V = \frac{1}{3} \rho_1 [(a + b) - (c + d)].$$

De même, s'il s'agit de la sphère située dans le comble LBHNDK ou dans son opposé PCFB'AD', on aura

$$V = \frac{1}{3} \rho_2 [(b + d) - (a + c)] \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{3} \rho_2 [(a + c) - (b + d)].$$

Enfin, pour la sphère située dans le comble MCPLBG ou dans son opposé EDKB'AC', il viendra

$$V = \frac{1}{3} \rho_3 [(b + c) - (a + d)] \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{3} \rho_3 [(a + d) - (b + c)].$$

Il sera facile de décider entre ces valeurs; car, si l'on suppose que les quatre faces du tétraèdre, rangées par ordre de grandeur, donnent la série a, b, c, d, on aura

$$a + b > c + d, \quad a + c > b + d,$$

c'est-à-dire que les rayons des deux premières sphères auront les valeurs finies et positives

$$\rho_1 = \frac{3V}{(a+b)-(c+d)}, \quad \rho_2 = \frac{3V}{(a+c)-(b+d)}.$$

Les autres valeurs de ρ_1 et de ρ_2, étant négatives, devront être rejetées. Si la somme $b+c$ n'est pas égale à la somme $a+d$, elle sera plus grande ou plus petite, et l'on n'aura aussi pour ρ_3 qu'une seule valeur finie et positive, qui sera

$$\rho_3 = \frac{3V}{\pm[(b+c)-(a+d)]}.$$

On prendra en dehors de la parenthèse le signe + ou le signe —, suivant qu'on aura $b+c >$ ou $< a+d$.

Si $b+c=a+d$, ρ_3 est infini, et l'une des trois sphères seulement possibles disparaît.

Si l'on a à la fois $a=b$ et $c=d$, auquel cas la condition précédente est encore satisfaite, ρ_2 devient aussi infini, et des trois sphères seulement possibles, deux disparaissent.

Enfin, si l'on a à la fois $a=b$, $c=d$, et $a+b=c+d$, c'est-à-dire $a=b=c=d$, ρ_1 devient infini comme ρ_2 et ρ_3, et les trois sphères seulement possibles disparaissent toutes les trois.

En résumé, *les huit sphères tangentes se réduisent à sept, si la somme de deux des faces du tétraèdre est égale à la somme des deux autres faces; elles se réduisent à six, si en outre chaque face du premier groupe est équivalente à une face du second groupe; elles se réduisent à cinq, si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes.*

Les plans proposés peuvent avoir quelques-unes de leurs intersections parallèles; ils peuvent être parallèles entre eux en tout ou en partie; en s'appuyant sur ce qui précède, il sera facile de traiter directement ces cas particuliers.

On peut traiter la question précédente en faisant usage des *coordonnées tétraédriques*. Nous renverrons sur ce point au TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4[e] édition.

NOTE II.

EMPLOI DE LA RÈGLE A CALCUL EN GÉOMÉTRIE ET EN TRIGONOMÉTRIE.

Nous avons donné (t. I, Note II) la théorie générale de la *règle à calcul*. Il nous reste à montrer l'usage qu'on en peut faire pour abréger, au point de vue pratique et lorsqu'une très-grande approximation n'est pas nécessaire, les calculs géométriques et trigonométriques.

Applications géométriques.

Si l'on désigne par a, b, c, les dimensions d'un parallélipipède rectangle et par D le poids spécifique (t. I, *Arithm.*, 363) de la substance, le poids du corps considéré sera représenté par le produit

$$abc\mathrm{D} \quad \text{ou} \quad \frac{abc}{\frac{1}{\mathrm{D}}}.$$

Les Tables inscrites au revers de la règle font connaître D et $\frac{1}{\mathrm{D}}$ pour les matières les plus usuelles. Ces valeurs sont inscrites dans les deux colonnes qui suivent la désignation des substances.

S'il s'agit d'un cylindre ayant d pour diamètre de sa base et h pour hauteur, son poids sera exprimé par la formule

$$\frac{1}{4}\pi d^2 h\mathrm{D} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 h}{\frac{4}{\pi \mathrm{D}}}.$$

La colonne intitulée *Cyl.* fait connaître les valeurs de $\frac{4}{\pi \mathrm{D}}$ pour les substances considérées.

Enfin, pour une sphère ayant d pour diamètre, le poids sera

$$\frac{\pi d^3}{6}\mathrm{D} \quad \text{ou} \quad \frac{d^3}{\frac{6}{\pi \mathrm{D}}}.$$

La colonne intitulée *Sph.* fait connaître les valeurs de $\frac{6}{\pi \mathrm{D}}$.

La surface d'un cercle est $\frac{\pi d^2}{4}$ en fonction de son diamètre, ou

$$\frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \frac{d^2}{1,273}.$$

Le volume d'un cylindre peut être alors exprimé par

$$\frac{d^2 h}{1,273}.$$

De même, le volume d'une sphère, égal à $\frac{\pi d^3}{6}$, peut être représenté par

$$\frac{d^3}{\frac{6}{\pi}} = \frac{d^3}{1,91}.$$

Si l'on connaît la circonférence $C = \pi d$ d'un grand cercle, on a pour le volume de la sphère

$$\frac{C^2 d}{6\pi} = \frac{C^3}{6\pi^2} = \frac{C^3}{59,22}.$$

Les nombres ainsi introduits, nombres inscrits sur la règle, permettent d'arriver aux résultats cherchés à l'aide d'un seul mouvement de la réglette.

Supposons, par exemple, qu'on veuille calculer le volume d'un cylindre en employant la formule $\frac{d^2 h}{1,273}$. On n'a qu'à amener le diviseur 1,273 lu sur la réglette au-dessus du nombre d lu sur l'échelle inférieure de la règle, et il est évident que le volume correspond, sur l'échelle supérieure, au nombre h lu sur la réglette.

S'il s'agit d'un poids, c'est le diviseur 1,273 qui varie.

Pour une sphère, le procédé est le même, en remplaçant le facteur h par un facteur d.

Applications trigonométriques.

Le revers de la réglette présente, outre l'échelle des logarithmes, deux échelles, l'une au milieu, l'autre qui correspond au bord supérieur de la réglette. Ces échelles peuvent remplacer une Table de *sinus naturels* s'étendant de 30′ à 90° et une Table de *tangentes naturelles* s'étendant de 30′ à 45°.

L'échelle des sinus est l'échelle supérieure du revers de la réglette. Cette échelle est divisée en parties proportionnelles aux logarithmes des sinus, de sorte qu'elle est identique en longueur à l'échelle supérieure de

la règle. Quant à la graduation, elle donne les arcs

de 10′ en 10′,	depuis l'arc de	40′	jusqu'à celui de	10°;
de 20′ en 20′,	»	10°	»	20°;
de 30′ en 30′,	»	20°	»	30°;
de degré en degré,	»	30°	»	60°;
de 2° en 2°,	»	60°	»	70°.

Les trois dernières divisions correspondent aux arcs de 75°, 80°, 90°.

L'échelle supérieure de la règle donne les logarithmes des nombres de 1 à 100 ou de 0,01 à 1. L'arc qui a pour sinus naturel 0,01 est l'arc de 34′ environ. Cet arc, qui a 0 pour partie décimale de son log sin, répond au commencement de l'échelle.

Supposons qu'on demande le sinus de 12°.

On fera concorder toutes les extrémités de droite des échelles de la règle et de la réglette retournée. A partir de la division marquée 10 sur l'échelle supérieure de la réglette, on comptera six divisions ($6 \times 20' = 2°$), et on lira, au-dessus de la dernière, sur l'échelle supérieure de la règle. 0,208, en remarquant que, lorsque le sinus demandé tombe dans la seconde partie de l'échelle supérieure de la règle, le premier chiffre significatif exprime des dixièmes. Ce premier chiffre est un chiffre de centièmes, lorsque le sinus tombe dans la première partie de l'échelle.

On trouve dans la Table des sinus naturels sin 12° = 0,2079.

Si l'on demande l'arc correspondant à un sinus donné, on lit le sinus sur l'échelle supérieure de la règle, et le nombre de degrés cherché lui correspond sur l'échelle supérieure de la réglette.

On peut, si cela semble plus commode, ne pas retourner la réglette, la laisser dans sa rainure. On fait alors coïncider l'extrémité de l'arc lu au revers de la réglette avec l'extrémité droite de la règle, et, au-dessous de la dernière division de la règle, on lit sur la face de la réglette le sinus cherché.

Si l'on demande, au contraire, l'arc correspondant à un sinus donné, il faut amener l'extrémité de ce sinus lu sur la face de la réglette au-dessous de la dernière division de la règle; l'arc, exprimé en degrés, se lira alors sur le revers de la réglette et au-dessous de l'extrémité de droite de la règle.

L'échelle des tangentes est l'échelle placée au milieu du revers de la réglette. Cette échelle est divisée en parties ppoportionnelles aux logarithmes des tangentes, et les procédés à appliquer pour s'en servir sont identiques à ceux qu'on vient d'indiquer relativement aux sinus.

Supposons qu'on demande l'arc dont la tangente est 0,6249. La règle, comme les Tables, donne 32°.

La tangente d'un angle exprime aussi *la pente par mètre* d'une certaine ligne droite par rapport à l'horizon. L'échelle des tangentes permet donc de réduire immédiatement les pentes par mètre en degrés, et réciproquement.

Les ingénieurs évaluent les inclinaisons par rapport à l'horizon en degrés ou en centimètres par mètre. Dans le génie, la pente est indiquée par une fraction dont le numérateur est 1, et le dénominateur la base du talus pour une hauteur égale à 1. La tangente égale à 0,1 correspond à un angle de 5°42′ environ sur l'horizon, ou à une pente de 10 centimètres par mètre, ou à une pente de $\frac{1}{10}$; c'est-à-dire que, pour s'élever sur le talus d'une hauteur égale à 1^m, il faut parcourir 10^m en projection horizontale.

TABLES NUMÉRIQUES.

TABLE I.

Évaluation des angles ou des arcs en parties du rayon.

Pour exprimer rapidement un arc dont on connaît le nombre de degrés en parties du rayon correspondant, on n'a qu'à multiplier par ce rayon la valeur de l'arc du même nombre de degrés dans le cercle trigonométrique; et, pour trouver cette valeur, on peut se servir utilement de la petite Table ci-dessous, dont les éléments se rapportent au cercle trigonométrique.

ARC 1″ = 0,0000048, ARC 1′ = 0,0002909, ARC 1° = 0,0174533.

10″	0,000048	10′	0,002909	10°	0,174533
20	0,000097	20	0,005818	20	0,349066
30	0,000145	30	0,008727	30	0,523599
40	0,000194	40	0,011636	40	0,698132
50	0,000242	50	0,014544	50	0,872665
60	0,000291	60	0,017453	60	1,047198
70	0,000339	70	0,020362	70	1,221731
80	0,000388	80	0,023271	80	1,396264
90	0,000436	90	0,026180	90	1,570797

TABLE II.

Lignes trigonométriques naturelles des angles ou des arcs, variant de minute en minute, depuis 0° jusqu'à 90°.

(On appelle *lignes trigonométriques naturelles* les droites qui représentent les rapports trigonométriques, quand on considère le cercle de rayon 1 (8). On peut avoir recours très utilement à la Table de ces valeurs *directes* des rapports trigonométriques, dans un grand nombre de questions pratiques où il est inutile de faire intervenir l'emploi des logarithmes.)

0°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,000000	1,000000	0,000000*	Infinie	60
1	0,000291*	1,000000	0,000291*	3437,7467*	59
2	0582*	1,000000	0582*	1718,8732*	58
3	0873*	1,000000	0873*	1145,9153	57
4	1164*	9999	1164*	859,4363	56
5	1454	9999*	1454	687,5489*	55
6	1745	9998	1745	572,9572	54
7	2036	9998*	2036	491,1060	53
8	2327	9997	2327	429,7176*	52
9	2618	9997*	2618	381,9710*	51
10	2909*	9996*	2909*	343,7737	50
11	0,003200*	0,999995*	0,003200*	312,5214*	49
12	3491*	9994*	3491*	286,4777	48
13	3782*	9993*	3782*	264,4408	47
14	4072	9992*	4073*	245,5520*	46
15	4363	9991*	4363	229,1817*	45
16	4654	9989	4654	214,8576	44
17	4945	9988*	4945	202,2188*	43
18	5236	9986	5236	190,9842*	42
19	5527*	9985*	5527*	180,9322	41
20	5818*	9983	5818*	171,8854	40
21	0,006109*	0,999981	0,006109*	163,7002*	39
22	6400*	9980*	6400*	156,2591*	38
23	6690	9978*	6691*	149,4650	37
24	6981	9976*	6981	143,2371	36
25	7272	9974*	7272	137,5075*	35
26	7563	9971	7563	132,2185	34
27	7854*	9969	7854	127,3213	33
28	8145*	9967*	8145	122,7740*	32
29	8436*	9964	8436	118,5402*	31
30	8727*	9962*	8727*	114,5887*	30
31	0,009017	0,999959	0,009018*	110,8921*	29
32	9308	9957*	9309*	107,4265*	28
33	9599	9954*	9600*	104,1709	27
34	9890	9951	9891*	101,1069	26
35	0,010181*	9948	0,010181	98,2179	25
36	0472*	9945	0472	95,4895*	24
37	0763*	9942	0763	92,9085*	23
38	1054*	9939*	1054	90,4633	22
39	1344	9936*	1345	88,1436*	21
40	1635	9932	1636	85,9398*	20
41	0,011926	0,999929*	0,011927	83,8435	19
42	2217	9925	2218*	81,8470	18
43	2508*	9922*	2509*	79,9434	17
44	2799*	9918	2800*	78,1263	16
45	3090*	9914	3091*	76,3900	15
46	3381*	9910	3382*	74,7292*	14
47	3671	9907*	3673*	73,1390*	13
48	3962	9903*	3964*	71,6151*	12
49	4253	9898	4255*	70,1533	11
50	4544*	9894	4545	68,7501*	10
51	0,014835*	0,999890*	0,014836	67,4019*	9
52	5126*	9886*	5127	66,1055*	8
53	5417*	9881	5418	64,8580	7
54	5707	9877*	5709	63,6567	6
55	5998	9872	6000	62,4992*	5
56	6289	9867	6291	61,3829	4
57	6580*	9863*	6582	60,3058	3
58	6871*	9858*	6873	59,2659*	2
59	7162*	9853*	7164	58,2612*	1
60	7452	9848*	7455	57,2900*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

89°

1°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0	0,017452	0,999848*	0,017455	57,290
1	7743	9843*	7746	56,350
2	8034	9837	8037	55,441
3	8325*	9832	8328	54,561
4	8616*	9827*	8619	53,708
5	8907*	9821	8910	52,882
6	9197	9816*	9201	52,080
7	9488	9810	9492	51,303
8	9779	9804	9783	50,548
9	0,020070*	9799*	0,020074	49,815
10	0361*	9793*	0365	49,103
11	0,020652*	0,999787*	0,020656	48,412
12	0942	9781*	0947	47,739
13	1233	9775*	1238	47,085
14	1524	9768	1529	46,448
15	1815*	9762	1820	45,829
16	2106*	9756*	2111	45,226
17	2397*	9749	2402	44,638
18	2687	9743*	2693	44,066
19	2978	9736*	2984	43,508
20	3269	9729	3275	42,964
21	0,023560*	0,999722	0,023566	42,433
22	3851*	9716*	3857	41,915
23	4141	9709*	4148	41,410
24	4432	9701	4440*	40,917
25	4723	9694	4731*	40,435
26	5014*	9687	5022*	39,965
27	5305*	9680*	5313*	39,505
28	5595	9672	5604*	39,056
29	5886	9665*	5895*	38,617
30	6177*	9657	6186*	38,188
31	0,026468*	0,999650*	0,026477	37,768
32	6759*	9642*	6768	37,357
33	7049	9634	7059	36,956
34	7340	9626	7350	36,562
35	7631*	9618	7641	36,177
36	7922*	9610	7933*	35,800
37	8212	9602*	8224*	35,431
38	8503	9594*	8515*	35,069
39	8794	9585	8806*	34,715
40	9085*	9577*	9097	34,367
41	0,029376*	0,999568	0,029388	34,027
42	9666	9560*	9679	33,693
43	9957	9551	9971*	33,366
44	0,030248*	9542	0,030262*	33,045
45	0539*	9534*	0553*	32,730
46	0829	9525*	0844*	32,421
47	1120	9516*	1135	32,118
48	1411*	9507*	1426	31,820
49	1702*	9497	1717	31,528
50	1992	9488	2009*	31,241
51	0,032283	0,999479*	0,032300*	30,959
52	2574*	9469	2591	30,683
53	2864	9460*	2882	30,411
54	3155	9450	3173	30,144
55	3446*	9441*	3465*	29,882
56	3737*	9431*	3756*	29,624
57	4027	9421*	4047	29,371
58	4318	9411*	4338	29,122
59	4609*	9401*	4630*	28,877
60	4900*	9391*	4921*	28,636
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang

88°

2°						3°			
Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.		'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0,03490*	0,99939	0,03492	28,6363*	60	0	0,05234*	0,99863*	0,05241*	19,0811
519	938	521	28,3994*	59	1	263*	861	270*	18,9755
548	937	550	28,1664	58	2	292*	860*	299	18,8711*
577	936*	579	27.9372	57	3	321*	858	328	18,7678
606	935*	609*	27,7117	56	4	350*	857*	357	18,6656*
635	934*	638*	27,4899*	55	5	379*	855	387*	18,5645*
664	933*	667*	27,2715*	54	6	408*	854*	416*	18,4645*
693	932*	696*	27,0566*	53	7	437*	852	445*	18,3655
723*	931*	725	26,8450*	52	8	466*	851*	474	18,2677*
752*	930*	754	26,6367*	51	9	495	849*	503	18,1708
781*	929*	783	26,4316	50	10	524	847	533*	18,0750*
0,03810*	0,99927	0,03812	26,2296	49	11	0,05553	0,99846*	0,05562*	17,9802
839*	926	842*	26,0307	48	12	582	844	591*	17,8863
868*	925	871*	25,8348	47	13	611	842	620	17,7934
897*	924	900*	25,6418	46	14	640	841*	649	17,7015
926*	923*	929	25,4517*	45	15	669	839	678	17,6106*
955	922*	958	25,2644*	44	16	698	838*	708*	17,5205
984	921*	987	25,0798*	43	17	727	836*	737*	17,4314*
0,04013	919	0,04016	24,8978	42	18	756	834	766*	17,3432*
042	918	046*	24,7185	41	19	785	833*	795	17,2558
071	917	075*	24,5418*	40	20	814	831*	824	17,1693
0,04100	0,99916*	0,04104*	24,3675	39	21	0,05844*	0,99829	0,05854*	17,0837
129	915*	133*	24,1957	38	22	873*	827	883*	16,9990*
159*	913	162	24,0263	37	23	902*	826*	912*	16,9150
188*	912	191	23,8593*	36	24	931*	824*	941	16,8319
217*	911	220	23,6945	35	25	960*	822	970	16,7496
246*	910*	250*	23,5321*	34	26	989*	821*	999	16,6681
275*	909*	279*	23,3718*	33	27	0,06018*	819*	0,06029*	16,5874*
304*	907	308*	23,2137*	32	28	047*	817	058*	16,5075*
333*	906	337*	23,0577*	31	29	076*	815	087	16,4283
362*	905*	366	22,9038*	30	30	105*	813	116	16,3499*
0,04391	0,99904*	0,04395	22,7519*	29	31	0,06134*	0,99812*	0,06145	16,2722*
420	902	424	22,6020	28	32	163*	810*	175*	16,1952
449	901*	454*	22,4541*	27	33	192*	808	204*	16,1190*
478	900*	483*	22,3081*	26	34	221*	806	233	16,0435*
507	898	512*	22,1640*	25	35	250	804	262	15,9687*
536	897	541*	22,0217	24	36	279	803*	291	15,8945
565	896*	570	21,8813*	23	37	308	801*	321*	15,8211
594	894	599	21,7426*	22	38	337	799	350*	15,7483
623	893	628	21,6056	21	39	366	797	379	15,6762
653*	892*	658*	21,4704	20	40	395	795	408	15,6048*
0,04682*	0,99890	0,04687*	21,3369	19	41	0,06424	0,99793	0,06438*	15,5340*
711*	889*	716*	21,2049	18	42	453	792*	467*	15,4638
740*	888*	745	21,0747*	17	43	482	790*	496*	15,3943*
769*	886	774*	20,9460*	16	44	511	788*	525	15,3254*
798*	885*	803	20,8188	15	45	540	786*	554	15,2571*
827*	883	833*	20,6932	14	46	569	784*	584*	15,1893
856*	882	862*	20,5691	13	47	598	782	613*	15,1222
885*	881*	891*	20,4465*	12	48	627	780	642*	15,0557
914	879	920*	20,3253	11	49	656	778	671	14,9898*
943	878*	949	20,2056	10	50	685	776	700	14,9244
0,04972	0,99876	0,04978	20,0872*	9	51	0,06714	0,99774	0,06730*	14,8596
0,05001	875*	0,050071	19,9702	8	52	743	772	759*	14,7954*
030	873	037*	19,8546*	7	53	773*	770	788	14,7317*
059	872*	066*	19,7403*	6	54	802*	768	817	14,6685
088	870	095*	19,6273*	5	55	831*	766	847*	14,6059
117	869*	124	19,5156*	4	56	860*	764	876*	14,5438
146	867	153	19,4051	3	57	889*	762	905*	14,4823*
175	866*	182	19,2959	2	58	918*	760	934	14,4212
205*	864	212*	19,1879	1	59	947*	758	963	14,3607*
234*	863*	241*	19,0811	0	60	976*	756	993*	14,3007*
Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'		Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.
87°						86°			

4°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,06976*	0,99756	0,06993*	14,3007*	60
1	0,07005*	754	0,07022*	2411	59
2	034*	752	051	1821*	58
3	063*	750	080	1235	57
4	092*	748	110*	0655*	56
5	121*	746	139*	0079*	55
6	150*	744	168	13,9507	54
7	179*	742*	197	8940	53
8	208*	740*	227*	8378	52
9	237*	738*	256*	7821*	51
10	266*	736*	285	7267	50
11	0,07295*	0,99734*	0,07314	13,6719*	49
12	324*	731	344*	6174	48
13	353*	729	373*	5634*	47
14	382*	727	402	5098*	46
15	411*	725	441	4566	45
16	440*	723*	461*	4039*	44
17	469*	721*	490*	3515	43
18	498*	719*	519	2996*	42
19	527*	716	548	2480	41
20	556*	714	578*	1969*	40
21	0,07585*	0,99712*	0,07607*	13,1461	39
22	614*	710*	636	0958*	38
23	643*	708*	665	0458*	37
24	672*	705	695*	12,9962*	36
25	701*	703	724*	9469	35
26	730*	701*	753	8981	34
27	759*	699*	782	8496*	33
28	788*	696	812*	8014	32
29	817*	694	841*	7536	31
30	846*	692*	870	7062	30
31	0,07875*	0,99689	0,07899	12,6591	29
32	904*	687	929*	6124*	28
33	933*	685*	958*	5660*	27
34	962*	683*	987	5199	26
35	991*	680	0,08017*	4742	25
36	0,08020*	678*	046*	4288	24
37	049*	676*	075	3838*	23
38	078*	673	104	3390	22
39	107*	671*	134*	2946	21
40	136*	668	163*	2505	20
41	0,08165*	0,90666	0,08192	12,2067	19
42	194*	664*	221	1632	18
43	223*	661	251*	1201*	17
44	252*	659*	280	0772*	16
45	281*	657*	309	0346	15
46	310*	654	339*	11,9923	14
47	339*	652*	368*	9504*	13
48	368*	649	397	9087*	12
49	397*	647*	427*	8673*	11
50	426*	644	456*	8262*	10
51	0,08455*	0,99642*	0,08485	11,7853	9
52	484*	639	514	7448*	8
53	513*	637	544*	7045	7
54	542*	635*	573	6645*	6
55	571*	632	602	6248*	5
56	600*	630*	632*	5853*	4
57	629*	627	661*	5461*	3
58	658*	625*	690	5072*	2
59	687*	622	720*	4685*	1
60	716*	619	749*	4301*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
85°					

5°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,08716*	0,99619	0,08749*	11,4301*	60
1	745*	617*	778	3919*	59
2	774*	614	807	3540*	58
3	803*	612*	837*	3163	57
4	831	609	866	2789*	56
5	860	607*	895	2417	55
6	889	604	925*	2048*	54
7	918	602*	954	1681*	53
8	947	599*	983	1316	52
9	976	596	0,09013*	0954	51
10	0,09005	594*	042	0594	50
11	0,09034	0,90591	0,09071	11,0237*	49
12	063	588	101*	10,9881*	48
13	092	586*	130	9529*	47
14	121	583	159	9178*	46
15	150	580	189*	8829	45
16	179	578*	218	8483*	44
17	208	575	247	8139*	43
18	237	572	277*	7797*	42
19	266	570*	306	7457*	41
20	295*	567	335	7119	40
21	0,09324*	0,99564	0,09365*	10,6783	39
22	353*	562*	394	6450*	38
23	382*	559*	423	6118	37
24	411*	556	453*	5789*	36
25	440*	553	482	5462*	35
26	469*	551*	511	5136	34
27	498*	548*	541*	4813*	33
28	527*	545	570	4491	32
29	556*	542	600*	4172*	31
30	585*	540*	629*	3854*	30
31	0,09614*	0,99537*	0,09658	10,3538	29
32	642	534	688*	3224	28
33	671	531	717	2913*	27
34	700	528	746	2602	26
35	729	526*	776*	2294	25
36	758	523*	805	1988*	24
37	787	520*	834	1683	23
38	816	517	864*	1381*	22
39	845	514	893	1080*	21
40	874	511	923*	0780	20
41	0,09903	0,99508	0,09952*	10,0483	19
42	932*	506*	981	0187	18
43	961*	503*	0,10011*	9,9893	17
44	990*	500*	040	9601*	16
45	0,10019*	497*	069	9310	15
46	048*	494*	099*	9021	14
47	077*	491	128	8734*	13
48	106*	488	158*	8448	12
49	135*	485	187	8164	11
50	164*	482	216	7882*	10
51	0,10192	0,93479	0,10246*	9,7601*	9
52	221	476	275	7322*	8
53	250	473	305*	7044	7
54	279	470	334*	6768	6
55	308	467	363	6493	5
56	337	464	393*	6220	4
57	366	461	422	5949	3
58	395*	458	452*	5679	2
59	424*	455	481	5411*	1
60	453*	452	510	5144*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
84°					

6°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,10453*	0,99452	0,10510	9,51436	60
1	482*	449	540*	9,48781	59
2	511*	446	569	6141	58
3	540*	443	599*	3515	57
4	569*	440*	628	0904*	56
5	597	437*	657	9,38307*	55
6	626	434*	687*	5724*	54
7	655	431*	716	3155*	53
8	684	428*	746*	0599	52
9	713	424	775	8058	51
10	742	421	805*	9,25530	50
11	0,10771	0,99418	0,10834	9,23016	49
12	800*	415	863	9,20516*	48
13	829*	412*	893*	9,18028	47
14	858*	409*	922	5554	46
15	887*	406*	952*	3093	45
16	916*	402	981	0646*	44
17	945*	399	0,11011*	9,08211*	43
18	973	396	040*	5789*	42
19	0,11002	393*	070*	3379	41
20	031	390*	099*	0983*	40
21	0,11060	0,99386	0,11128	8,98598	39
22	089	383	158*	6227*	38
23	118*	380	187	3867	37
24	147*	377*	217*	1520	36
25	176*	374*	246	9185	35
26	205*	370	276*	6862	34
27	234*	367	305	4551	33
28	263*	364*	335*	2252*	32
29	291	360	364	8,79964	31
30	320	357	394*	7689*	30
31	0,11349	0,99354*	0,11423	8,75425*	29
32	378	351*	452	3172*	28
33	407	347	482*	0931*	27
34	436*	344*	511	8,68701*	26
35	465*	341*	541*	6482	25
36	494*	337	570	4275*	24
37	523*	334*	600*	2078	23
38	552*	331*	629	8,59893*	22
39	580	327	659*	7718	21
40	609	324*	688	5555*	20
41	0,11638	0,99320	0,11718*	8,53402*	19
42	667	317	747	1259	18
43	696*	314*	777*	8,49128*	17
44	725*	310	806	7007*	16
45	754*	307*	836*	4896*	15
46	783*	303	865	2795	14
47	812*	300*	895*	0705	13
48	840	297*	924	8,38625	12
49	869	293	954*	6555	11
50	898	290*	983	4496*	10
51	0,11927	9,99286	0,12013*	8,32446*	9
52	956*	283*	042	0406*	8
53	985*	279	072*	8,28376*	7
54	0,12014*	276*	101	8,26355	6
55	043*	272	131*	4345*	5
56	071	269*	160	2344*	4
57	100	265	190*	0352	3
58	129	262*	219	0,18370	2
59	158	258	249*	6398*	1
60	187*	255*	278	4435*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
		83°			

7°				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0	0,12187*	0,99255*	0,12278	8,14435*
1	216*	251	308*	2481*
2	245*	248*	338*	0536*
3	274*	244*	367	8,08600
4	302	240	397*	6674*
5	331	237*	426	4756
6	360	233	456*	2848*
7	389	230*	485	0948
8	418*	226*	515*	7,99058*
9	447*	222	544	7176*
10	476*	219*	574*	5302
11	0,12504	0,99215	0,12603	7,93438*
12	533	211	633*	1582*
13	562	208*	662	7,89734*
14	591	204	692	7895*
15	620*	200	722*	6064
16	649*	197*	751	4242*
17	678*	193	781*	2428*
18	706	189	810*	0622
19	735	186*	840*	7,78825*
20	764	182	869	7035
21	0,12793	0,99178	0,12899	7,75254*
22	822*	175*	929*	3480
23	851*	171*	958	1715*
24	880*	167	988*	7,69957
25	908	163	0,13017	8208*
26	937	160*	047*	6466*
27	966	156*	076	4732*
28	995*	152	106	3006
29	0,13024*	148	136*	1287*
30	053*	144	165	7,59575
31	9,13081	0,99141*	0,13195*	7,57872*
32	110	137*	224	6176*
33	139	133	254	4487*
34	168*	129	284*	2806*
35	197*	125	313	1132*
36	226*	122*	343*	7,49465
37	254	118*	372	7806*
38	283	114*	402	6154*
39	312	110*	432*	4509*
40	341*	106	461	2871*
41	0,13370*	0,99102	0,13491*	7,41240*
42	399*	098	521*	7,39616*
43	427	094	550	7999
44	456	091*	580*	6389
45	485	087*	609	4786
46	514*	083*	639	3190*
47	543*	079*	669*	1600
48	572*	075*	698	0018*
49	600	071*	728*	7,28442*
50	629	067*	758*	6873*
51	0,13658	063*	0,13787	7,25310*
52	687*	059*	817*	3754*
53	716*	055*	846	2204
54	744	051*	876	0661
55	773	047*	906*	7,19125*
56	802	043*	935	7594
57	831*	039*	965	6071*
58	860*	035*	995*	4553
59	889*	031*	0,14024	3042*
60	917	027*	054	1537*
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.
		82°		

8°				
Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0,13917*	0,99027*	0,14054	7,11537*	60
946	023*	084*	0038	59
975*	019*	113	7,08546*	58
0,14004*	015*	143	7059	57
033*	011*	173*	5579	56
061	006	202	4105*	55
090	002	232	2637*	54
119*	0,98998	262*	1174	53
148*	994	291	6,99718	52
177*	990	321	8268*	51
205	986*	351*	6823	50
0,14234	0,98982*	0,14381*	6,95385*	49
263*	978*	410	3952*	48
292*	973	440*	2525*	47
320	969	470*	1104*	46
349	965	499	6,89688*	45
378	961*	529	8278	44
407*	957*	559*	6874*	43
436*	953*	588	5475	42
464	948	618	4082*	41
493	944	648*	2694	40
0,14522*	0,98940*	0,14678*	6,81312	39
551*	936*	707	6,79936*	38
580*	931	737*	8564	37
608	927	767*	7199*	36
637	923*	796	5838	35
666*	919*	826	4483	34
695*	914	856*	3133	33
723	910	886*	1789*	32
752	906*	915	0450*	31
781*	902*	945	6,69116*	30
0,14810*	0,98897	0,14975*	6,67787*	29
838	893*	0,15005*	6463	28
867	889*	034	5144	27
896	884	064	3831	26
925*	880*	094*	2523*	25
954*	876*	124*	1219	24
982	871	153	6,59921*	23
0,15011	867*	183	8627	22
040*	863*	213*	7339*	21
069*	858	243*	6055	20
0,15097	0,98854*	0,15272	6,54777*	19
126	849	302	3503*	18
155*	845*	332*	2234*	17
184*	841*	362*	0970*	16
212	836	391	6,49710	15
241	832*	421	8456*	14
270*	827	451	7206*	13
299*	823*	481*	5961*	12
327	818	511*	4720	11
356	814*	540	3484	10
0,15385*	0,98809	0,15570	6,42253	9
414*	805*	600*	1026	8
442	800	630*	6,39804	7
471	796*	660*	8587*	6
500*	791	689	7374*	5
529*	787*	719	6165	4
557	782	749	4961*	3
586*	778*	779*	3761	2
615*	773	809*	2566	1
643	769*	838	1375	0
Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
81°				

	9°				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,15643	0,98769*	0,15838	6,31375	60
1	672	764	868	0189*	59
2	701*	760*	898	6,39007*	58
3	730*	755	928*	7829*	57
4	758	751*	958*	6655	56
5	787	746*	988*	5486*	55
6	816*	741	0,16017	4321*	54
7	845*	737*	047	3160	53
8	873	732	077	2003	52
9	902*	728*	107*	0851	51
10	931*	723*	137*	6,19703*	50
11	0,15959	0,98718	0,16167*	6,18559*	49
12	988	714*	196	7419*	48
13	0,16017*	709*	226	6283*	47
14	046*	704	256	5151*	46
15	074	700*	286	4023	45
16	103*	695*	316*	2899	44
17	132*	690	346*	1779	43
18	160	686*	376*	0664*	42
19	189	681*	405	6,09552*	41
20	218*	676	435	8444*	40
21	0,16246	0,98671	0,16465	6,07340*	39
22	275	667*	495	6240*	38
23	304*	662*	525	5143	37
24	333*	657	555*	4051	36
25	361	652	585*	2962	35
26	390*	648*	615*	1878*	34
27	419*	643*	645*	0797*	33
28	447	638	674	5,99720*	32
29	476	633	704	8646	31
30	505*	629*	734	7576	30
31	0,16533	0,98624*	0,16764	5,96510	29
32	562	619*	794	5448	28
33	591*	614	824*	4390*	27
34	620*	609	854*	3335*	26
35	648	604	884*	2283	25
36	677*	600*	914*	1236*	24
37	706*	595*	944*	0191	23
38	734	590*	974*	5,89151*	22
39	763*	585	0,17004*	8114*	21
40	792*	580	033	7080*	20
41	9,16820	0,98575	0,17063	5,86051*	19
42	849*	570	093	5024	18
43	878*	565	123	4001	17
44	906	561*	153	2982*	16
45	935*	556*	183	1966*	15
46	964*	551*	213	0953	14
47	992	546*	243	5,79944	13
48	0,17021*	541*	273	8938	12
49	050*	536*	303*	7936*	11
50	078	531*	333*	6937*	10
51	0,17107*	0,98526*	0,17363*	5,75941	9
52	136*	521*	393*	4949*	8
53	164	516*	423*	3960*	7
54	193*	511*	453*	2974	6
55	222*	506*	483*	1992*	5
56	250	501*	513*	1013*	4
57	279*	496*	543*	0037*	3
58	308*	491*	573*	5,69064*	2
59	336	486*	603*	8094	1
60	365*	481*	633*	7128	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
	80°				

10°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,17365*	0,98481*	0,17633*	5,67128	60
1	393	476*	663*	6165	59
2	422	471*	693*	5205	58
3	451*	466*	723*	4248	57
4	479	461*	753*	3295*	56
5	508	455	783	2344	55
6	537*	450	813*	1397*	54
7	565	445	843*	0452	53
8	594*	440	873*	5,59511	52
9	623*	435*	903*	8573	51
10	651	430*	933*	7638*	50
11	0,17680*	0,98425*	0,17963*	5,56706*	49
12	708	420*	993*	5777*	48
13	737	414	0,18023*	4851*	47
14	766*	409	053*	3927	46
15	794	404	083*	3007	45
16	823*	399*	113*	2090	44
17	852*	394*	143	1176*	43
18	880	389*	173	0264	42
19	909*	383	203	5,49356	41
20	937	378	233	8451*	40
21	0,17966	0,98373*	0,18263	5,47548*	39
22	995*	368*	293	6648	38
23	0,18023	362	323	5751	37
24	052*	357	353	4857	36
25	081*	352*	384*	3966*	35
26	109	347*	414*	3078*	34
27	138*	341	444*	2192*	33
28	166	336	474*	1309	32
29	195*	331*	504*	0429	31
30	224*	325	534*	5,39552*	30
31	0,18252	0,98320	9,18564*	5,88677	29
32	281*	315*	594	7805	28
33	309	310*	624	6936	27
34	338*	304	654	6070*	26
35	367*	299*	684	5206	25
36	395	294*	714	4345	24
37	424*	288	745*	3487*	23
38	452	283*	775*	2631	22
39	481*	277	805*	1778	21
40	509	272	835*	0928*	20
41	0,18538	0,98267*	0,18865	5,30080	19
42	567*	261	895	5,29235	18
43	595	256*	925	8393*	17
44	624*	250	955	7553*	16
45	652	245	986*	6715	15
46	681*	240*	0,19016*	5880	14
47	710*	234	046*	5048	13
48	738	229*	076	4218	12
49	767*	223	106	3391	11
50	795	218*	136	2566	10
51	0,18824*	0,98212	0,19166	5,21744*	9
52	852	207*	197*	0925	8
53	881*	201	227*	0107*	7
54	910*	196*	257*	5,19293	6
55	938	190	287	8480	5
56	967*	185*	317	7671*	4
57	995	179	347	6863	3
58	0,19024*	174*	378*	6058	2
59	052	168	408*	5256*	1
60	081*	163*	438	4455	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
79°					

11°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,19081*	0,98163*	0,19438	5,14455	60
1	109	157	468	3658*	59
2	138	152*	498	2862	58
3	167*	146	529*	2069	57
4	195	140	559*	1279*	56
5	224*	135*	589	0490	55
6	252	129	619	9704	54
7	281*	124*	649	8921*	53
8	309	118	680*	8139	52
9	338*	112	710*	7360	51
10	366	107*	740	5,06584*	50
11	0,19395*	0,98101	0,19770	5,05809	49
12	423	096*	801*	5037*	48
13	452*	090*	831*	4267*	47
14	481*	084	861*	3499	46
15	509	079*	891	2734*	45
16	538*	073*	921	1971*	44
17	566	067	952*	1210*	43
18	595*	061	982*	0451	42
19	623	056*	0,20012	4,99695*	41
20	652*	050	042	8940	40
21	0,19680	0,98044	0,20073*	4,98188	39
22	709*	039*	103	7438	38
23	737	033*	133	6690	37
24	766*	027	164*	5945*	36
25	794	021	194*	5201	35
26	823*	016*	224	4460*	34
27	851	010*	254	3721*	33
28	880*	004	285*	2984*	32
29	908	0,97998	315*	2249*	31
30	937*	992	345	1516*	30
31	0,19965	0,97987*	0,20376*	4,90785*	29
32	994*	981*	406*	0056	28
33	0,20022	975	436	4,89330*	27
34	051*	969	466	8606*	26
35	079	963	497*	7882	25
36	108*	958*	527	7162	24
37	136	952*	557	6444*	23
38	165*	946*	588*	5727	22
39	193	940*	618	5013*	21
40	222*	934	648	4300	20
41	0,20250	0,97928	0,20679*	4,83590	19
42	279*	922	709	2882*	18
43	307	916	739	2175	17
44	336*	910	770*	1471*	16
45	364	905*	800	0769*	15
46	393*	899*	830	0068	14
47	421	893*	861*	9370*	13
48	450*	887*	891	8673*	12
49	478	881*	921	7978	11
50	507*	875*	952*	4,77286*	10
51	0,20535	0,97869*	0,20982	4,76595*	9
52	563	863*	0,21013*	5906	8
53	592*	857*	043*	5219	7
54	620	851*	073	4534	6
55	649*	845*	104*	3851*	5
56	677	839*	134	3170*	4
57	706*	833*	164	2490	3
58	734	827*	195*	1813*	2
59	763*	821*	225	1137*	1
60	791	815*	256*	0463	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
78°					

12°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,20791	0,97815*	0,21256*	4,70463	60
1	820*	809*	286	4,69791*	59
2	848	803*	316	9121*	58
3	877*	797*	347*	8452	57
4	905*	790*	377	7786*	56
5	933	784	408*	7121	55
6	962*	778	438	6458	54
7	990	772	469	5797	53
8	0,21019*	766	499	5138*	52
9	047	760*	529*	4480	51
10	076*	754*	560*	3825*	50
11	0,21104	0,97748*	0,21590	4,63171*	49
12	132	742*	621*	2518	48
13	161*	735	651	1868*	47
14	189	729	682*	1219	46
15	218*	723	712	0572	45
16	246	717*	743*	4,59927*	44
17	275*	711*	773	9283	43
18	303	705*	804*	8641	42
19	331	698	834*	8001	41
20	360*	692	864	7363*	40
21	0,21388	0,97686*	0,21895*	4,56726	39
22	417*	680*	925	6091	38
23	445	673	956*	5458*	37
24	474*	667	986	4829	36
25	502*	661*	0,22017*	4196	35
26	530	655*	047	3568*	34
27	559*	648	078*	2941	33
28	587	642	108	2316	32
29	616*	636*	139*	1693*	31
30	644*	630*	169	1071*	30
31	0,21672	0,97623	0,22200*	4,50451*	29
32	701*	617*	231*	4,49832	28
33	729	611*	261	9215	27
34	758*	604	292*	8600	26
35	786*	598	322	7986	25
36	814	592*	353*	7374	24
37	843*	585	383	6764*	23
38	871	579*	414*	6155*	22
39	899	573*	444	5548*	21
40	928*	566	475*	4942*	20
41	0,21956	0,97560*	0,22505	4,44338*	19
42	985*	553	536*	3735*	18
43	0,22013*	547	567*	3134*	17
44	041	541*	597	2534	16
45	070*	534	628*	1936	15
46	098	528*	658	1340*	14
47	126	521	689*	0745	13
48	155*	515*	719	0152*	12
49	183	508	750	4,39560*	11
50	212*	502	781*	8969	10
51	0,22240*	0,97496*	0,22811	4,38381*	9
52	268	489	842*	7793	8
53	297*	483*	872	7207	7
54	325	476	903	6623*	6
55	353	470*	934*	6040	5
56	382*	463	964	5459*	4
57	410	457*	995*	4879*	3
58	438	450	0,23026*	4300	2
59	467*	444*	054*	3723	1
60	495	437	087*	3148*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

77°

13°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,22495	0,97437	0,23087*	4,33148*	60
1	523	430	117	2573	59
2	552*	424*	148	2001*	58
3	580	417	179*	1430*	57
4	608	411*	209	0860*	56
5	637*	404	240	0291	55
6	665	398*	271*	4,29724	54
7	693	391*	301	9159*	53
8	722*	384	332	8595*	52
9	750	378*	363*	8032*	51
10	778	371	393	7471*	50
11	0,22807*	0,97365*	0,23424	4,26911*	49
12	835	358*	455*	6352	48
13	863	351	485	5795	47
14	892*	345*	516	5239	46
15	920	338*	547*	4685*	45
16	948	331	578*	4132*	44
17	977*	325*	608	3580	43
18	0,23005*	318*	639*	3030*	42
19	033	311	670*	2481*	41
20	062*	304	700	1933	40
21	0,23090*	0,97298*	0,23731	4,21387*	39
22	118	291	762*	0842*	38
23	146	284	793*	0298	37
24	175*	278*	823	4,19756	36
25	203	271*	854	9215	35
26	231	264	885*	8675	34
27	260*	257	916*	8137	33
28	288*	251*	946	7600	32
29	316	244*	977	7064	31
30	345*	237*	0,24008*	6530*	30
31	0,23373*	0,97230	0,24039*	4,15997*	29
32	401	223	069	5465	28
33	429	217*	100	4934	27
34	458*	210*	131*	4405	26
35	486*	203*	162*	3877	25
36	514	196	193*	3350	24
37	542	189	223	2825*	23
38	571*	182	254	2301*	22
39	599	176*	285*	1778*	21
40	627	169*	316*	1256	20
41	0,23656*	0,97162*	0,24347*	4,10736*	19
42	684*	155*	377	0216	18
43	712	148	408	4,09699*	17
44	740	141	439	9182*	16
45	769*	134	470*	8666	15
46	797*	127	501*	8152*	14
47	825	120	532*	7639*	13
48	853	113	562	7127	12
49	882*	106	593	6616	11
50	910*	100*	624	6107	10
51	0,23938	0,97093*	8,24655*	4,05599*	9
52	966	086*	686*	5092*	8
53	995*	079*	717*	4586*	7
54	0,24023*	072*	747	4081	6
55	051	065*	778	3578*	5
56	079	058*	809	3076*	4
57	108*	051*	840	2574	3
58	136*	044*	871	2074	2
59	164*	037*	902*	1576*	1
60	192	030*	933*	1078	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

76°

14°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,24192	0,97030*	0,24933*	4,01078	60
1	220	023*	964*	0582*	59
2	249*	015	995*	0086	58
3	277*	008	0,25026*	3,99592	57
4	305	001	056	9099	56
5	333	0,96994	087	8607	55
6	362*	987	118	8117*	54
7	390*	980	149	7627	53
8	418*	973	180	7139*	52
9	446	966*	211	6651	51
10	474	959*	242*	6165	50
11	9,24503*	0,96952*	0,25273*	3,95680	49
12	531*	945*	304*	5196	48
13	559*	937	335*	4713	47
14	587	930	366*	4232*	46
15	615	923	397*	3751*	45
16	644*	916*	428*	3271	44
17	672*	909*	459*	2793*	43
18	700*	902*	490*	2316*	42
19	728	894	521*	1839	41
20	756	887	552*	1364	40
21	0,24784	0,96880*	0,25583*	3,90890	39
22	813*	873*	614*	0417	38
23	841*	866*	645*	3,89945	37
24	869*	858	676*	9474	36
25	897	851	707*	9004	35
26	925	844*	738*	8536*	34
27	954*	837*	769*	8068	33
28	982*	829	800*	7601	32
29	0,25010*	822	831*	7136*	31
30	038	815*	862*	6671	30
31	0,25066	0,96807	0,25893*	3,86208*	29
32	094	800	924*	5745	28
33	122	793*	955*	5284*	27
34	151*	786*	986*	4824*	26
35	179*	778	0,26017*	4364	25
36	207*	771*	048	3906*	24
37	235	764*	079	3449*	23
38	263	756	110	2992	22
39	291	749*	141	2537	21
40	320*	742*	172	2083*	20
41	0,25348*	0,96734	0,26203	3,81630*	19
42	376*	727*	235*	1177	18
43	404*	719	266*	0726	17
44	432	712*	297*	0276*	16
45	460	705*	328*	3,79827*	15
46	488	697	359*	9378	14
47	516	690*	390	8931	13
48	545*	682	421	8485*	12
49	573*	675*	452	8040*	11
50	601*	667	483	7595	10
51	0,25629*	0,96660	0,26515*	3,77152*	9
52	657	653*	546*	6709	8
53	685	645	577*	6268	7
54	713	638*	608*	5828*	6
55	741	630	639	5388	5
56	769	623*	670	4950*	4
57	798*	615	701	4512	3
58	826*	608*	733*	4075	2
59	854*	600	764*	3640*	1
60	882*	593*	795*	3205	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
75°					

15°				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0	0,25882*	0,96593*	0,26795*	3,73205
1	910	585	826	2771
2	938	578*	857	2338
3	966	570*	888	1907*
4	994	562	920*	1476*
5	0,26022	555*	951*	1046*
6	050	547	982	0616
7	079*	540*	0,27013	0188
8	107*	532	044	3,69761
9	135*	524	076*	9335*
10	163*	517*	107*	8909
11	0,26191*	0,96509	0,27138	3,68485*
12	219*	502*	169	8061
13	247*	494	201*	7638
14	275	486	232*	7217*
15	303	479*	263	6796*
16	331	471	294	6376*
17	359	463	326*	5957*
18	387	456*	357*	5538
19	415	448	388	5121
20	443	440	419	4705*
21	0,26471	0,96433*	0,27451*	3,64289
22	500*	425*	482	3874
23	528*	417	513	3461*
24	556*	410*	545*	3048*
25	584*	402*	576*	2636*
26	612*	394	607	2224
27	640*	386	638	1814
28	668*	379*	670*	1405*
29	696*	371*	701	0996
30	724*	363	732	0588
31	0,26752*	0,96355	0,27764*	3,60181
32	780*	347	795	3,59775
33	808*	340*	826	9370
34	836*	332*	858*	8966*
35	864*	324	889	8562
36	892*	316	921*	8160*
37	920*	308	952*	7758*
38	948	301*	983	7357*
39	976	293*	0,28015*	6957*
40	0,27004	285*	046*	6557
41	0,27032	0,96277	0,28077	3,56159
42	060	269	109*	5761
43	088	261	140	5364
44	116	253	172*	4968
45	144	246*	203*	4573
46	172	238*	234	4179*
47	200	230*	266*	3785
48	228	222*	297	3393*
49	256	214*	329*	3001*
50	284*	206*	360*	2609
51	0,27312*	0,96198	0,28391	3,52219
52	340*	190	423*	1829
53	368*	182	454	1441*
54	396*	174	486*	1053*
55	424*	166	517	0666*
56	452*	158	549*	0279
57	480*	150	580	3,49894*
58	508*	142	612*	9509*
59	536*	134	643	9125*
60	564*	126	675*	8741
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.
74°				

16°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,27564*	0,96126	0,28675*	3,48741	60
1	592*	118	706	8359*	59
2	620*	110	738*	7977	58
3	648*	102	769	7596	57
4	676*	094	801*	7216	56
5	704*	086*	832	6837*	55
6	731	078*	864*	6458	54
7	759	070*	895	6081	53
8	787	062*	927*	5703	52
9	815	054*	958	5327*	51
10	843	046*	990*	4951	50
11	0,27871	0,96037	0,29021	3,44576	49
12	899	029	053*	4202	48
13	927	021	084	3829*	47
14	955*	013	116*	3456	46
15	983*	005*	147	3084	45
16	0,28011*	0,95997*	179*	2713	44
17	039*	989*	210	2343*	43
18	067*	981*	242	1973	42
19	095*	972	274*	1604	41
20	123*	964	305	1236	40
21	0,28150	0,95956*	0,29337*	3,40869*	39
22	178	948*	368	0502	38
23	206	940*	400*	0136	37
24	234	931	432*	3,39771*	36
25	262	923	463	9406	35
26	290*	915*	495*	9042	34
27	318*	907*	526	8679	33
28	346*	898	558	8317*	32
29	374*	890	590*	7955	31
30	402*	882*	621	7594	30
31	0,28429	0,95874*	0,29653*	3,37234	29
32	457	865	685*	6875*	28
33	485	857	716	6516*	27
34	513	849*	748*	6158*	26
35	541*	841*	780*	5800	25
36	569*	832	811	5443	24
37	597*	824*	843*	5087	23
38	625*	816*	875*	4732*	22
39	652	807	906	4377	21
40	680	799*	938	4023	20
41	0,28708	0,95791*	0,29970*	3,33670*	19
42	736	782	0,30001	3317	18
43	764*	774*	033	2965	17
44	792*	766*	065*	2614	16
45	820*	757	097*	2264*	15
46	847	749*	128	1914*	14
47	875	740	160	1565*	13
48	903	732*	192*	1216*	12
49	931	724*	224*	0868	11
50	959*	715	255	0521*	10
51	0,28987*	0,95707*	0,30287	3,30174	9
52	0,29015*	698	319*	3,29829*	8
53	042	690*	351*	9483	7
54	070	681	382	9139*	6
55	098	673*	414	8795*	5
56	126*	664	446*	8452*	4
57	154*	656*	478*	8109	3
58	182*	647	509	7767	2
59	209	639*	541	7426*	1
60	237	630	573	7085	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
73°					

17°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	60
1	265*	622*	605*	6745	59
2	293*	613	637*	6406*	58
3	321*	605*	669*	6067	57
4	348	596	700	5729	56
5	376	588*	732	5392*	55
6	404	579	764	5055	54
7	432*	571*	796*	4719*	53
8	460*	562	828*	4383	52
9	487	554*	860*	4049*	51
10	515	545	891	3714	50
11	0,29543	0,95536	0,30923	3,23381*	49
12	571*	528*	955	3048*	48
13	599*	519	987	2715	47
14	626	511*	0,31019*	2384*	46
15	654	502*	051*	2053*	45
16	682*	493	083*	1722	44
17	710*	485*	115*	1392	43
18	737	476	147*	1063	42
19	765	467*	178	0734	41
20	793	459*	210	0406	40
21	0,29821*	0,95450	0,31242	3,20079*	39
22	849*	441	274	3,19752	38
23	876	433*	306	9426*	37
24	904	424	338	9100	36
25	932*	415	370	8775	35
26	960*	407*	402	8451	34
27	987	398*	434*	8127	33
28	0,30015	389	466*	7804	32
29	043*	380	498*	7481	31
30	071*	372*	530*	7159	30
31	0,30098	0,95363*	0,31562*	3,16838	29
32	126	354	594*	6517	28
33	154*	345	626*	6197	27
34	182*	337*	658*	5877	26
35	209	328*	690*	5558	25
36	237*	319	722*	5240*	24
37	265*	310	754*	4922	23
38	292	301	786*	4605*	22
39	320	293*	818*	4288	21
40	348*	284*	850*	3972*	20
41	0,30376*	0,95275*	0,31882	3,13656	19
42	403	266	914	3341	18
43	431	257	946	3027	17
44	459*	248	978	2713	16
45	486	240*	0,32010	2400*	15
46	514	231*	042	2087	14
47	542*	222*	074	1775	13
48	570*	213*	106	1464*	12
49	597	204	139*	1153*	11
50	625*	195	171*	0842	10
51	0,30653*	0,95186	0,32203*	3,10532	9
52	680	177	235*	0223*	8
53	708*	168	267*	3,09914	7
54	736*	159	299	9606*	6
55	763	150	331	9298	5
56	791	142*	363	8991	4
57	819*	133*	396*	8685*	3
58	846	124*	428*	8379*	2
69	874	115*	460*	8073	1
60	902*	106*	492*	7768	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
72°					

18°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,30902*	0,95106*	0,32492*	3,07768	60
1	929	097*	524	7464	59
2	957	088*	556	7160	58
3	985*	079*	588	6857*	57
4	0,31012	070*	621*	6554	56
5	040*	061*	653*	6252	55
6	068*	052*	685	5950	54
7	095	043*	717	5649	53
8	123*	033	749	5349*	52
9	151*	024	782*	5049*	51
10	178	015	814*	4749	50
11	0,31206*	0,95006	0,32846	3,04450	49
12	233*	0,94997	878	4152*	48
13	261	988	911*	3854*	47
14	289*	979	943*	3556	46
15	316	970*	975	3260*	45
16	344	961*	0,33007	2963	44
17	372*	952*	040*	2667	43
18	399	943*	072*	2372	42
19	427*	933	104	2077	41
20	454	924	136	1783	40
21	0,31482	0,94915	0,33169*	3,01489	39
22	510*	906*	201*	1196	38
23	537	897*	233	0903	37
24	565*	888*	266*	0611	36
25	593*	878	298*	0319	35
26	620	869	330	0028	34
27	648*	860	363*	2,99738*	33
28	675	851*	395*	9447	32
29	703*	842*	427	9158*	31
30	730	832	460*	8868	30
31	0,31758	0,94823	0,33492*	2,98580*	29
32	786*	814*	524	8292*	28
33	813	805*	557*	8004*	27
34	841*	795	589*	7717*	26
35	868	786	621	7430	25
36	896*	777*	654*	7144*	24
37	923	768*	686	6858	23
38	951	758	718	6573	22
39	979*	749*	751*	6288	21
40	0,32006	740*	783	6004	20
41	0,32034*	0,94730	0,33816*	2,95721*	19
42	061	721	848	5437	18
43	089*	712*	881*	5155*	17
44	116	702	913*	4872	16
45	144*	693	945	4590	15
46	171	684*	978*	4309	14
47	199	674	0,34010	4028	13
48	227*	665*	043*	3748	12
49	254	656*	075	3468	11
50	282*	646	108*	3189*	10
51	0,32309	0,94637*	0,34140	2,92910*	9
52	337*	627	173*	2632*	8
53	364	618*	205	2354*	7
54	392*	609*	238*	2076	6
55	419	599	270	1799	5
56	447*	590*	303*	1523*	4
57	474	580	335	1246	3
58	502*	571*	368*	0971*	2
59	529	561	400	0696*	1
60	557*	552*	433*	0421	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
71°					

19°				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0	0,32557*	0,94552*	0,34433*	2,90421
1	584	542	465	0147*
2	612*	533*	498*	2,89873
3	639	523	530	9600*
4	667*	514*	563*	9327
5	694	504	596*	9055*
6	722*	495*	628	8783*
7	749	485	661*	8511
8	777*	476*	693	8240
9	804	466	726*	7970*
10	832*	457*	758	7700*
11	0,32859	0,94447	0,34791	2,87430
12	887*	438*	824*	7161*
13	914	428	856	6892
14	942*	418	889*	6624*
15	969	409*	922*	6356
16	997*	399	954	6089*
17	0,33024*	390*	987*	5822*
18	051	380	0,35020*	5555
19	079*	370	052	5289
20	106	361*	085*	5023
21	0,33134*	0,94351	0,35118*	2,84758
22	161	342*	150	4494*
23	189*	332*	183*	4229
24	216	322	216*	3965
25	244*	313*	248	3702
26	271*	303*	281*	3439*
27	298	293	314*	3176
28	326*	284*	346	2914
29	353	274*	379	2653*
30	381*	264	412*	2391*
31	0,33408	0,94254	0,35445*	2,82130
32	436*	245*	477	1870
33	463*	235*	510	1610
34	490	225	543*	1350
35	518*	215	576*	1091
36	545	206*	608	0833*
37	573*	196*	641	0574
38	600*	186	674*	0316
39	627	176	707*	0059
40	655*	167*	740*	2,79802*
41	0,33682	0,94157*	0,35772	2,79545
42	710*	147	805	9289
43	737*	137	838	9033
44	764	127	871*	8778
45	792*	118*	904*	8523
46	819	108*	937*	8269*
47	846	098*	969	8014
48	874*	088	0,36002	7761*
49	901	078	035	7507
50	929*	068	068*	7254
51	0,33956*	0,94058	0,36101*	2,77002*
52	983	049*	134*	6750*
53	0,34011*	039*	167*	6498
54	038*	029*	199	6247*
55	065	019*	232	5996
56	093*	009*	265	5746*
57	120*	0,93999	298	5495*
58	147	989	331	5246*
59	175*	979	364	4997*
60	202	969	397	4748*
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.
70°				

20°

Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0,34202	0,93969	0,36397	2,74748*	60
229	959	430*	4499	59
257*	949	463*	4251	58
284	939	496*	4004*	57
311	929	529*	3756	56
339*	919	562*	3509	55
366*	909	595*	3263*	54
393	899	628*	3017*	53
421*	889	661*	2771	52
448*	879	694*	2526*	51
475	869	727*	2281*	50
0,34503*	0,93859	0,36760*	2,72036	49
530*	849	793*	1792	48
557	839	826*	1548	47
584	829	859*	1305*	46
612*	819	892*	1062*	45
639*	809	925*	0819	44
666	799*	958	0577*	43
694*	789*	991	0335	42
721*	779*	0,37024	0094*	41
748	769*	057	2,69853*	40
0,34775	0,93759*	0,37090	2,69612*	39
803*	748	123	9371	38
830*	738	157*	9131	37
857	728	190*	8892*	36
884	718	223*	8653*	35
912*	708*	256*	8414*	34
939*	698*	289	8175	33
966	688*	322	7937	32
993	677	355	7700*	21
0,35021*	667	388	7462	30
0,35048*	0,93657	0,37422*	2,67225	29
075	647*	455*	6989*	28
102	637*	488*	6752	27
130*	626	521	6516	26
157*	616	554	6281*	25
184	606*	588*	6046*	24
211	596*	621*	5811*	23
239*	585	654*	5576	22
266*	575	687	5342	21
293	565*	720	5109*	20
0,35320	0,93555*	0,37754*	2,64875	19
347	544	787*	4642	18
375*	534	820	4410*	17
402*	524*	853	4177	16
429	514*	887*	3945	15
456	503	920*	3714*	14
484*	493*	953	3483*	13
511*	483*	986	3252*	12
538*	472	0,38020*	3021	11
565	462*	053	2791	10
0,35592	0,93452*	0,38086	2,62561	9
619	441	120*	2332*	8
647*	431*	153*	2103*	7
674*	420	186	1874	6
701*	410	220*	1646*	5
728	400*	253*	1418*	4
755	389	286	1190*	3
782	379*	320*	0963*	2
810*	368	353	0736*	1
837*	358	386	0509*	0
Cosin	Sin.	Cotang.	Tang.	'

69°

21°

'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,35837*	0,93358	0,38386	2,60509*	60
1	864*	348*	420*	0283*	59
2	891	337	453	0057*	58
3	918	327*	487*	2,59831*	57
4	945	316	520*	9606*	56
5	973*	306*	553	9381*	55
6	0,36000*	295	587*	9156	54
7	027*	285*	620	8932*	53
8	054*	274	654*	8708*	52
9	081	264*	687	8484	51
10	108	253	721*	8261*	50
11	0,36135	0,93243*	0,38754*	2,58038	49
12	162	232	787	7815	48
13	190*	222*	821*	7593	47
14	217*	211	854	7371	46
15	244*	201*	888*	7150*	45
16	271*	190	921	6928	44
17	298	180*	955*	6707	43
18	325	169	988	6487*	42
19	352	159*	0,39022*	6266	41
20	379	148*	055	6046	40
21	0,36406	0,93137	0,39089*	2,55827*	39
22	434*	127*	122	5608*	38
23	461*	116	156	5389*	37
24	488*	106*	190*	5170*	36
25	515*	095*	223	4952*	35
26	542*	084	257*	4734*	34
27	569*	074*	290	4516*	33
28	596*	063	324*	4299*	32
29	623	052	357	4082*	31
30	650	042*	391	3865*	30
31	0,36677	0,93031	0,39425*	2,53648	29
32	704	020	458	3432	28
33	731	010*	492*	3217*	27
34	758	0,92999	526*	3001	26
35	785	988	559	2786*	25
36	812	978*	593*	2571	24
37	839	967*	626	2357*	23
38	867*	956	660	2142	22
39	894*	945	694*	1929*	21
40	921*	935*	727	1715	20
41	0,36948*	9,92924	0,39761	2,51502*	19
42	975*	913	795*	1289*	18
43	0,37002*	902	829*	1076	17
44	029*	892*	862	0864*	16
45	056*	881*	896*	0652*	15
46	083*	870	930*	0440	14
47	110*	859	963	0229*	13
48	137*	849*	997	0018*	12
49	164*	838*	0,40031*	9807	11
50	191*	827*	065*	9597*	10
51	0,37218*	0,92816	0,40098	9386	9
52	245*	805	132	9177*	8
53	272*	794	166*	8967	7
54	299*	784*	200*	8758*	6
55	326*	773*	234*	8549*	5
56	353*	762*	267	8340	4
57	380*	751	301	8132*	3
58	407*	740	335*	7924*	2
59	434*	729	369*	7716	1
60	461*	718	403*	7509*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'

68°

22°

'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,37461*	0,92718	0,40403*	2,47509*	60
1	488*	707	436	7302*	59
2	515*	697*	470	7095*	58
3	542*	686*	504	6888	57
4	569*	675*	538	6682*	56
5	595	664*	572*	6476*	55
6	622	653*	606*	6270	54
7	649	642*	640*	6065*	53
8	676	631*	674*	5860*	52
9	703	620*	707	5655	51
10	730	609	741	5451*	50
11	0,37757	0,92598	0,40775	2,45246	49
12	784	587	809	5043*	48
13	811	576	843	4839*	47
14	838*	565	877	4636*	46
15	865*	554	911	4433*	45
16	892*	543	945	4230*	44
17	919*	532	979	4027	43
18	946*	521*	0,41013*	3825	42
19	973*	510*	047*	3623	41
20	999	499*	081*	3422*	40
21	0,38026	0,92488*	0,41115*	2,43220	39
22	053	477*	149*	3019	38
23	080	466*	183*	2819*	37
24	107	455*	217	2618	36
25	134*	444*	251	2418	35
26	161*	432	285	2218	34
27	188*	421	319	2019*	33
28	215*	410	353	1819	32
29	241	399	387	1620	31
30	268	388*	421	1421	30
31	0,38295	0,92377	0,41455	2,41223*	29
32	322	366*	490*	1025*	28
33	349*	355*	524*	0827*	27
34	376*	343	558*	0629	26
35	403*	332	592*	0432*	25
36	430*	321	626*	0235*	24
37	456	310*	660	0038*	23
38	483	299*	694	2,39841	22
39	510	287	728	9645*	21
40	537*	276	763*	9449*	20
41	0,38564*	0,92265	0,41797*	2,39253	19
42	591*	254*	831*	9058*	18
43	617	243*	865	8863*	17
44	644	231	899	8668*	16
45	671	220	933	8473*	15
46	698*	209*	968*	8279*	14
47	725*	198*	0,42002*	8084	13
48	752*	186	036	7891*	12
49	778	175	070	7697	11
50	805	164*	105*	7504*	10
51	0,38832*	0,92152	0,42139*	2,37311*	9
52	859*	141	173	7118*	8
53	886*	130*	207	6925	7
54	912	119*	242*	6733	6
55	939	107	276*	6541	5
56	966*	096*	310	6349	4
57	993*	085*	345*	6158	3
58	020*	073	379*	5967*	2
59	046	062*	413	5776*	1
60	073	050	447	5585	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'

67°

23°

'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585
1	100*	039	482*	5396*
2	127*	028*	516	5205*
3	153	016	551*	5015*
4	180	005*	585*	4825
5	207*	0,91994*	619	4635*
6	234*	982	654*	4447*
7	260	971*	688*	4258*
8	287	959	722	4069
9	314*	948*	757*	3881*
10	341*	936	791	3693*
11	0,39367	0,91925*	0,42826*	2,33505
12	394	914*	860	3317
13	421*	902	894	3130
14	448*	891*	929*	2943
15	474	879	963	2756
16	501	868*	998*	2570*
17	528*	856	0,43032	2383
18	555*	845*	067*	2197
19	581	833	101	2012*
20	608*	822*	136*	1826
21	0,39635*	0,91810	0,43170	2,31641*
22	661	799*	205*	1456*
23	688	787	239	1271*
24	715*	775	274*	1086
25	741	764*	308	0902
26	768	752	343*	0718
27	795*	741*	378*	0534
28	822*	729	412	0351*
29	848	718*	447*	0167
30	875*	706	481	2,29984
31	0,39902*	0,91694	0,43516*	2,29801
32	928	683*	550	9619*
33	955*	671	585	9437*
34	982*	660*	620*	9254
35	0,40008	648*	654	9073*
36	035*	636	689*	8891*
37	062*	625*	724*	8710*
38	088	613*	758	8528
39	115*	601	793*	8348*
40	141	590*	828*	8167*
41	0,40168	0,91578*	0,43862	2,27987*
42	195*	566	897*	7806
43	221	555*	932*	7626
44	248	543*	966	7447*
45	275*	531	0,44001	7267
46	301	519	036*	7088
47	328*	508*	071*	6909
48	355*	496*	105	6730
49	381	484	140	6552*
50	408*	472	175*	6374*
51	0,40434	0,91461*	0,44210*	2,26196*
52	461*	449*	244	6018*
53	488*	437	279	5840
54	514	425	314*	5663*
55	541*	414*	349*	5486*
56	567	402*	384*	5309*
57	594*	390	418	5132
58	621*	378	453	4956*
59	647	366	488	4780*
60	674*	355*	523*	4604*
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.

66°

24°

'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,40674*	0,91355*	0,44523*	2,24604*	60
1	700	343*	558*	4428*	59
2	727*	331*	593*	4252	58
3	753	319	627	4077	57
4	780*	307	662	3902	56
5	806	295	697	3727	55
6	833	283	732	3553*	54
7	860*	272*	767	3378	53
8	886	260*	802*	3204	52
9	913*	248*	837*	3030	51
10	939	236*	872*	2857*	50
11	0,40966*	0,91224*	0,44907*	2,22683	49
12	992	212	942*	2510	48
13	0,41019*	200	977*	2337	47
14	045	188	0,45012*	2164	46
15	072	176	047*	1992*	45
16	098	164	082*	1819	44
17	125*	152	117*	1647	43
18	151	140	152*	1475	42
19	178*	128	187*	1304*	41
20	204	116	222*	1132	40
21	0,41231*	0,91104	0,45257*	2,20961	39
22	257	092	292*	0790	38
23	284*	080	327*	0619	37
24	310	068	362	0449*	36
25	337*	056	397	0278	35
26	363	044	432	0108	34
27	390*	032	467	2,19938	33
28	416	020	502	9769*	32
29	443*	008	538*	9599	31
30	469	0,90996	573*	9430*	30
31	0,41496*	0,90984	0,45608*	2,19261*	29
32	522	972*	643*	9092	28
33	549*	960*	678	8923	27
34	575	948*	713	8755	26
35	602*	936*	748	8587*	25
36	628	924*	784*	8419*	24
37	655*	911	819*	8251	23
38	681*	899	854*	8084*	22
39	707	887	889	7916	21
40	734*	875	924	7749	20
41	0,41760	0,90863*	0,45960*	2,17582	19
42	787*	851*	995*	7416*	18
43	813	839*	0,46030	7249	17
44	840*	826	065	7083*	16
45	866*	814	101*	6917*	15
46	892	802	136*	6751*	14
47	919*	790*	171	6585	13
48	945	778*	206	6420*	12
49	972*	766*	242*	6255*	11
50	998	753	277	6090*	10
51	0,42024	0,90741	0,46312	2,15925*	9
52	051*	729*	348*	5760	8
53	077	717*	383	5596*	7
54	104*	704	418	5432*	6
55	130*	692	454*	5268*	5
56	156	680*	489	5104*	4
57	183*	668*	525*	4940	3
58	209	655	560*	4777*	2
59	235	643	595	4614*	1
60	262*	631*	631*	4451*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	

65°

25°

'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang
0	0,42262*	0,90631*	0,46631*	2,14451
1	288	618	666	4288
2	315*	606	702*	4125
3	341*	594*	737	3963
4	367	582*	773*	3801
5	394*	569	808*	3639
6	420*	557*	843	3477
7	446	545*	879*	3316
8	473*	532	914	3154
9	499*	520*	950*	2993
10	525	507	985	2832
11	0,42552*	0,90495	0,47021*	2,12671
12	578*	483*	056	2511
13	604	470	092*	2350
14	631*	458*	128*	2190
15	657*	446*	163	2030
16	683	433	199*	1871
17	709	421*	234	1771
18	736*	408	270*	1552
19	762	396*	305	1392
20	788	383*	341*	1233
21	0,42815*	0,90371*	0,47377*	2,11075
22	841*	358	412	0916
23	867	346	448*	0758
24	894*	334*	483	0600
25	920*	321	519	0442
26	946	309*	555*	0284
27	972	296	590	0126
28	999*	284*	626	2,09969
29	0,43025*	271	662*	9811
30	051	259*	698*	9654
31	0,43077	0,90246	0,47733	2,09498
32	104*	233	769*	9341
33	130*	221*	805*	9184
34	156	208	840	9028
35	182	196*	876	8872
36	209*	183	912*	8716
37	235*	171*	948*	8560
38	261	158	984*	8405
39	287	146*	0,48019	8250
40	313	133*	055	8094
41	0,43340*	0,90120	0,48091*	2,07939
42	366*	108*	127*	7785
43	392	095	163*	7630
44	418	082	198	7476
45	445*	070*	234	7321
46	471*	057	270	7167
47	497*	045*	306	7014
48	523	032*	342*	6860
49	549	019	378*	6706
50	575	007*	414*	6553
51	0,43602*	9,89994*	0,48450*	2,06400
52	628*	981	486*	6247
53	654	968	521	6094
54	680	956*	557	5942
55	706	943	593	5790
56	733*	930	629	5637
57	759*	918*	665	5485
58	785*	905*	701	5333
59	811*	892	737	5182
60	837	879	773	5030
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.

64°

26°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	60
1	863	867*	809	4879	59
2	889	854*	845	4728	58
3	916*	841	881	4577	57
4	942*	828	917	4426	56
5	968*	816*	953	4276*	55
6	994*	803*	989	4125	54
7	0,44020	790*	0,49026*	3975	53
8	046	777	062*	3825	52
9	072	764	098*	3675	51
10	098	752	134*	3526*	50
11	0,44124	0,89739*	0,49170*	2,03376	49
12	151*	726*	206	3227*	48
13	177*	713*	242	3078*	47
14	203*	700	278	2929*	46
15	229*	687	315*	2780*	45
16	255*	674	351*	2631	44
17	281	662*	387*	2483*	43
18	307	649*	423	2335*	42
19	333	636*	459	2187*	41
20	359	623*	495	2039*	40
21	9,44385	0,89610*	0,49532*	2,01891*	39
22	411	597	568*	1743	38
23	437	584	604	1596*	37
24	464*	571	640	1449*	36
25	490*	558	677*	1302*	35
26	516*	545	713*	1155*	34
27	542*	532	749	1008	33
28	568*	519	786*	0862*	32
29	594*	506	822*	0715	31
30	620*	493	858	0569*	30
31	0,44646*	0,89480	0,49894	2,00423*	29
32	672*	467	931*	0277*	28
33	698*	454	967	0131*	27
34	724*	441	0,50004*	1,99986*	26
35	750*	428	040*	9841*	25
36	776*	415	076	9695	24
37	802*	402	113*	9550	23
38	828*	389	149	9406*	22
39	854*	376	185	9261*	21
40	880*	363	222*	9116	20
41	0,44906*	0,89350	0,50258	1,98972	19
42	932*	337	295*	8828*	18
43	958*	324	331	8634*	17
44	984*	311*	368*	8540	16
45	0,45010*	298*	404	8396	15
46	036*	285*	441*	8253*	14
47	062*	272*	477	8110*	13
48	088*	259*	514*	7966	12
49	114*	245	550	7823	11
50	140*	232	587*	7681*	10
51	0,45166*	0,89219	0,50623	1,97538*	9
52	192*	206	660*	7395	8
53	218*	193*	696	7253*	7
54	243	180*	733*	7111*	6
55	269	167*	769	6969*	5
56	295	153	806	6827*	4
57	321	140	843*	6685	3
58	347	127	879	6544*	2
59	373	114*	916*	6402	1
60	399	101*	953*	6261	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
63°					

27°				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0	0,45399	0,89101*	0,50953*	1,96261
1	425*	087	989	6120
2	451*	074	0,51026*	5979
3	477*	061	063*	5838
4	503*	048*	099	5698*
5	529*	035*	136*	5557
6	554	021	173*	5417
7	580	008	209	5277
8	606	0,88995*	246	5137
9	632	981	283*	4997
10	658	968	319	4858*
11	0,45684*	0,88955*	0,51356	1,94718
12	710*	942*	393	4579*
13	736*	928	430*	4440*
14	762*	915	467*	4301*
15	787	902*	503	4162*
16	813	888	540	4023
17	839	875	577	3885*
18	865*	862*	614*	3746
19	891*	848	651*	3608
20	917*	835	688*	3470
21	0,45942	0,88822*	0,51724	1,93332
22	968	808	761	3195*
23	994	795*	798	3057*
24	0,46020*	782*	835	2920*
25	046*	768	872*	2782
26	072*	755*	909*	2645
27	097	741	946*	2508
28	123	728*	983*	2371
29	149	715*	0,52020*	2235*
30	175*	701	057*	2098
31	0,46201*	0,88688*	0,52094*	1,91962*
32	226	674	131*	1826*
33	252	661*	168*	1690*
34	278	647	205*	1554*
35	304*	634*	242*	1418*
36	330*	620	279*	1282
37	355	607*	316*	1147*
38	381	593	353*	1012*
39	407*	580*	390*	0876
40	433*	566	427*	0741
41	0,46458	0,88553*	0,52464	1,90607*
42	484	539	501	0472*
43	510*	526*	538	0337
44	536*	512	575	0203*
45	561	499*	613*	0069*
46	587	485	650*	1,89935*
47	613*	472*	687	9801*
48	639*	458	724	9667*
49	664	445*	761	9533
50	690	431*	798	9400*
51	0,46716*	0,88417	0,52836*	1,89266
52	742*	404*	873*	9133
53	767	390	910	9000
54	793*	377*	947	8867
55	819*	363*	985*	8734
56	844	349	0,53022*	8602*
57	870	336*	059	8469
58	896*	322	096	8337*
59	921	308	134*	8205*
60	947	295*	171*	8073*
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.
62°				

28°

'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,46947	0,88295*	0,53171*	1,88073*	60
1	973*	281	208	7941*	59
2	999*	267	246*	7809*	58
3	0,47024	254*	283*	7677	57
4	050*	240	320	7546*	56
5	076*	226	358*	7415*	55
6	101	213*	395	7283	54
7	127*	199	432	7152	53
8	153*	185	470*	7021	52
9	178	172*	507*	6891*	51
10	204*	158*	545*	6760	50
11	0,47229	0,88144	0,53582	1,86630*	49
12	255	130	620*	6499	48
13	281*	117*	657*	6369	47
14	306	103*	694	6239*	46
15	332*	089	732*	6109	45
16	358*	075	769	5979	44
17	383	062*	807*	5850*	43
18	409*	048*	844	5720	42
19	434	034*	882*	5591*	41
20	460	020	920*	5462*	40
21	0,47486*	0,88006	0,53957	1,85333*	39
22	511	0,87993*	995*	5204*	38
23	537*	979*	0,54032	5075*	37
24	562	965*	070*	4946	36
25	588	951	107	4818*	35
26	614*	937	145	4689	34
27	639	923	183*	4561*	33
28	665*	909	220	4433*	32
29	690	896*	258*	4305*	31
30	716*	882*	296*	4177	30
31	0,47741	8,87868*	0,54333	1,84049	29
32	767*	854*	371*	3922*	28
33	793*	840	409*	3794	27
34	818	826	446	3667	26
35	844*	812	484	3540*	25
36	869	798	522*	3413*	24
37	895*	784	560*	3286	23
38	920	770	597	3159	22
39	946*	756	635	3033*	21
40	971	743*	673*	2906	20
41	0,47997*	0,87729*	0,54711*	1,82780*	19
42	0,48022	715*	748	2654*	18
43	048*	701*	786	2528*	17
44	073	687*	824	2402*	16
45	099*	673*	862*	2276*	15
46	124	659*	900*	2150	14
47	150*	645*	938*	2025*	13
48	175	631*	975	1899	12
49	201*	617*	0,55013	1774	11
50	226	603*	051	1649*	10
51	0,48252*	0,87589*	0,55089	1,81524*	9
52	277	575*	127	1399	8
53	303*	561*	165	1274	7
54	328	546	203*	1150*	6
55	354*	532	241*	1025	5
56	379	518	279*	0901*	4
57	405*	504	317*	0777*	3
58	430	490	355*	0653*	2
59	456*	476	393*	0529*	1
60	481*	462*	431*	0405*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang	Tang.	'

61°

29°

'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.
0	0,48481*	0,87462*	0,55431*	1,80405*
1	506	448*	469*	0281
2	532*	434*	507*	0158
3	557	420*	545	0034
4	583*	406*	583	1,79911*
5	608	391	621	9788*
6	634*	377	659	9665*
7	659*	363	697	9542*
8	684	349*	736*	9419*
9	710*	335*	774*	9296
10	735	321*	812*	9174*
11	0,48761*	0,87306	0,55850*	1,79051
12	786*	292	888	8929*
13	811	278	926	8807*
14	837*	264*	964	8685*
15	862	250*	0,56003*	8563*
16	888*	235	041*	8441
17	913*	221	079	8319
18	938	207*	117	8198*
19	964*	193*	156*	8077*
20	989*	178	194*	7955
21	0,49014	0,87164	0,56232	1,77834
22	040*	150*	270	7713
23	065	136*	309*	7592
24	090	121	347	7471
25	116*	107	385	7351*
26	141	093*	424*	7230
27	166	079*	462	7110*
28	192*	064	501*	6990*
29	217	050*	539*	6869
30	242	036*	577	6749
31	0,49268*	0,87021	0,56616*	1,76629
32	293*	007*	654	6510*
33	318	0,86993*	693*	6390
34	344*	978	731*	6271*
35	369*	964*	769	6151
36	394	949	808*	6032*
37	419	935	846	5913*
38	445*	921*	885*	5794*
39	470	906	923	5675*
40	495	892*	962*	5556*
41	0,49521*	0,86878*	0,57000	1,75437
42	546*	863	039*	5319*
43	571	849*	078*	5200
44	596	834	116	5082*
45	622*	820*	155*	4964*
46	647*	805	193	4846*
47	672	791*	232*	4728*
48	697	777*	271*	4610*
49	723*	762	309	4492
50	748*	748*	348*	4375*
51	0,49773	0,86733	0,57386	1,74257
52	798	719*	425	4140*
53	824*	704	464*	4022
54	849*	690*	503*	3905
55	874*	675	541	3788
56	899	661*	580*	3671
57	924	646	619*	3555*
58	950*	632*	657	3438
59	975*	617	696	3321
60	0,50000	603*	735	3205
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.

60°

30°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,50000	0,86603*	0,57735	1,73205	60
1	025	588*	774*	3089*	59
2	050	573	813*	2973*	58
3	076*	559*	851	2857*	57
4	101*	544	890	2741*	56
5	126*	530*	929	2625*	55
6	151	515	968*	2509	54
7	176	501*	0,58007*	2393	53
8	201	486*	046*	2278*	52
9	227*	471	085*	2163*	51
10	252*	457*	124*	2047	50
11	0,50277*	0,86442	0,58162	1,71932	49
12	302*	427	201	1817	48
13	327	413*	240	1702	47
14	352	398	279	1588*	46
15	377	384*	318	1473*	45
16	403*	369*	357	1358	44
17	428*	354	396	1244*	43
18	453*	340*	435	1129	42
19	478*	325*	474	1015	41
20	503*	310	513	0901	40
21	0,50528	0,86295	0,58552	1,70787	39
22	553	281*	591	0673	38
23	578	266	631*	0560*	37
24	603	251	670*	0446*	36
25	628	237*	709*	0332	35
26	654*	222*	748*	0219*	34
27	679*	207	787	0106*	33
28	704*	192	826	1,69992	32
29	729*	178*	865	9879	31
30	754*	163*	905*	9766	30
31	0,50779*	0,86148	0,58944*	1,69653	29
32	804*	133	983*	9541*	28
33	829	119*	0,59022	9428	27
34	854	104*	061	9315	26
35	879	089	101*	9203	25
36	904	074	140*	9091*	24
37	929	059	179	8979*	23
38	954	045*	218	8866	22
39	979	030*	258*	8754	21
40	0,51004	015*	297*	8643*	20
41	0,51029	0,86000	0,59336	1,68531*	19
42	054	0,85985	376*	8419	18
43	079	970	415	8308*	17
44	104	956*	454	8196	16
45	129	941*	494*	8085*	15
46	154	926*	533	7974*	14
47	179	911*	573*	7863*	13
48	204	896*	612*	7752*	12
49	229	881	651	7641*	11
50	254	866	691*	7530*	10
51	0,51279	0,85851	0,59730	1,67419	9
52	304	836	770*	7309*	8
53	329	821	809	7198	7
54	354	806	849*	7088*	6
55	379	792*	888	6978*	5
56	404	777*	928*	6867	4
57	429*	762*	967	6757	3
58	454*	747*	0,60007*	6647	2
59	479*	732*	046	6538*	1
60	504*	717	086	6428*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
59°					

31°					
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,51504*	0,85717*	0,60086	1,66428*	60
1	529*	702*	126*	6318	59
2	554*	687*	165	6209*	58
3	579*	672*	205*	6099	57
4	604*	657*	245*	5990	56
5	628	642*	284	5881*	55
6	653	627*	324*	5772*	54
7	678	612*	364*	5663*	53
8	703	597*	403	5554	52
9	728	582*	443*	5445	51
10	753*	567*	483*	5337	50
11	0,51778*	0,85551	0,60522	1,65228	49
12	803*	536	562	5120*	48
13	828*	521	602*	5011	47
14	852	506	642*	4903	46
15	877	491	681	4795*	45
16	902	476	721	4687*	44
17	927	461*	761	4579*	43
18	952*	446*	801*	4471	42
19	977*	431*	841*	4363	41
20	0,52002*	416*	881*	4256*	40
21	0,52026	0,85401*	0,60921*	1,64148	39
22	051	385	960	4041*	38
23	076	370	0,61000	3934*	37
24	101*	355	040	3826	36
25	126*	340*	080	3719	35
26	151*	325*	120	3612	34
27	175	310*	160	3505	33
28	200	294	200	3398	32
29	225	279	240	3292*	31
30	250*	264	280	3185	30
31	0,52275*	0,85249*	0,61320	1,63079*	29
32	299	234*	360	2972	28
33	324	218	400	2866*	27
34	349	203	440	2760*	26
35	374*	188*	480	2654*	25
36	399*	173*	520	2548*	24
37	423	157	561*	2442*	23
38	448	142	601*	2336*	22
39	473*	127*	641*	2230	21
40	498*	112*	681*	2125*	20
41	0,52522	0,85096	0,61721	1,62019	19
42	547	081	761	1914*	18
43	572*	066*	801	1808	17
44	597*	051*	842*	1703	16
45	621	035	882*	1598	15
46	646	020*	922	1493	14
47	671*	005*	962	1388	13
48	696*	0,84989	0,62003*	1283	12
49	720	974*	043*	1179*	11
50	745	959*	083	1074	10
51	0,52770*	0,84943	0,62124*	1,60970*	9
52	794	928*	164*	0865	8
53	819	913*	204	0761*	7
54	844*	897	245*	0657*	6
55	869*	882*	285*	0553*	5
56	893	866	325	0449*	4
57	918*	851	366*	0345*	3
58	943*	836*	406	0241*	2
59	967	820	446	0137	1
60	992*	805*	487*	0033	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	
58°					

32°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,52992*	0,84805*	0,62487*	1,60033	60
1	0,53017*	789	527	1,59930*	59
2	041	774*	568*	9826	58
3	066*	759*	608	9723	57
4	091*	743	649*	9620*	56
5	115	728*	689	9517*	55
6	140*	712	730*	9414*	54
7	164	697*	770	9311*	53
8	189	681	811*	9208*	52
9	214*	666*	852*	9105	51
10	238	650*	892	9002	50
11	0,53263	0,84635*	0,62933*	1,58900*	49
12	288*	619	973	8797	48
13	312	604*	0,63014*	8695*	47
14	337*	588	055*	8593*	46
15	361	573*	095	8490	45
16	386	557	136*	8388	44
17	411*	542*	177*	8286	43
18	435	526	217	8184	42
19	460*	511*	258	8083*	41
20	484	495	299*	7981*	40
21	0,53509*	0,84480*	0,63340*	1,57879	39
22	534*	464*	380	7778*	38
23	558	448	421	7676	37
24	583*	433*	462*	7575*	36
25	607	417	503*	7474*	35
26	632*	402*	544*	7372	34
27	656	386	584	7271	33
28	681*	370	625	7170	32
29	705	355*	666	7069	31
30	730*	339	707	6969*	30
31	0,53754	0,84324*	0,63748*	1,56868*	29
32	779	308*	789*	6767	28
33	804*	292	830*	6667*	27
34	828	277*	871*	6566	26
35	853*	261*	912*	6466*	25
36	877	245	953*	6366*	24
37	902*	230*	994*	6265	23
38	926	214*	0,64035*	6165	22
39	951*	198	076*	6065	21
40	975	182	117*	5966*	20
41	0,54000*	0,84167*	0,64158*	1,55866*	19
42	024	151	199*	5766	18
43	049*	135	240*	5666	17
44	073*	120*	281	5567*	16
45	097	104*	322	5467	15
46	122*	088	363	5368	14
47	146	072	404	5269*	13
48	171*	057*	446*	5170*	12
49	195	041*	487*	5071*	11
50	220*	025	528*	4972*	10
51	0,54244	0,84009	0,64569	1,54873*	9
52	269*	0,83994*	610	4774*	8
53	293	978*	652*	4675	7
54	317	962*	693*	4576	6
55	342*	946	734	4478*	5
56	366	930	775	4379	4
57	391*	915*	817*	4281	3
58	415	899*	858	4183*	2
59	440*	883*	899	4085*	1
60	464*	867	941*	3986	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

57°

33°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,54464*	0,83867	0,64941*	1,53986	60
1	488	851	982	3888	59
2	513*	835	0,65024*	3791*	58
3	537	819	065*	3693*	57
4	561	804*	106	3595*	56
5	586*	788*	148*	3497	55
6	610	772*	189	3400*	54
7	635*	756*	231*	3302	53
8	659*	740	272	3205*	52
9	683	724	314*	3107	51
10	708*	708	355	3010	50
11	0,54732*	0,83692	0,65397*	1,52913	49
12	756	676	438	2816	48
13	781*	660	480*	2719	47
14	805*	645*	521	2622	46
15	829	629*	563*	2525	45
16	854*	613*	604	2429*	44
17	878*	597*	646	2332*	43
18	902	581*	688*	2235	42
19	927*	565*	729	2139*	41
20	951*	549*	771	2043*	40
21	0,54975	0,83533*	0,65813*	1,51946	39
22	999	517*	854	1850	38
23	0,55024*	501*	896	1754*	37
24	048	485*	938*	1658*	36
25	072	469*	980*	1562	35
26	097*	453*	0,66021	1466	34
27	121*	437*	063	1370	33
28	145	421*	105*	1275*	32
29	169	405*	147*	1179	31
30	194*	389*	189*	1084*	30
31	0,55218*	0,83373*	0,66230	1,50988	29
32	242	356	272	0893*	28
33	266	340	314	0797	27
34	291*	324	356	0702	26
35	315*	308	398*	0607	25
36	339	292	440*	0512	24
37	363	276	482*	0417	23
38	388*	260*	524*	0322	22
39	412*	244*	566*	0228*	21
40	436	228*	608*	0133*	20
41	0,55460	0,83212*	0,66650*	1,50038	19
42	484	195	692*	1,49944*	18
43	509*	179	734*	9849	17
44	533*	163	776*	9755*	16
45	557	147*	818*	9661*	15
46	581	131*	860*	9566	14
47	605	115*	902	9472	13
48	630*	098	944	9378	12
49	654*	082	986	9284	11
50	678*	066	0,67028	9190	10
51	0,55702	0,83050*	0,67071*	1,49097*	9
52	726	034*	113*	9003*	8
53	750	017	155*	8909	7
54	775*	001	197	8816*	6
55	799*	0,82985	239	8722	5
56	823*	969*	282*	8629*	4
57	847*	953*	324*	8536*	3
58	871	936	366	8442	2
59	895	920	409*	8349	1
60	919	904*	451*	8256	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

56°

34°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,55919	0,82904*	0,67451*	1,48256	60
1	943	887	493	8163	59
2	968*	871	536*	8070	58
3	992*	855*	578*	7977	57
4	0,56016*	839*	620	7885*	56
5	040*	822	663*	7792*	55
6	064*	806	705	7699	54
7	088*	790*	748*	7607*	53
8	112	773	790*	7514	52
9	136	757	832	7422	51
10	160	741*	875*	7330*	50
11	0,56184	0,82724	0,67917	1,47238*	49
12	208	708	960*	7146*	48
13	232	692*	0,68002	7054*	47
14	256	675	045	6962*	46
15	280	659*	088*	6870*	45
16	305*	643*	130	6778*	44
17	329*	626	173*	6686	43
18	353*	610*	215	6595*	42
19	377	593	258	6503*	41
20	401*	577	301*	6411	40
21	0,56425*	0,82561*	0,68343	1,46320	39
22	449*	544	386	6229*	38
23	473*	528*	429*	6137	37
24	497*	511	471	6046	36
25	521*	495*	514	5955	35
26	545*	478	557*	5864	34
27	569*	462	600*	5773	33
28	593*	446*	642	5682	32
29	617*	429	685	5592*	31
30	641*	413*	728	5501*	30
31	0,56665*	0,82396	0,68771*	1,45410	29
32	689*	380*	814*	5320*	28
33	713*	363	857*	5229	27
34	736	347*	900*	5139*	26
35	760	330	942	5049*	25
36	784	314*	985	4958	24
37	808	297	9,69028	4868	23
38	832	281*	071	4778*	22
39	856	264	114	4688*	21
40	880	248*	157	4598*	20
41	0,56904	0,82231*	0,69200	1,44508	19
42	928*	214	243	4418	18
43	952*	198*	286	4329*	17
44	976*	181	329	4239*	16
45	0,57000*	165*	372	4149	15
46	024*	148	416*	4060*	14
47	047	132*	459*	3970	13
48	071	115*	502*	3881	12
49	095	098	545*	3792*	11
50	119	082*	588	3703*	10
51	0,57143*	0,82065	0,69631	1,43614*	9
52	167*	048	675*	3525*	8
53	191*	032*	718*	3436*	7
54	215*	015	761*	3347*	6
55	238	0,81999*	804	3258*	5
56	262	982*	847	3169	4
57	286	965	891*	3080	3
58	310*	949*	934	2992*	2
59	334*	932*	977	2903	1
60	358*	915	0,70021*	2815*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
		55°			

35°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,57358*	0,81915	0,70021*	1,42815*	60
1	381	899*	064	2726	59
2	405	882*	107	2638	58
3	429	865	151*	2550*	57
4	453*	848	194	2462*	56
5	477*	832*	238*	2374*	55
6	501*	815*	281	2286*	54
7	524	798	325*	2198*	53
8	548	782*	368	2110*	52
9	572*	765*	412*	2022*	51
10	596*	748	455	1934	50
11	0,57619	0,81731	0,70499*	1,41847*	49
12	643	714	542	1759	48
13	667*	698*	586*	1672*	47
14	691*	681*	629	1584	46
15	715*	664	673	1497*	45
16	738	647	717*	1409	44
17	762	631*	760	1322	43
18	786*	614*	804*	1235	42
19	810*	597*	848	1148*	41
20	833	580	891	1061*	40
21	0,57857*	0,81563	0,70935	1,40974	39
22	881*	546	979*	0887	38
23	904	530*	0,71023*	0800	37
24	928	513*	066	0714*	36
25	952*	496*	110	0627	35
26	976*	479	154*	0540	34
27	999	462	198*	0454*	33
28	0,58023*	445	242*	0367	32
29	047*	428	285	0281	31
30	070	412*	329	0195*	30
31	0,58094*	0,81395*	0,71373	1,40109*	29
32	118*	378*	417	0022	28
33	141	361*	461	1,39936	27
34	165*	344*	505	9850	26
35	189*	327	549*	9764	25
36	212	310	593*	9679*	24
37	236*	293	637*	9593*	43
38	260*	276	681	9507*	22
39	283	259	725	9421	21
40	307*	242	769	9336*	20
41	0,58330	0,81225	0,71813	1,39250	19
42	354	208	857	9165*	18
43	378*	191	901	9079	17
44	401	174	946*	8994	16
45	425*	157	990*	8909*	15
46	449*	140	0,72034*	8824*	14
47	472	123	078	8738	13
48	496*	106	122	8653	12
49	519	089	167*	8568	11
50	543*	072	211*	8484*	10
51	0,58567*	0,81055	0,72255	1,38399*	9
52	590	038	299	8314*	8
53	614*	021	344*	8229	7
54	637	004	388*	8145*	6
55	661*	0,80987	432	8060	5
56	684	970	477*	7976*	4
57	708*	953*	521	7891	3
58	731	936*	565	7807*	2
59	755*	919*	610*	7722	1
60	779*	902*	654	7638	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
		54°			

36°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,58779*	0,80902*	0,72654	1,37638	60
1	802	885*	699*	7554	59
2	826*	867	743	7470*	58
3	849	850	788*	7386*	57
4	873*	833	832	7302*	56
5	896	816	877*	7218	55
6	920*	799*	921	7134	54
7	943	782*	966*	7050	53
8	967*	765*	0,73010	6967*	52
9	990	748*	055	6883	51
10	0,59014*	730	100*	6800*	50
11	0,59037	0,80713	0,73144	1,36716	49
12	061*	696	189*	6633*	48
13	084	679*	234*	6549	47
14	108*	662*	278	6466	46
15	131*	644	323	6383*	45
16	154	627	368*	6300*	44
17	178*	610	413*	6217*	43
18	201	593*	457	6134*	42
19	225*	576*	502	6051*	41
20	248	558	547*	5968*	40
21	0,59272*	0,80541	0,73592*	1,35885*	39
22	295	524*	637*	5802	38
23	318	507*	681	5719	37
24	342*	489	726	5637*	36
25	365	0,80472	771	5554	35
26	389*	455*	816	5472*	34
27	412	438*	861	5389	33
28	436*	420	906	5307*	32
29	459*	403*	951	5224	31
30	482	386*	996	5142	30
31	0,59506*	0,80368	0,74041	1,35060	29
32	529	351	086	4978*	28
33	552	334*	131	4896*	27
34	576*	316	176	4814*	26
35	599	299	221	4732*	25
36	622	282*	267*	4650	24
37	646*	264	312*	4568	23
38	669	247	357*	4487*	22
39	693*	230*	402	4405*	21
40	716*	212	447	4323	20
41	0,59739	0,80195*	0,74492	1,34242*	19
42	763*	178*	538*	4160	18
43	786*	160	583*	4079*	17
44	809	143*	628	3998*	16
45	832	125	674*	3916	15
46	856*	108*	719*	3835	14
47	879	091*	764	3754*	13
48	902	073	810*	3673*	12
49	926*	056*	855*	3592*	11
50	949*	038	900	3511*	10
51	0,59972	0,80021*	0,74946*	1,33430*	9
52	995	003	991	3349	8
53	0,60019*	0,79986*	0,75037*	3268	7
54	042	968	082	3187	6
55	065	951*	128*	3107*	5
56	089*	934*	173	3026	4
57	112*	916	219*	2946*	3
58	135	899*	264	2865	2
59	158	881	310*	2785*	1
60	182*	864*	355	2704	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	
53°					

37°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,60182*	0,79864*	0,75355	1,32704	60
1	205*	846	401	2624	59
2	228*	829*	447*	2544*	58
3	251	811	492	2464*	57
4	274	793	538*	2384*	56
5	298*	776*	584*	2304*	55
6	321*	758	629	2224*	54
7	344*	741*	675	2144*	53
8	367	723*	721*	2064*	52
9	390	706*	767*	1984	51
10	414*	688	812	1904	50
11	0,60437*	0,79671*	0,75858	1,31825*	49
12	460*	653*	904	1745	48
13	483	635	950*	1666*	47
14	506	618*	996*	1586	46
15	529	600	0,76042*	1507*	45
16	553*	583*	088*	1427	44
17	576*	565*	134*	1348	43
18	599*	547	180*	1269*	42
19	622*	530*	226*	1190*	41
20	645	512	272*	1110	40
21	0,60668	0,79494	0,76318*	1,31031	39
22	691	477*	364*	0952	38
23	714	459	410*	0873	37
24	738*	441	456*	0795*	36
25	761*	424*	502*	0716*	35
26	784*	406	548*	0637*	34
27	807*	388	594	0558	33
28	830*	371*	640	0480*	32
29	853	353	686	0401	31
30	876	335	733*	0323*	30
31	0,60899	0,79318*	0,76779*	1,30244	29
32	922	300*	825	0166*	28
33	945	282	871	0087	27
34	968	264	918*	0009	26
35	991	247*	964	1,29931*	25
36	0,61015*	229*	0,77010	9853*	24
37	038*	211	057*	9775*	23
38	061*	193	103	9696	22
39	084*	176*	149	9618	21
40	107*	158*	196*	9541*	20
41	0,61130*	0,79140	0,77242	1,29463*	19
42	153*	122	289*	9385*	18
43	176*	105*	335	9307	17
44	199*	087*	382*	9229	16
45	222*	069*	428	9152*	15
46	245*	051	475*	9074	14
47	268*	033	521	8997*	13
48	291*	016*	568*	8919	12
49	314*	0,78998*	615*	8842*	11
50	337*	980*	661	8764	10
51	0,61360*	0,78962*	0,77708*	1,28687	9
52	383*	944	754	8610*	8
53	406*	926	801	8533*	7
54	429*	908	848*	8456*	6
55	451	891*	895*	8379*	5
56	474	873*	941	8302*	4
57	497	855*	988	8225*	3
58	520	837*	0,78035*	8148*	2
59	543	819*	082*	8071*	1
60	566	801	129*	7994	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
52°					

38°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,61566	0,78801	0,78129*	1,27994	60
1	589	783	175	7917	59
2	612*	765	222	7841*	58
3	635*	747	269	7764	57
4	658*	729	316	7688*	56
5	681*	711	363	7611	55
6	704*	694*	410	7535*	54
7	726	676*	457*	7458	53
8	749	658*	504	7382	52
9	772	640*	551	7306*	51
10	795	622*	598	7230*	50
11	0,61818*	0,78604*	0,78645	1,27153	49
12	841*	586*	692	7077	48
13	864*	568*	739	7001	47
14	887*	550*	786	6925	46
15	909	532*	834*	6849	45
16	932	514*	881*	6774*	44
17	955	496*	928	6698*	43
18	978*	478*	975	6622*	42
19	0,62001*	460*	0,79022	6546	41
20	024	442*	070*	6471*	40
21	0,62046	0,78424*	0,79117	1,26395	39
22	069	405	164	6319	38
23	092*	387	212*	6244	37
24	115*	369	259	6169*	36
25	138	351	306	6093	35
26	160	333	354*	6018*	34
27	183	315	401	5943*	33
28	206*	297	449*	5867	32
29	229*	279*	496	5792	31
30	251	261*	544*	5717	30
31	0,62274	0,78243*	0,79591	1,25642	29
32	297*	225*	639*	5567	28
33	320*	206	686	5492	27
34	342	188	734*	5417	26
35	365	170	781	5343*	25
36	388*	152	829*	5268*	24
37	411*	134*	877*	5193	23
38	433	116*	924	5118	22
39	456	098*	972*	5044*	21
40	479*	079	0,80020*	4969	20
41	0,62502*	0,78061	0,80067	1,24895*	19
42	524	043	115	4820	18
43	547*	025*	163*	4746	17
44	570*	007*	211*	4672*	16
45	592	0,77988	258	4597	15
46	615	970	306	4523	14
47	638*	952	354	4449	13
48	660	934*	402	4375*	12
49	683	916*	450*	4301*	11
50	706*	897	498*	4227*	10
51	0,62728	0,77879	0,80546*	1,24153*	9
52	751	861*	594*	4079	8
53	774*	843*	642*	4005	7
54	796	824	690*	3931	6
55	819*	806	738*	3858*	5
56	842*	788*	786*	3784*	4
57	864	769	834	3710	3
58	887*	751	882	3637*	2
59	909	733*	930	3563	1
60	932	715*	978	3490*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
51°					

39°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,62932	0,77715*	0,80978	1,23490*	60
1	955*	696	0,81027*	3416	59
2	977	678*	075*	3343*	58
3	0,63000*	660*	123*	3270*	57
4	022	641	171	3196	56
5	045	623*	220*	3123	55
6	068*	605*	268*	3050*	54
7	090	586	316	2977*	53
8	113*	568*	364	2904*	52
9	135	550*	413*	2831*	51
10	158*	531	461	2758*	50
11	0,63180	0,77513*	0,81510*	1,22685*	49
12	203*	494	558	2612	48
13	225	476	606	2539	47
14	248	458*	655*	2467*	46
15	271*	439	703	2394*	45
16	293	421*	752*	2321	44
17	316*	402	800	2249*	43
18	338	384	849	2176	42
19	361*	366*	898*	2104*	41
20	383	347	946	2031	40
21	0,63406*	0,77329*	0,81995*	1,21959*	39
22	428	310	0,82044*	1886	38
23	451*	292*	092	1814	37
24	473	273	141*	1742*	36
25	496*	255*	190*	1670*	35
26	518*	236	238	1598*	34
27	540	218*	287	1526*	33
28	563*	199	336*	1454*	32
29	585	181*	385*	1382*	31
30	608*	162	434*	1310*	30
31	0,63630	0,77144*	0,82483*	1,21238*	29
32	653*	125	531	1166	28
33	675	107*	580	1094	27
34	698*	088	629	1023*	26
35	720*	070*	678	0951*	25
36	742	051	727	0879	24
37	765*	033*	776	0808*	23
38	787	014	825	0736	22
39	810*	0,76996*	874	0665*	21
40	832	977	923	0593	20
41	0,63854	0,76959*	0,82972	1,20522*	19
42	877*	940*	0,83022*	0451*	18
43	899	921	071*	0379	17
44	922*	903*	120*	0308	16
45	944*	884	169	0237*	15
46	966	866*	218	0166*	14
47	989*	847*	268*	0095*	13
48	0,64011*	828	317*	0024*	12
49	033	810*	366	1,19953*	11
50	056*	791	415	9882*	10
51	0,64078*	0,76772	0,83465*	1,19811*	9
52	100	754*	514	9740	8
53	123*	735	564*	9669	7
54	145*	717*	613*	9599*	6
55	167	698*	662	9528*	5
56	190*	679	712*	9457	4
57	212*	661*	761	9387*	3
58	234	642*	811*	9316	2
59	256	623	860	9246*	1
60	279*	604	910*	9175	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
50°					

40°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,64279*	0,76604	0,83910*	1,19175	60
1	301	586*	960*	9105*	59
2	323	567	0,84009	9035*	58
3	346*	548	059*	8964	57
4	368*	530*	108	8894	56
5	390	511*	158	8824*	55
6	412	492	208*	8754*	54
7	435*	473	258*	8684*	53
8	457*	455*	307	8614*	52
9	479	436*	357	8544*	51
10	501	417	407*	8474*	50
11	0,64524*	0,76398	0,84457*	1,18404*	49
12	546*	380*	507*	8334	48
13	568*	361*	556	8264	47
14	590	342	606	8194	46
15	612	323	656	8125*	45
16	635*	304	706	8055	44
17	657*	286*	756	7986*	43
18	679*	267*	806	7916*	42
19	701	248	856	7846	41
20	723	229	906	7777*	40
21	0,64746*	0,76210	0,84956	1,17708*	39
22	768*	192*	0,85006	7638	38
23	790*	173*	057*	7569*	37
24	812	154*	107*	7500*	36
25	834	135*	157*	7430	35
26	856	116	207	7361	34
27	878	097	257	7292	33
28	901*	078	308*	7223*	32
29	923*	059	358*	7154*	31
30	945*	041*	408	7085*	30
31	0,64967*	0,76022*	0,85458	1,17016	29
32	989	003*	509*	6947	28
33	0,65011	0,75984*	559	6878	27
34	033	965*	609	6809	26
35	055	946	660*	6741*	25
36	077	927	710	6672	24
37	100*	908	761*	6603	23
38	122*	889	811	6535*	22
39	144*	870	862*	6466	21
40	166*	851	912	6398*	20
41	0,65188*	0,75832	0,85963*	1,16329	19
42	210*	813	0,86014*	6261*	18
43	232*	794	064	6192	17
44	254*	775	115*	6124	16
45	276*	756	166*	6056*	15
46	298	738*	216	5987	14
47	320	719*	267*	5919	13
48	342	700*	318*	5851	12
49	364	680	368	5783	11
50	386	661	419	5715*	10
51	0,65408	0,75642	0,86470	3,15647*	9
52	430	623	521*	5579*	8
53	452	604	572*	5511	7
54	474	585	623*	5443	6
55	496	566	674*	5375	5
56	518	547	725*	5308*	4
57	540	528	776*	5240*	3
58	562*	509	827*	5172	2
59	584*	490	878*	5104	1
60	606*	471*	929*	5037*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
49°					

41°					
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,65606*	0,75471*	0,86929*	1,15037*	60
1	628*	452*	980*	4969	59
2	650*	433*	0,87031*	4902*	58
3	672*	414*	082	4834	57
4	694*	395*	133	4767*	56
5	716*	375	184	4699	55
6	738*	356	236*	4632	54
7	759	337	287*	4565*	53
8	781	318	338	4498*	52
9	803	299*	389	4430	51
10	825	280*	441*	4363	50
11	0,65847	0,75261*	0,87492	1,14296	49
12	869*	241	543	4229	48
13	891*	222	595*	4162	47
14	913*	203	646	4095	46
15	935*	184*	698*	4028	45
16	956	165*	749	3961	44
17	978	146*	801*	3894	43
18	0,66000	126	852	3828*	42
19	022	107	904*	3761*	41
20	044	088	955	3694	40
21	0,66066*	0,75069*	0,88007*	1,13627	39
22	088*	050*	059*	3561*	38
23	109	030	110	3494	37
24	131	011	162*	3428*	36
25	153	0,74992*	214*	3361	35
26	175*	973*	265	3295*	34
27	197*	953	317	3228	33
28	218	934	369*	3162	32
29	240	915*	421*	3096*	31
30	262	896*	473*	3029	30
31	0,66284*	0,74876	0,88524	1,12963	29
32	306*	857	576	2897	28
33	327	838*	628	2831*	27
34	349	818	680	2765*	26
35	371*	799*	732	2699*	25
36	393*	780*	784	2633*	24
37	414	760	836	2567*	23
38	436	741	888	2501*	22
39	458*	722*	940	2435*	21
40	480*	703*	992	2369	20
41	0,66501	0,74683	0,89045*	1,12303	19
42	523	664*	097*	2238*	18
43	545*	644	149*	2172*	17
44	566	625	201	2106	16
45	588	606*	253	2041*	15
46	610*	586	306*	1975*	14
47	632*	567*	358*	1909	13
48	653	548*	410	1844	12
49	675*	528	463*	1778	11
50	697*	509	515	1713	10
51	0,66718	0,74489	0,89567	1,11648*	9
52	740*	470*	620*	1582	8
53	762*	451*	672	1517	7
54	783	431	725*	1452*	6
55	805*	412*	777	1387*	5
56	827*	392	830*	1321	4
57	848	373*	883*	1256	3
58	870*	353	935	1191	2
59	891	334*	988*	1126	1
60	913	314	0*90040	1061	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
48°					

42°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	60
1	935*	295	093	0996	59
2	956	276*	146*	0931	58
3	978*	256	199*	0867*	57
4	999	237*	251	0802*	56
5	0,67021	217	304	0737*	55
6	043*	198*	357*	0672	54
7	064	178	410*	0608*	53
8	086*	159*	463*	0543*	52
9	107	139	516*	0478	51
10	129*	120*	569*	0414*	50
11	0,67151*	0,74100	0,90621	1,10349	49
12	172	080	674	0285*	48
13	194*	061*	727	0220	47
14	215	041	781*	0156*	46
15	237*	022*	834*	0091	45
16	258	002	887*	0027	44
17	280*	0,73983*	940*	1,09963*	43
18	301	963	993*	9899*	42
19	323*	944*	0,91046	9834	41
20	344	924*	099	9770	40
21	0,67366*	0,73904	0,91153*	1,09706	39
22	387	885*	206*	9642	38
23	409*	865	259	9578*	37
24	430	846*	313*	9514*	36
25	452*	826*	366*	9450	35
26	473	806	419	9386	34
27	495*	787*	473*	9322	33
28	516	767	526	9258	32
29	538*	747	580*	9195*	21
30	559	728*	633	9131*	30
31	0,67580	0,73708	0,91687*	1,09067	29
32	602*	688	740	9003	28
33	623	669*	794*	8940*	27
34	645*	649	847	8876	26
35	666	629	901	8813*	25
36	688*	610*	955*	8749	24
37	709	590	0,92008	8686*	23
38	730	570	062	8622	22
39	752*	551*	116*	8559*	21
40	773	531*	170*	8496*	20
41	0,67795*	0,73511	0,92224*	1,08432	19
42	816*	491	277	8369*	18
43	837	472*	331	8306*	17
44	859*	452*	385	8243*	16
45	880	432	439	8179	15
46	901	413*	493	8116	14
47	923*	393*	547*	8053	13
48	944	373*	601	7990	12
49	965	353	655	7927	11
50	987*	333	709	7864	10
51	0,68008	0,73314*	0,92763	1,07801	9
52	029	294*	817	7738	8
53	051*	274	872*	7676*	7
54	072	254	926*	7613*	6
55	093	234	980*	7550	5
56	115*	215*	0,93034	7487	4
57	136*	195*	088	7425*	3
58	157	175	143*	7362	2
59	179*	155	197	7299	1
60	200*	135	252*	7237*	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

47°

43°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,68200*	0,73135	0,93252*	1,07237*	60
1	221	116*	306*	7174	59
2	242	096*	360	7112*	58
3	264*	076*	415*	7049	57
4	285*	056*	469	6987	56
5	306	036	524*	6925*	55
6	327	016	578	6862	54
7	349*	0,72996	633*	6800	53
8	370*	976	688*	6738*	52
9	391	957*	742	6676*	51
10	412	937*	797*	6613	50
11	0,68434*	0,72917*	0,93852*	1,06551	49
12	455*	897*	906	6489	48
13	476*	877*	961	6427	47
14	497	857	0,94016*	6365	46
15	518	837	071*	6303	45
16	539	817	125	6241	44
17	561*	797	180	6179	43
18	582*	777	235	6117	42
19	603	757	290	6056*	41
20	624	737	345	5994*	40
21	0,68645	0,72717	0,94400	1,05932	39
22	666	697	455	5870	38
23	688*	677	510	5809*	37
24	709*	657	565	5747	36
25	730*	637	620	5685	35
26	751	617	676*	5624*	34
27	772	597	731*	5562	33
28	793	577	786*	5501*	32
29	814	557	841	5439	31
30	835	537	896	5378	30
31	0,68857*	0,72517	0,94952*	1,05317*	29
32	878*	497	0,95007	5255	28
33	899*	477	062	5194	27
34	920*	457	118*	5133*	26
35	941*	437	173	5072*	25
36	962*	417	229*	5010	24
37	983	397	284	4949	23
38	0,69004	377	340*	4888	22
39	025	357*	395	4827	21
40	046	337*	451*	4766*	20
41	0,69067	0,72317*	0,95506	1,04705*	19
42	088	297*	562	4644	18
43	109	277*	618*	4583	17
44	130	257*	673	4522	16
45	151	236	729	4461	15
46	172	216	785*	4401*	14
47	193	196	841*	4340*	13
48	214	176	897*	4279	12
49	235	156*	952	4218	11
50	256	136*	0,96008	4158*	10
51	0,69277	0,72116*	0,96064	1,04097	9
52	298	095	120	4036	8
53	319	075	176	3976*	7
54	340	055	232	3915	6
55	361	035*	288	3855*	5
56	382	015*	344	3794	4
57	403	0,71995*	400	3734	3
58	424*	974	457*	3674*	2
59	445*	954	513*	3613	1
60	466*	934*	569*	3553	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

46°

44°

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	0,69466*	0,71934*	0,96569*	1,03553	60
1	487*	914*	625	3493*	59
2	508*	894*	681	3433*	58
3	529*	873	738*	3372	57
4	549	853	794*	3312	56
5	570	833*	850	3252	55
6	591	813*	907*	3192*	54
7	612	792	963	3132*	53
8	633	772	0,97020*	3072*	52
9	654*	752*	076	3012*	51
10	675*	732*	133*	2952	50
11	0,69696*	0,71711	0,97189	1,02892	49
12	717*	691	246*	2832	48
13	737	671*	302	2772	47
14	758	650	359	2713*	46
15	779	630	416*	2653*	45
16	800*	610*	472	2593	44
17	821*	590*	529	2533	43
18	842*	569	586*	2474*	42
19	862	549*	643*	2414	41
20	883	529*	700*	2355*	40
21	0,69904*	0,71508	0,97756	1,02295	39
22	925*	488*	813	2236*	38
23	946*	468*	870	2176	37
24	966	447	927	2117*	36
25	987	427*	984	2057	35
26	0,70008*	407*	0,98041	1998*	34
27	029*	386	098	1939*	33
28	049	366	155	1879	32
29	070	345	213*	1820*	31
30	091*	325	270*	1761*	30
31	0,70112*	0,71305*	0,98327*	1,01702*	29
32	132	284	384	1642	28
33	153	264*	441	1583	27
34	174*	243	499*	1524	26
35	195*	223	556	1465	25
36	215	203*	613	1406	24
37	236	182	671*	1347	23
38	257*	162*	728	1288	22
39	277	141	786*	1229	21
40	298	121*	843	1170	20
41	0,70319*	0,71100	0,98901*	1,01112*	19
42	339	080*	958	1053*	18
43	360	059	0,99016*	0994*	17
44	381*	039	073	0935	16
45	401	019*	131	0876	15
46	422	0,70998	189*	0818	14
47	443*	978*	247*	0759*	13
48	463	957	304	0701*	12
49	484	937*	362	0642	11
50	505*	916	420*	0583	10
51	0,70525	0,70896*	0,99478*	1,00525	9
52	546*	875	536*	0467*	8
53	567*	855*	594*	0408	7
54	587	834*	652*	0350*	6
55	608*	813	710*	0291	5
56	628	793*	768*	0233	4
57	649*	772*	826*	0175*	3
58	670*	752*	884*	0116	2
59	690	731	942*	0058	1
60	711*	711*	1,00000	1,00000	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

45°

Les Tables trigonométriques qui précèdent ont été corrigées avec le plus grand soin. Elles ont été revues notamment sur celles [1] qui ont été publiées en 1872 par le major Vladimir Vassal, chez M. Gauthier-Villars, et qui font le plus grand honneur, comme exactitude et comme disposition typographique, à leur Auteur et à leur Éditeur. M. Vassal a compromis sa vue dans ce travail, mais il a rendu un véritable service aux sciences et aux calculateurs.

(1) *Nouvelles Tables donnant, avec cinq décimales, les logarithmes vulgaires et naturels des nombres de* 1 *à* 10 800 *et des fonctions circulaires et hyperboliques pour tous les degrés du quart de cercle de minute en minute.* 1 vol. in-4.

ADDITION.

ADDITION.

Comme nous l'avons expliqué dans notre Préface, nous avons laissé à dessein de côté, dans la *Géométrie élémentaire,* des questions que nous comptons traiter plus loin par la *Géométrie analytique*. Mais le Programme d'admission à l'École Polytechnique, qui n'a été imprimé au *Journal officiel* que deux mois et demi après l'apparition de ce Volume, nous oblige, pour rester fidèle à notre titre, d'exposer ici à part quelques points omis volontairement.

Des divisions et des faisceaux harmoniques.

1. Nous allons reprendre, en le complétant, ce que nous avons déjà dit à cet égard (*Géom.*, 136, 137).

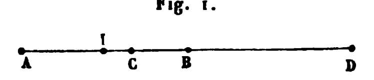
Trois nombres forment une *proportion harmonique,* lorsque le rapport de l'excès du premier sur le deuxième à l'excès du deuxième sur le troisième est égal au rapport du premier nombre au troisième.

La dénomination employée vient de ce que, lorsqu'une corde sonore rend l'accord parfait *ut, mi, sol,* elle est frappée successivement en trois points qui correspondent à des longueurs de corde proportionnelles aux nombres 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, donnant précisément la proportion

$$\frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}.$$

2. Nous avons vu (*Géom.*, 136) que, A et B étant deux points fixes pris sur une droite indéfinie (*fig.* 1), il existe toujours sur cette droite deux

Fig. 1.



points C et D, situés nécessairement d'un même côté du milieu I de cette droite, l'un *intérieur* à AB, l'autre *extérieur,* tels que les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$ soient égaux en valeur absolue.

On a donc

(1) $$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

En échangeant les moyens, on en déduit

$$\frac{DB}{CB} = \frac{DA}{CA}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{DA - AB}{AB - CA} = \frac{DA}{CA}.$$

Les trois longueurs DA, AB, CA, constituent par suite une proportion harmonique, et l'on dit que la droite AB est divisée *harmoniquement* aux points C et D, qu'on appelle *points conjugués harmoniques* par rapport à la droite AB. On donne alors, par extension, à la relation (1) le nom de *proportion harmonique*.

Si l'on tient compte des signes des segments (*Géom.*, **12**), le rapport $\frac{CA}{CB}$ est négatif, tandis que le rapport $\frac{DA}{DB}$ est *positif*. La véritable forme de la proportion harmonique est ainsi

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Comme cette même relation peut s'écrire, par échange de moyens et simples permutations de lettres,

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1,$$

la droite CD, à son tour, est divisée *harmoniquement* aux points A et B, qui sont *conjugués harmoniques* par rapport à CD.

Les quatre points A, B, C, D, forment un *système* ou une *division harmonique*.

3. *La moitié* AI *de la droite* AB (*fig.* 1) *est moyenne proportionnelle entre les distances du point* I *aux deux points conjugués harmoniques* C *et* D.

Nous n'avons besoin, pour démontrer ce théorème, que de considérer les valeurs absolues des segments, puisque les points C et D sont tous deux d'un même côté du point I. Nous déduirons donc de la relation (1)

$$\frac{CA - CB}{CA + CB} = \frac{DA - DB}{DA + DB},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(AI + IC) - (BI - IC)}{(AI + IC) + (BI - IC)} = \frac{AB}{AB + 2BD}.$$

Puisque AI égale BI en valeur absolue, cette dernière expression revient à

$$\frac{2IC}{2AI} = \frac{2AI}{2ID},$$

et il en résulte immédiatement

$$\overline{AI}^2 = IC.ID. \qquad (2)$$

Réciproquement, *si un point* M *pris sur* AB *satisfait à cette condition, ce point se confond nécessairement avec le milieu* I *de* AB.

Car, s'il était à gauche ou à droite de I, on ne pourrait avoir en même temps

$$\overline{AM}^2 = MC.MD \quad \text{et} \quad \overline{AI}^2 = IC.ID,$$

puisque, AM étant $<$ ou $>$ AI, on aurait, au contraire, à la fois MC $>$ ou $<$ IC et MD $>$ ou $<$ ID.

4. La relation (2), qui est une autre forme de la proportion harmonique, met bien en évidence la position relative des points d'un système harmonique, et conduit à la détermination facile du quatrième point du système quand on connaît les trois autres.

Supposons, en particulier (*fig.* 1), que le point C vienne en I; on aura IC = 0 et, par suite, ID = ∞.

Le conjugué harmonique du milieu d'une droite est donc à l'infini sur cette droite, dans un sens ou dans l'autre; et, réciproquement, *le conjugué harmonique de l'infini est, sur une droite, le milieu de cette droite.*

On voit par là que *deux points quelconques, le milieu de la droite qui les joint et le point à l'infini sur cette droite, forment une division harmonique.*

5. Traçons deux cercles *orthogonaux* I et O (*fig.* 2), c'est-à-dire se coupant à angle droit au point E. L'angle IEO est alors droit, et les tangentes en E sont respectivement dirigées suivant les rayons des deux cercles.

Fig. 2.

Si l'on mène un diamètre quelconque AB du premier cercle, coupant le second en C et en D, on a donc (*Géom.*, 181)

$$\overline{IE}^2 \text{ ou } \overline{IA}^2 = IC.ID.$$

Par suite (3), *deux cercles orthogonaux divisent harmoniquement toute droite passant par le centre de l'un d'eux.*

6. Si l'on joint (*fig.* 3) un même point O aux quatre points conjugués harmoniques A, B, C, D, on forme un *faisceau harmonique,* dont le point O est le *centre* et dont les droites OA, OB, OC, OD, sont les *rayons.* Les rayons qui correspondent aux points conjugués harmoniques sont dits *conjugués harmoniques.* Les rayons OC et OD sont conjugués harmoniques des rayons OA et OB ou divisent harmoniquement l'angle AOB; réciproquement, les rayons OC et OD divisent harmoniquemen l'angle AOB.

Nous avons déjà rencontré (*Géom.*, 143) un exemple de faisceau harmonique.

Si l'on mène les bissectrices OC et OD des deux angles intérieur et extérieur supplémentaires AOB, BOA', d'un triangle AOB (*fig.* 3), on a (*Géom.*, 141, 142)

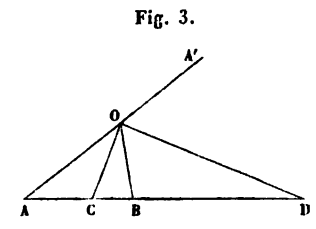
$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB},$$

d'où

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Les points C et D, pieds des deux bissectrices, sont donc conjugués harmoniques par rapport au côté AB. Par conséquent, les deux côtés OA et OB du triangle et les deux bissectrices OC et OD forment un faisceau harmonique.

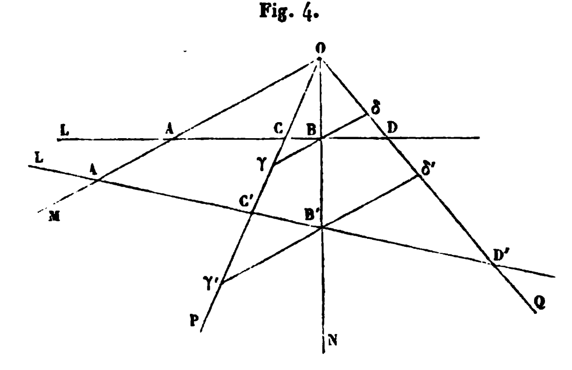
Fig. 3.



L'angle COD étant droit, la circonférence décrite sur CD comme diamètre passe par le point O. Il en résulte que, *si l'on détermine sur le diamètre* CD *d'une circonférence* COD *les points* A *et* B *conjugués harmoniques des points* C *et* D, *le rapport des distances d'un point quelconque* O *de la circonférence aux points* A *et* B *demeure constant;* car les bissectrices des angles variables AOB, BOA', passent constamment par les points C et D, conjugués harmoniques des points A et B.

7. *Tout faisceau harmonique coupe harmoniquement une transversale quelconque* (*fig.* 4).

Fig. 4.



Soit la droite L, divisée harmoniquement aux points A, B, C, D. En joignant un point O quelconque à ces quatre points, on forme (6) un faisceau harmonique ayant pour rayons les droites OM, ON, OP, OQ.

Prenons maintenant une transversale ou sécante quelconque L′, rencontrée par les rayons du faisceau aux points A′, B′, C′, D′. Il faut démontrer qu'elle est divisée harmoniquement en ces points, en partant de l'hypothèse

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Or, si l'on mène par le point B la parallèle $\gamma\delta$ au rayon OM, on a évidemment

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{\gamma B}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{\delta B},$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre,

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\delta B}{\gamma B} = -1.$$

Si l'on mène par le point B′ la parallèle $\gamma'\delta'$ au rayon OM, on a de même

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{OA'}{\gamma' B'}, \quad \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{OA'}{\delta' B'},$$

d'où, en divisant membre à membre et à cause des parallèles $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{\delta' B'}{\gamma' B'} = \frac{\delta B}{\gamma B} = -1.$$

Comme on peut considérer la figure rectiligne A′B′C′D′ comme la *perspective* ou *la projection concourante* au point O de la figure rectiligne ABCD, on peut encore énoncer commodément le théorème qu'on vient de démontrer en disant que *le rapport harmonique de quatre points en ligne droite est projectif.*

8. Remarquons que le point B′ est quelconque sur le rayon ON, et que la parallèle $\gamma'\delta'$, menée par ce point au rayon OM et limitée aux deux autres rayons conjugués OP et OQ du faisceau harmonique considéré, satisfait toujours, d'après la démonstration même qu'on vient de développer, à la relation

$$\frac{\delta' B'}{\gamma' B'} = -1.$$

On a donc, en valeur absolue, $\delta' B' = \gamma' B'$, et le point B′ est le *milieu* de la parallèle $\gamma'\delta'$ à OM.

On en conclut immédiatement ce théorème important : *Dans tout faisceau harmonique, toute parallèle à l'un des rayons est coupée par les trois autres rayons en parties égales.*

9. Réciproquement, *tout faisceau de quatre droites* OM, ON, OP, OQ, *est harmonique, si une parallèle* $\gamma' B' \delta'$ *à l'un des rayons* OM *est divisée par les trois autres rayons en parties égales* (*fig.* 4).

En effet, le point B' étant par hypothèse le milieu de la transversale $\gamma'B'\delta'$, cette transversale est divisée harmoniquement par le point B' et par le point situé à l'infini sur $\gamma'B'\delta'$ (4), point qui est à l'intersection de la transversale donnée et du rayon OM. Le faisceau des quatre rayons OM, ON, OP, OQ, divisant harmoniquement une certaine transversale, est par cela même un faisceau harmonique (6, 7).

10. On déduit de ce qui précède la construction du quatrième rayon d'un faisceau harmonique dont on connaît les trois autres rayons.

Supposons donnés les rayons OM, OP, ON, et menons, par un point quelconque B' du rayon ON (*fig.* 4), une parallèle au rayon OM. Cette parallèle venant couper en γ' le rayon OP, il suffit de prendre sur le prolongement de $\gamma'B'$ une longueur $B'\delta' = \gamma'B'$, pour avoir en δ' un point du quatrième rayon OQ.

11. *Lorsque, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués* OM, ON, *sont rectangulaires, ces rayons sont les bissectrices des angles supplémentaires formés par les deux autres rayons* OP, OQ.

Admettons que la condition indiquée soit remplie dans la *fig.* 4. Si l'on suppose la transversale $\gamma'B'\delta'$ perpendiculaire au rayon ON, elle est parallèle au rayon OM, et l'on a $\gamma'B' = B'\delta'$ (8). Les deux triangles rectangles $\gamma'OB'$, $B'O\delta'$, sont alors égaux, et le rayon ON est la bissectrice de l'angle POQ. Le rayon OM, à son tour, est donc la bissectrice du supplément de POQ.

C'est la *réciproque* de la proposition rappelée au n° 6.

Pôle et polaire par rapport à un angle.

12. Par un point B pris d'une manière quelconque dans le plan d'un angle POQ (*fig.* 4), menons diverses sécantes, telles que CBD, et prenons sur chaque sécante le point A conjugué harmonique du point B par rapport au segment CD intercepté par les côtés de l'angle POQ. Il est évident, d'après ce qui précède, que le lieu du point A est le rayon OM, conjugué harmonique du rayon OB ou ON par rapport aux rayons OP et OQ ou par rapport à l'angle POQ. Ainsi la sécante CBD tournant autour du point fixe B, le conjugué A de ce point fixe décrit la droite fixe OM.

On donne à la droite OM le nom de *polaire* du point B par rapport à l'angle POQ, et, au point B, le nom de *pôle* de la droite OM par rapport au même angle.

On voit que tous les points de ON considérés comme pôles ont la même polaire OM par rapport à l'angle POQ et que, réciproquement, tous les points de OM considérés comme pôles ont la même polaire ON par rapport au même angle.

On voit, en même temps, que le problème de trouver le pôle quand on connaît la polaire ou la polaire quand on connaît le pôle, revient à déter-

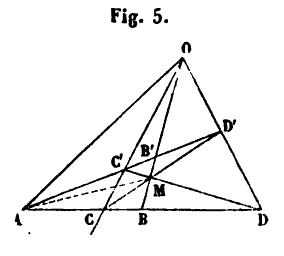
miner le quatrième rayon d'un faisceau harmonique dont on connaît les trois autres rayons (10).

Nous allons indiquer quelques applications intéressantes des notions que nous venons d'établir.

13. *On donne un angle* COD *et un point* A *hors de cet angle. On mène par ce point deux sécantes quelconques* ACD, AC′D′, *et l'on joint diagonalement les points d'intersection* C *et* D′, C′ *et* D. *Les droites obtenues se croisent en* M *sur la polaire du point* A *par rapport à l'angle* COD (*fig.* 5).

En effet, déterminons le point B, conjugué harmonique du point A par rapport à la droite CD. Les quatre droites MA, MC, MB, MD, forment un faisceau harmonique (6). Par suite, le point B′, où MB prolongée coupe la sécante AC′D′, est le conjugué harmonique du point A par rapport à la droite C′D′ (12). Les deux points B et B′ déterminent donc la polaire du point A par rapport à l'angle COD, et, comme la droite BMB′ passe par le point O, on obtient cette polaire en traçant OM.

Fig. 5.



Réciproquement, *si l'on prend un point* M *quelconque sur la polaire* OB, *si l'on mène par ce point les droites* CD′ *et* C′D *arrêtées aux côtés de l'angle* COD, *les droites* CD *et* C′D′ *prolongées viennent se couper au pôle* A (*fig.* 5).

En effet, supposons un instant que le point A, conjugué harmonique du point B par rapport à CD, ne se trouve pas sur C′D′, et menons la droite AC′. Cette droite AC′ prolongée viendra couper OD en un point D_1 différent de D′. Si l'on joint alors CD_1, on coupera C′D en un point de la polaire OB qui ne pourra être que le point M. Par conséquent, les deux droites CD_1 et CD′ ayant deux points communs C et M ne peuvent différer, et la droite C′D′ prolongée passe nécessairement par le point A.

14. Soit un quadrilatère ABCD. Prolongeons (*fig.* 6) les côtés opposés AB et CD, AD et BC, jusqu'à leurs rencontres aux points E et F. L'ensemble ainsi obtenu porte le nom de *quadrilatère complet*. Ce quadrilatère a pour *troisième* diagonale la droite EF.

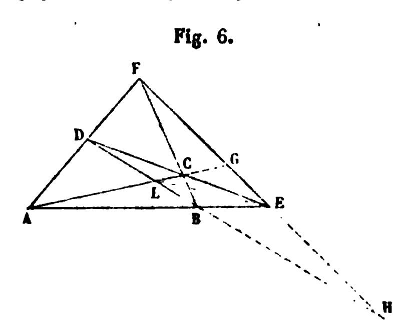
On voit qu'un quadrilatère complet n'est que le système formé par quatre droites indéfinies qui se coupent en six points. En joignant les points opposés deux à deux, on a les trois diagonales du quadrilatère.

Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

En effet, soient G, H, L, les points d'intersection des trois diagonales. D'après le théorème précédent (13), le point H est le pôle de la droite

ACG par rapport à l'angle EAF, de sorte que les points de rencontre H et G de la diagonale EF avec les diagonales BD et AC la divisent harmoniquement. De même, le point F est le pôle de la droite EL par rapport à l'angle AED, de sorte que L est sur AC le conjugué harmonique du point G et, sur BD, le conjugué harmonique du point H.

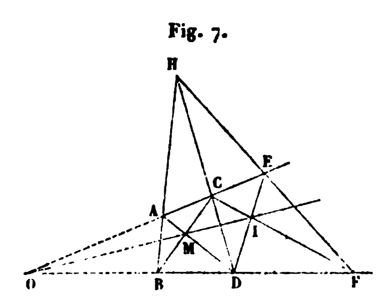
Fig. 6.



15. On peut encore s'appuyer sur ce qui précède (13) pour *mener par un point donné une droite qui concoure avec deux droites données, ces deux droites ne se coupant pas dans les limites du dessin.*

Soient (*fig.* 7) AC et BD les deux droites données, soit M le point donné placé entre les deux droites. On tracera par le point M les deux droites AD et BC. En joignant leurs points d'intersection avec les lignes données, on obtiendra les droites AB et CD qui, prolongées, iront en général se couper en un point H. On pourra toujours opérer de manière que ce point soit compris dans les limites de l'épure. Par le point H ainsi déterminé, on mènera la sécante HEF aux deux lignes données, et l'on joindra en croix les points d'intersection obtenus avec les points C et D. Les droites CF et DE se croiseront en I. La droite MI sera la polaire du point H par rapport à l'angle que forment les droites AC et BD, et MI ira passer par le point de concours O de ces droites.

Fig. 7.



Supposons maintenant (*fig.* 7) que les droites données soient AB et CD, et que le point donné F soit extérieur à ces droites. Par un point quelconque O, on mènera les droites OAC, OBDF, dont l'une passe par le point donné F. On joindra en croix les points d'intersection de ces droites avec les lignes données. Les droites ainsi obtenues, AD et BC, se croiseront en M. On mènera alors la droite FC qui coupera en I la direction OM; puis, on joindra DI qui coupera AC au point E. La ligne FE sera la direc-

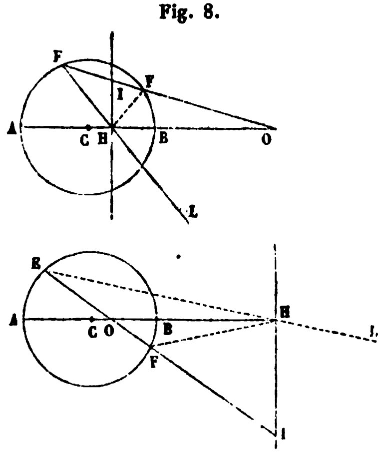
tion demandée ; car la droite OMI est, par rapport à l'angle COD, la polaire du point H où viennent se rencontrer les droites AB, CD, EF.

On pourra mettre à profit les solutions précédentes, pour tracer par un point donné une droite allant concourir avec deux autres droites, visibles seulement dans une partie de leur parcours; pour trouver un point situé sur le prolongement d'une droite inaccessible, ou encore, pour prolonger une droite donnée au delà d'un obstacle arrêtant la vue.

Pôle et polaire dans le cercle.

16. *Si, par un point* O *pris dans le plan d'un cercle de diamètre* AB, *on trace une sécante quelconque* EF *à ce cercle, le lieu du point* I, *conjugué harmonique du point* O *par rapport à la corde* EF, *est une droite perpendiculaire au diamètre* AB *qui passe par le point* O (*fig.* 8).

Fig. 8.



Déterminons le point H, conjugué harmonique du point O par rapport au diamètre AB qui passe par ce point, et soit I le conjugué harmonique du même point par rapport à la corde quelconque EF. Il suffit, pour démontrer le théorème énoncé, de prouver que la droite IH est perpendiculaire sur AB.

Cela posé, puisque les points O et H sont conjugués harmoniques par rapport à AB et que les points E et F appartiennent à la circonférence, on a nécessairement (6)

$$\frac{EH}{EO} = \frac{FH}{FO}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{EH}{FH} = \frac{EO}{FO}.$$

Suivant que le point O est extérieur ou intérieur à la circonférence, la droite HO est donc la bissectrice de l'angle FHL ou de l'angle EHF, extérieur ou intérieur par rapport au triangle EHF. Les droites HO, HF, HI, HE, formant par hypothèse un faisceau harmonique, il faut alors que la droite IH soit à son tour bissectrice de l'angle intérieur EHF ou de l'angle extérieur FHL (6), c'est-à-dire qu'elle soit perpendiculaire sur HO ou sur le diamètre OAB.

On dit que le point O est le *pôle* de la droite IH et que la droite IH est la *polaire* du point O, par rapport au cercle AB.

17. Le point C étant le centre du cercle ou le milieu de AB, on a la relation (3)

$$\overline{AC}^2 = CH.CO.$$

On peut déduire de cette relation plusieurs conséquences importantes.

Par un point O extérieur à une circonférence (*fig.* 9), menons à cette circonférence les tangentes OM et ON. Traçons la corde MN qui joint les points de contact M et N, et qui est perpendiculaire au diamètre OAB. Le triangle rectangle OMC donne

Fig. 9.

$$\mathrm{MC}^2 = \mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH}.\mathrm{CO}.$$

Le point H où la corde MN coupe le diamètre OAB est donc le conjugué harmonique du point O par rapport à AB; en d'autres termes, *la polaire du point* O *est la corde* MN *qui joint les points de contact des tangentes menées de ce point à la circonférence.*

On peut conclure de là une nouvelle construction de la tangente menée au cercle par un point extérieur.

La relation $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH}.\mathrm{CO}$ prouve encore que les points O et H sont *réciproques*, c'est-à-dire que la polaire de l'un passe par l'autre, ce qui est d'ailleurs évident (12).

La même relation montre que, si le point O vient en B sur la circonférence, le point H vient aussi en B. Donc *la polaire d'un point pris sur la circonférence est la tangente menée en ce point à la circonférence.*

Enfin, si CO devient infiniment petit, CH devient infiniment grand, de sorte que, si le pôle est au centre de la circonférence, la polaire se transporte à l'infini.

18. *Lorsqu'on fait décrire au pôle* O *une droite* XY, *toutes les polaires correspondantes aux diverses positions du point* O *se croisent en un même point* H *qui est le pôle de* XY (*fig.* 10).

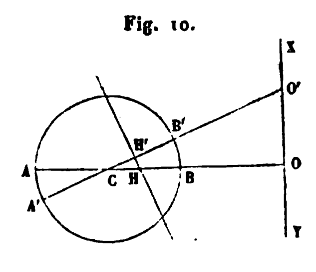


Fig. 10.

Menons le diamètre ABO perpendiculaire à la droite XY, et déterminons sur ce diamètre le point H, conjugué harmonique du point O ou pôle de la droite XY. Prenons un point *quelconque* O′ sur XY et joignons-le au centre du cercle : nous obtiendrons ainsi un diamètre A′B′; la perpendiculaire HH′, abaissée du point H sur ce diamètre, est la polaire du point O′. En effet, les triangles semblables COO′, CHH′, donnent

$$\frac{\mathrm{CO}'}{\mathrm{CH}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CH}'},$$

d'où

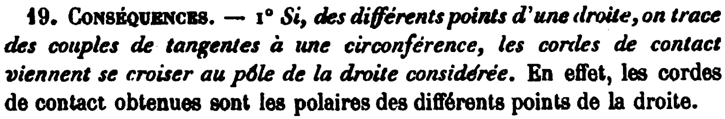
$$\mathrm{CH}'.\mathrm{CO}' = \mathrm{CH}.\mathrm{CO} = \mathrm{AC}^2 \quad (17).$$

Le point H′ est donc bien le pied de la polaire du point O′, qui est alors HH′.

Réciproquement, *si la droite* XY *tourne autour du point* O, *son pôle décrit la polaire du point* O (*fig.* 11).

Car, si l'on détermine la polaire IH du point O et si l'on abaisse, du centre C de la circonférence, une perpendiculaire CO′ sur la position *quelconque* de la droite XY, les deux triangles semblables CIH, COO′, donnent toujours

Fig. 11.



$$\frac{CI}{CO} = \frac{CH}{CO'},$$

d'où

$$CI.CO' = CH.CO = AC^2.$$

Le point I est donc le pôle de la droite XY.

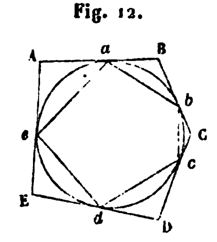
19. Conséquences. — 1° *Si, des différents points d'une droite, on trace des couples de tangentes à une circonférence, les cordes de contact viennent se croiser au pôle de la droite considérée.* En effet, les cordes de contact obtenues sont les polaires des différents points de la droite.

2° *Si, d'un point, on mène à un cercle une série de sécantes, les points de rencontre des couples de tangentes correspondantes appartiennent à la polaire du point considéré.* En effet, les sécantes passant par un même point, leurs pôles se trouvent sur la polaire de ce point.

3° *En joignant les pôles de deux droites, on obtient la polaire de leur point de rencontre.* En effet, ces deux droites peuvent être regardées comme les positions différentes d'une droite passant constamment par leur point de rencontre.

4° D'après ce dernier corollaire, *si deux polygones d'un même nombre de côtés, tracés dans le plan d'une circonférence, sont tels que les sommets de l'un soient les pôles des côtés de l'autre, la propriété réciproque a lieu; c'est-à-dire que les sommets du second polygone* (*points de rencontre de ses côtés*) *sont à leur tour les pôles des côtés du premier polygone.*

Fig. 12.



On donne alors aux deux polygones le nom de *polaires réciproques.*

On voit que, si (*fig.* 12) un polygone ABCDE est circonscrit à un cercle, on obtient sa polaire réciproque en formant le polygone inscrit qui correspond aux points de contact successifs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Car chaque sommet A du polygone circonscrit est le pôle du côté opposé *ea* du polygone inscrit, et chaque sommet *a* du polygone inscrit est le pôle du côté corpondant AB du polygone circonscrit.

Section antiparallèle du cône oblique à base circulaire.

20. *Dans un cône oblique à base circulaire, toute section antiparallèle à la base est un cercle.*

Soit S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle O (*fig.* 13). On nomme *plan principal* de ce cône le plan SAB mené par la droite qui joint le sommet S au centre O de la base, perpendiculairement au plan de cette base, et l'on dit qu'un plan CMD est *antiparallèle à la base* lorsqu'il est perpendiculaire sur le plan principal SAB et que sa trace CD sur ce plan principal est antiparallèle à AB par rapport à l'angle ASB. Il s'agit de prouver que la section CMD est un cercle.

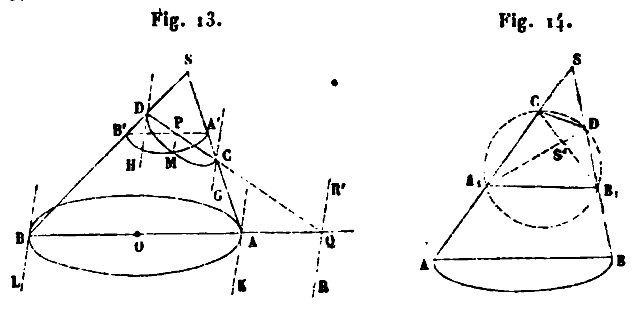
Par un point quelconque M de la section, menons un plan parallèle à la base; ce plan coupera le cône suivant un cercle A'MB' décrit sur A'B' comme diamètre, et le plan CMD suivant une droite MP perpendiculaire au plan principal. Or, dans le cercle A'MB', on a

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB'.$$

D'ailleurs, les triangles PCA', PDB', sont semblables comme ayant leurs angles égaux; ils donnent donc

$$\frac{PA'}{PD} = \frac{PC'}{PB'}, \quad \text{d'où} \quad PA'.PB' = PC.PD, \quad \text{et} \quad \overline{MP}^2 = PC.PD,$$

Par suite, le point M appartient à un cercle décrit sur CD comme diamètre.

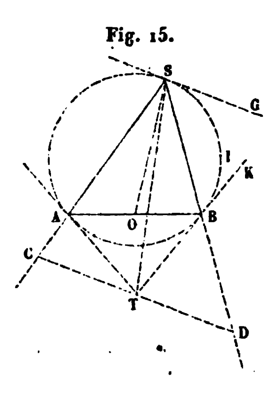


21. *Deux sections, l'une A_1B_1 parallèle, l'autre CD antiparallèle à la base d'un cône oblique à base circulaire, sont toujours situées sur une même sphère;* car les deux sections circulaires A_1B_1 et CD (*fig.* 14) sont perpendiculaires à un même plan SAB passant par leurs centres, et le quadrilatère A_1B_1CD situé dans ce plan est inscriptible; les cercles A_1B_1 et CD sont donc sur la sphère dont le grand cercle passe par les quatre points A_1, B_1, C, D.

22. Dans un cône oblique à base circulaire, les centres des sections parallèles à la base sont distribués sur une même droite passant par le sommet; les centres des sections antiparallèles à la base sont aussi placés sur une seconde droite passant par le sommet. Il importe de connaître la situation respective de ces deux droites.

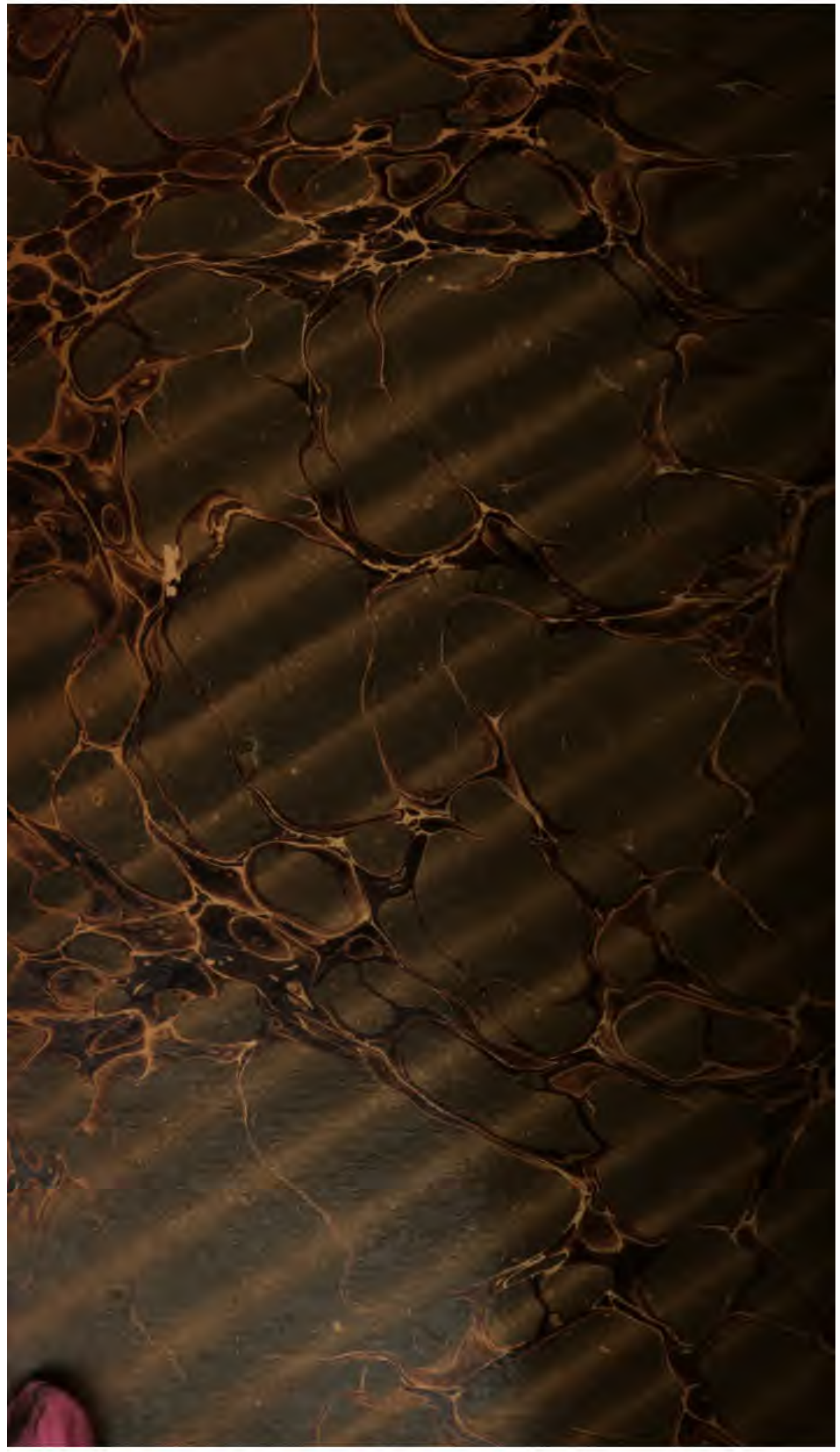
Soit SAB la section principale du cône dont la base est le cercle décrit sur AB comme diamètre. Le cercle circonscrit au triangle ASB (*fig.* 15) est un grand cercle de la sphère qui contient le cercle AB et le sommet S du cône. La tangente SG au cercle SAB est la trace sur SAB du plan tangent à cette sphère en S, et ce plan tangent est perpendiculaire au plan SAB de la figure; d'ailleurs, la droite SG est antiparallèle à AB, à cause de l'égalité des angles BAS, BSG. Le point tangent SG est donc parallèle aux plans des sections antiparallèles à la base AB, et la question se réduit à trouver le centre d'une section quelconque parallèle à ce plan tangent. Nous choisirons celle qui passe par le point de concours T des tangentes en A et en B au cercle ASB, c'est-à-dire par le sommet T du cône qui est circonscrit à la sphère indiquée suivant le cercle AB. En menant par le point T la parallèle CTD à SG, on aura le diamètre de cette section. Or il est aisé de voir que le point T en est précisément le centre, c'est-à-dire que le point T est le milieu de CD. En effet, l'angle TBD, égal à SBK, a pour mesure la moitié de l'arc SIB; l'angle TDB, alterne-interne de BSG, a aussi cette mesure; donc le triangle TBD est isocèle, et l'on a TD = TB. On voit de même que TC = TA; par suite, comme TA = TB, on a TC = TD. Ainsi, *le lieu des centres des sections antiparallèles à la base* AB *est la droite* ST, *qui joint le sommet* S *au sommet* T *d'un cône auxiliaire circonscrit, suivant le cercle* AB, *à la sphère déterminée par ce cercle et par le sommet* S *du cône primitif.*

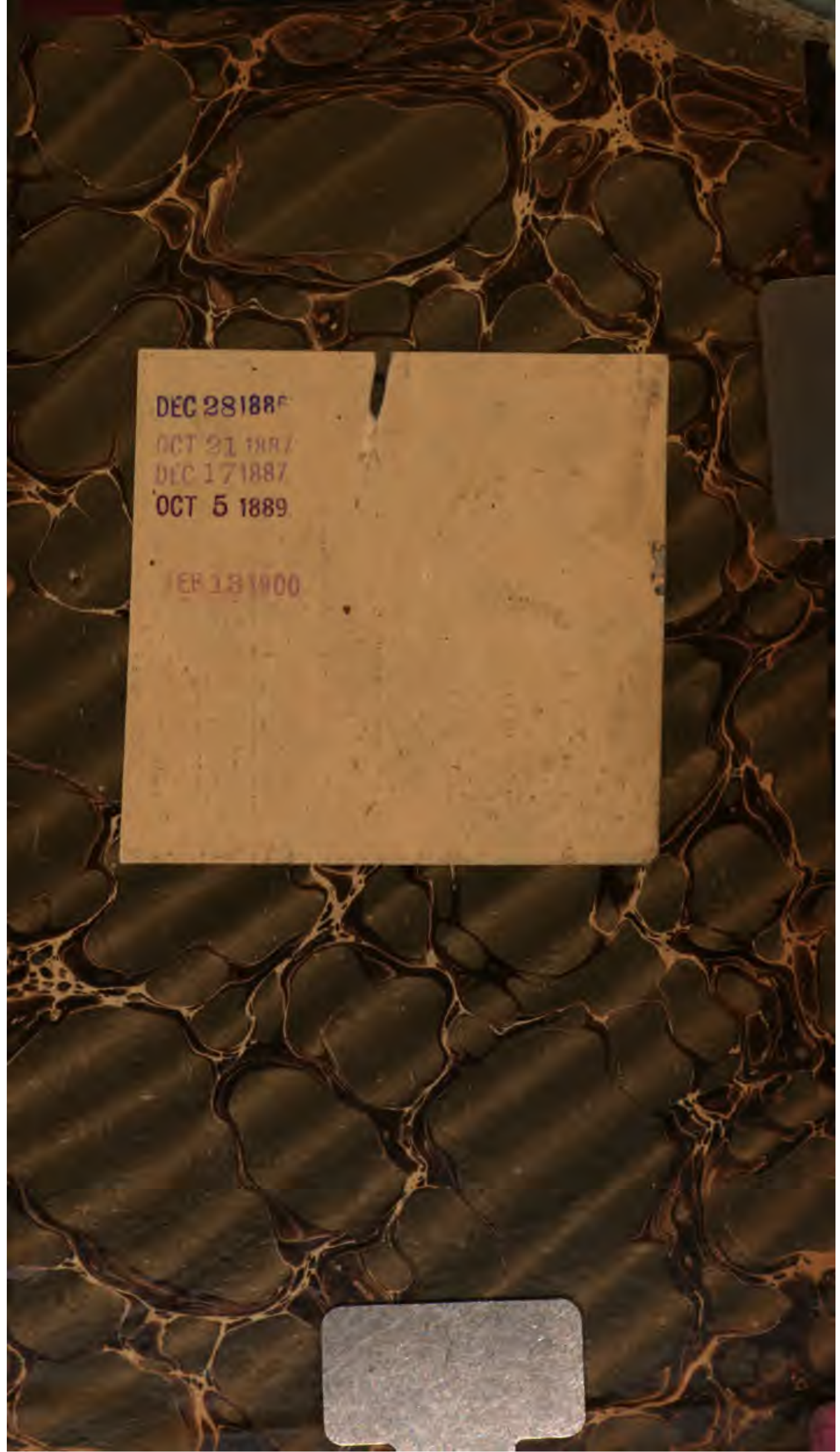
Fig. 15.



FIN DE L'ADDITION.

8099 Paris. — Librairie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.





DEC 28 188
OCT 21 1887
DEC 17 1887
OCT 5 1889